数理解析研究所講究録
第68巻 1969年 115-125

ある種の楕円曲面上の有理二次型式の周期について

東大・理　　　笹倉頌夫

§1 序論.

古典的に良く知られている楕円modular函数あるいは超幾何函数の理論を拡張する事は，現在の代数幾何学及び関連する分野に於いて~~最も~~重要な問題の一つである。既にAbel多様体のmodulusの理論が保型函数(多変数)と密接に関連した形で成果を収めた事は良く知られている。この小論では，小平－Kas (以下全て敬称を省略させて頂く)により研究された楕円曲面の内のある型のものについて，その有理二次型式の周期をparameter(楕円曲面を定義する定義方程式の係数)の函数として考え，若干の結果を記す。　周知の様に楕円modular函数は，代数的不変量'j'と解析的不変量'τ'を結びつける函数であるが，alg. Invariant 'j'をAnalytic Invariant 'τ'の函数と考えるか，Analytic Invariant 'τ'をalgebraic Invariant 'j'の函数と考えるかで立場は異なる。前者は一般に楕円modular函数と呼ばれるものであるが，後者の立場を強調すれば，超幾何函数と呼ばれる種属の函数に達する。

Abel多様体のmodulusは勿論前者の立場を取って取扱われた

が ここでは楕円曲面に対して逆の問題から問題を考える。

そしてこの様な立場から一変数函数論にその範を求むれば、楕円modular函数よりも寧ろ一変数超幾何函数が現われる。従ってこの小論の主目的は、一変数超幾何函数論の初期に於いて知られていた事実に相当する結果の幾つかを楕円曲面の系に対して見出す事にある。

(注) 筆者は1968年の微分幾何学Symposiumで殆んど同じ題のReportを提出したが、ここではその後の結果を中心に記述する。また詳細は論文の形で提出する予定であるので要約を記する事にしたい。

§2. 一変数超幾何函数論よりの引用

F. KLEIN [ ] に基いて(一変数)超幾何函数論の歴史の若干を引用すると Euler-Gauss の時代に於いて、超幾何函数の次の三種類の表現方法が知られていた。

(2.1)
(1) 巾級数展開 --- *Hypergeometric series*
(2) 微分方程式 --- *Hypergeometric differential equation*
(3) 定積分表示 --- *Eulerian integral*

Euler-Gauss がこの三種の表現法を何故に基本的と見なしたかは勿論知る事は出来ないが、これらの表現は後の理論の発展に於いて一定の役割を果たし、またこれらの表現から問題が生じた様に思われる。即ち(順序を逆にしてのべれば)

(3) Eulerian integral は, Riemann Schwarz の三角: 写像(Γ-写像)に於いて基本的な役割を果たした。また Hypergeometric differential equation は Kummer の仕事(相異なる超幾何函数を相互に比較する事)に於いて一定の役割を果たした. また所謂 Fuchs 型の微分方程論や Riemann の問題に対してこの微分方程式は出発点となった事は良く知られている。その他にも Siegel の超越数の理論の中に, 超幾何微分方程式を出発点とするものがある様である。etc. -----.

我々は,この三通りの表示を楕円曲面の系列上の周期函数に対して求める事を問題とするのであるが概略次の段階に迄達したであろう。

(1) 巾級数展開については, 一応最低限の結果迄には到達した。但し我々が得た巾級数展開は通常点に於いてなされたものであり, 特異点に於ける級数展開をも考慮するべきかも知れぬ。尚(一変数又は多変数)超幾何函数の巾級数展開は一つの解に対してのみ直接的に与えられるのに比し, 我々の級数展開は,全ての解に対して与えられている事を注意しておく。

(2) 微分方程式系も尚 explict な表示に至ってはいないとは言え,既に一応の level に到達した.

(3) 定積分表示については,周期函数は勿論定積分表示を有する訳であるが, 然し超幾何函数の場合の様に有用であるか否かは現在判定し難い.

§3. 巾級数展開

さて我々が問題とする楕円曲面は affine surface (3.1) の

completion として得られる。(以下 B^k と記す。)

(3.1) $$y^2 = 4x^3 - g_{4k}(u)x - h_{6k}(u).$$

($g_{4k}(u)$, $h_{6k}(u)$ は夫々 $4k$次, $6k$次 の多項式.)

