数理解析研究所講究録
第69巻 1969年 1-15

定数係数のCauchy問題に対する差分近似

航空宇宙技研　　小島 清史

§1、まえがき。

これまでの差分近似の理論は、与えられたCauchy問題があるBanach空間上の強連続な作用素半群として解かれる場合に関するものが大半であった。しかしながら、一般的にいってCauchy問題は、ある解の位相に対して初期条件の位相を適当にとった場合に、well-posednessがいえる場合が多い。そこでここでは、定数係数のCauchy問題に対して、このような観点からの差分近似について考えることにする。

すなわち、いま、定数係数のCauchy問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P(D)u(x,t) = \sum\limits_{|\alpha|\leq p} P_\alpha D^\alpha u(x,t), \quad t>0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

が与えられているとする。ここで

$x=(x_1,\cdots,x_d)\in R^d$, $u(x,t)\in C^N$, P_α は $N\times N$ の定数行列

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$, $|\alpha|=\sum\limits_{j=1}^d \alpha_j$, $D=(D_1,\cdots,D_d)$, $D_j=\partial/i\partial x_j$, 2

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$$

とする。いま（1）式をxに関してFourier変換し、形式的に解けば、

$$\frac{\partial \hat{u}(\xi, t)}{\partial t} = P(\xi)\hat{u}(\xi, t), \qquad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \tag{2}$$

より

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{tP(\xi)}\hat{u}_0(\xi) \tag{3}$$

すなわち、

$$u