これらの楕円曲面の性質の内主要な事柄を引用する。

'判別式' $D_k(u)$ を、

(3.2) $$D_k(u) = g_{4k}^3(u) - 27\,h_{6k}^2(u)$$

により定義する。そして以下に於いては $D_k(u)$ は重根を持たないものとする。また、写像 $(u,x,y) \longrightarrow (u,x)$ に関しての分岐曲線: $y=0$ を X_k と置く。また X_k にのみ pole を有する有理二次型式 $\omega_k^{(p,q,r)}$ を $\omega^{(p,q,r)} = \frac{u^p x^q}{y^r}\,du \wedge dx$ により定義する。

B^k の geometric genus ($=\dim H^0(B^k,\Omega^2)$): $P_g(B^k) = k-1$, であり、微分型式 $\omega_k^{(p,0,1)} = \frac{u^p}{y}\,du \wedge dx$ ($p=0,1,\dots,k-2$) が basis をなす。

また first Betti number b_1 及び second Betti number b_2 は夫々

$b_1(B^k) = 0$, $b_2(B_k) = 12k-2$ である。

多項式 $g_{4k}(u)$, $h_{6k}(u)$ を夫々 explicit に、

$$g_{4k}(u) = \tau_{4k}\cdot u^{4k} + \tau_{4k-1}\cdot u^{4k-1} + \cdots + \tau_1 u + \tau_0,$$

$$h_{6k}(u) = \cancel{\sigma_{6k}}\cdot u^{6k} + \sigma_{6k-1}\cdot u^{6k-1} + \cdots + \sigma_1 u + \sigma_0.$$

の形に表わす。そして以下 B^k, X^k … を $B^k(\tau,\sigma)$, $X^k(\tau,\sigma)$, … と記す。問題は (τ,σ) の函数として微分型式 $\omega_k^{(p,q,r)}$ の周期を考える事であった。

記号の簡単の為に微分型式 $\omega^{p,q,r}_{k}(\tau,\sigma)$ を一般に $\omega_k(\tau,\sigma)$ で表わす。また surfaces $B_k(\tau,\sigma)$ 上の 2-cycle を $\gamma(\tau,\sigma)$ で表わす。また $\gamma(\tau,\sigma)$ は parameter (τ,σ) に連続的に depend するものとする。また周期函数 $W^{p,q,r}_{k}(\tau,\sigma)=\int_{\gamma(\tau,\sigma)}\omega^{p,q,r}_{k}(\tau,\sigma)$; を一般に $W_k(\tau,\sigma)$ で表わす。 $W^{*}_{k}(\tau,\sigma)$ は一般の (τ,σ) に対しては(価)正則函数でありまた"微分と積分の交換" $\frac{\partial}{\partial\tau_i}(W)=\int_\gamma\frac{\partial\omega}{\partial\tau_i}$, $\frac{\partial}{\partial\sigma_j}(W)=\int\frac{\partial\omega}{\partial\sigma_j}$; も成立する。($\partial\omega/\partial\tau_i$, $\partial\omega/\partial\sigma_j$ は ω を (x,y,τ,σ) に depend すると考えて、τ_i, σ_j によって偏微分を行なうものとする。) parameter space $\mathbb{C}^{k+1}\times\mathbb{C}^{6k}$ 内に一点 $P_0=\{(0,\dots,0)\times(1,0,\dots,0,1)\}$ を定め、一点 P_0 に於いて巾級数展開を行なうのであるが、"微分と積分の交換則"より P_0 に対応する Fermat 型の曲面 B_0: $y^2=4x^3-(u^{12k}-1)$ 上の有理型式の周期を知れば充分であるが、この事は(必要な範囲で)可能である。(詳細は省略させて頂くが次の事柄が重要である。)

(1) $\{\sigma_{l,m,n}:(u,x,y)\to(\zeta_{12k}^{l}u,\ \zeta_3^{m}x,\ (-1)^{n}y)\}$ なる automorphism が存在するが、$\sigma_{l,m,n}$ の $H_2(B_0)$ への作用を explicit に知る事が出来る。(Pham [ ] の結果は affine surface に対して行なわれたが我々の場合は、compact surface であり、相異なる。)

(II) (1) の結果を参考にして計算すると、全ての周期は、

$$\sum_{k,l}\beta_{kl}\left(\int_0^1\frac{x^k}{\sqrt{4x^3-1}}\,dx\right)\times\left(\int_0^1\frac{v^l}{\sqrt{v^{12k}-1}}\,dv\right)\qquad \beta_{kl}\in\mathbb{Q}(\zeta_6)\ ;$$

なる形の一次結合として与えられる。

精細は[illegible]を参照.

これらの結果より得られる応用を述べる：

各々の微分型式 $w_k^{(p,0,1)}$ に対して "Period map" $\eta_k^p : (\tau,\sigma) \to \mathbb{P}_{12k-5}(\mathbb{C})$,

を次式により定める

$$(3.\quad) \quad \eta_k^p(\tau,\sigma) = \left(\int_{\gamma_1} w_k^{p,0,1}(\tau,\sigma), \cdots \int_{\gamma_{12k-4}} w_k^{p,0,1}(\tau,\sigma)\right).$$

然らば, 巾級数展開の explicit な式を用いて次の結果を得る.

(III) $\mathrm{Rank}\,\eta_k^p(\tau,\sigma) = 10k-1$ 　　(一回微分すれば良い)

(IV) $\{\eta_k^p(\tau,\sigma)\}_{(\tau,\sigma)\in\mathbb{C}^{18}\times\mathbb{C}^{9k+1}}$ は $\mathbb{P}_{12k-5}(\mathbb{C})$ の如何なる Hypersurface にも含まれない. 　　(二回微分の結果より出る.)

この事実より更に, 次の諸結果をうる.

(V) "局所的に" 周期の値 η_k^p は楕円曲面の構造を clarify する.

(VI) $B(\tau,\sigma)$ の Picard 数 $\rho(B)$ は $2 \leqq \rho(B) \leqq 10k$ なる範囲の全ての値を取る.

(VII) $W(\tau,\sigma)$ は線型二階の偏微分方程式の complete solution

をなす。

以上が主なる結果であるが、尚中級数展開を与える～の意義として興味を抱き得る可能性を持つ~~可能性のある~~かも知れない多重数列を得る事にも求められないであろうか？この点について未筆者自身立入った考察を下した事が無いのであるが一応の希望として記しておきたい。

§4 連立偏微分方程式系

§4の項目(III)に於いて、我々が主題としている周期函数はある種の線型(二階偏微分方程式系を満たす事を記した。この節ではこの微分方程式系(以下この様に略記する。)に関して若干の考察を試みる。まずP.A. Griffithsが示した様に、ある種の(この言い方は不鮮明であるが、P.A. Griffiths自身の述べ方も今の所手元にあるPreprintでは不鮮明ではある。尤も具体的での場合は簡単にcheck出来る。)条件の下に、周期函数はその特異点に於いて"regular"である。即ち(簡単の為に局所的に$\mathbb{C}^n \supset D: z_1=0$が特異divisorであるとして)、周期函数Wは、

$$(2.1)\qquad \lim_{|z_1|\to 0,\ \arg z_1:\ \mathrm{bdd.}} |z_1|^M |W| = 0 \qquad (\text{for some positive number } M).$$

を満たす。他方常微分方程式($\mathbb{C} \ni 0$の近傍で定義されているとする。) $\dfrac{d^N F}{dz^N} = \sum_{j=0}^{N-1} P_j \dfrac{d^j F}{dz^j}$；

の解全てが"regular"である為には、係数$P_j z^{N-j}$が正則である

事が必要充分である。これらの結果から偏微分方程式系についても微分方程式の係数の満すべき"condition of regularity"が問題となってくる訳であるが、その必要充分条件を求める事も可能である:

$\mathbb{C}^n \supset \mathfrak{M}$ を $\mathfrak{M} = \{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < \delta;\ \delta$ 十分小$\}$ で定義される球状領域とし、特異 variety を $z_1 = 0$ とする。問題の線型偏微分方程式系 $\mathfrak{D}$ の解空間を $\mathfrak{F}$ として、$\mathfrak{F}$ の次元を f とする。

そして $(z_2, \ldots, z_n) \in \{|z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < \delta\}$ を固定する時 $\mathfrak{F}$ は f 個の (z_1 の函数として) 一次独立な函数を含むものとする。然らば $\mathfrak{F}$ は次の常微分方程式の解空間と一致する。

$$\frac{d^f F}{d z_1^f} = P_1 \cdot \frac{d^{f-1} F}{d z_1^{f-1}} + P_2 \cdot \frac{d^{f-2} F}{d z_1^{f-2}} + \cdots + P_{f-1} \frac{dF}{dz_1} + P_f .$$

($P_1, P_2, \ldots P_f$ は $\mathfrak{M} - \mathfrak{D}$ に於ける一価正則函数。)

この時"condition of regularity"は

(R) $P_1 \cdot z_1,\ P_2 \cdot z_1^2, \ldots\ P_f \cdot z_1^f$ が全て正則:

なる形に述べられる。

この結果及び Griffiths の結果から種々の偏微分方程式系の係数の Pole の order に制限が付加される事は容易に確められるが、然しながらこの結果のみより付加される制限は極めて弱い結果しかもたらさぬ。他方特異 variety の近傍に於ける挙動

と微分方程式の係数の間には当然密接な関係が有る筈であるから，特異varietyに於ける周期函数の挙動については"condition of regularity"以外の知識が必要であると予想される。この点については局所論の段階に於いても我々の知識は未だ不充分である。また議論を大域化する為には，Parameter spaceの大域的な性質(その中には勿論特異varietyの性質も含まれる。)に関する何等かの知識が必要であろうが現在の所立入った議論は行っていない。以上で極めて不充分ではあるが，"特異variety"の近傍での挙動についての考察を打切って，微分方程式系の係数に関して相異なる側面から考察を加える事にする。まず最初に簡単な代数的な演算により，係数は幾つかの微分型式ω_i'sに関しての周期行列$\Omega = (\omega_{ij})$；$\omega_{ij} = \int_{\gamma_j} \omega_i$ ……の行列式を用いて書き表わせる事がわかる。さて行列Ωの係数そのものは周期関数に他ならないが，次式により定義される行列$\mathfrak{X} = (x_{ij})$

$$\mathfrak{X} = \Omega \cdot {}^t I^{-1} \cdot {}^t\Omega \quad : \quad (I : \text{cycles } \gamma_j \text{ に関しての交点行列})$$

の係数をexplictに定める事が出来る(*i)。そして係数x_{ij}はParameter (τ, σ)に関しての代数函数となる。この様にして問題は一応代数的な問題に迄帰着出来るが行列$\mathfrak{X}$の行列式を正確に求める事には成功していない。恐らくその為には特異varietyの大域的な性質を知る事が必要であろう。(これらの結果を述べる為にはかなりの準備を必要とするので割愛させて頂く。詳細は

近刊の拙論参照）尚 $X=\Omega{}^{t}I^{-1}\,{}^{t}\Omega$ を explicit にもとめる事は，一変数の代数函数論に於いて Legendre の関係式の名で知られている関係式の拡張とみなされ基本的な関係式である。

(*2) この過程は楕円曲線 $E(\lambda)$: $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ 上の周期 $W(\lambda)$ の微分方程式：$y^{(2)}=\dfrac{P_1(\lambda)}{\lambda\cdot(\lambda-1)}y^{(1)}+\dfrac{P_2(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)}$ について次の考察を加える事に相当する。まず楕円曲線 $E(\lambda)$ 上の二つの一次独立な一次元 cycle を $\gamma_1(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda)$ とすれば，$W_1(\lambda)=\int_{\gamma_1(\lambda)}\frac{dx}{y}$, $W_2(\lambda)=\int_{\gamma_2(\lambda)}\frac{dx}{y}$ は λ の函数として一次独立である。そして，所謂 Gauss の微分方程式の係数は，

$$\begin{bmatrix} W_1^{(2)}(\lambda) \\ W_2^{(2)}(\lambda) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_1^{(1)}(\lambda), & W_1(\lambda) \\ W_2^{(1)}(\lambda), & W_2(\lambda) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P_1/\lambda(\lambda-1) \\ P_2/\lambda(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

により決定される。

他方，行列 $\widetilde{W}=\begin{bmatrix} W_1^{(1)}(\lambda), & W_1(\lambda) \\ W_2^{(1)}(\lambda), & W_2(\lambda) \end{bmatrix}$, ---- に関しては，次の形の双一次関係式が成立する。

$$\widetilde{W}\cdot\begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{bmatrix}\cdot{}^{t}\widetilde{W}=\begin{bmatrix} 0, & \lambda(\lambda-1) \\ \lambda(\lambda-1), & 0 \end{bmatrix}, \quad ----$$

この関係式より係数は explicit に決定される。

§5 結び

以上が我々の得た結果の主要部であるが，多論周期函数は他の多くの代数的多様体の系列に対しても考察されるべきであろう。その為には我々の得た幾つかの公式を拡張する事がまず必要であるが，更に他の型の問題として，Parameter space の

性質に関して現在我々の知る所は殆んど無いと言って良いであろう。そして代数多様体のmodulusの理論就中その中で我々が最も重要と考えている周期函数の理論はこの点に負う所が大きいと思われる。　（以上）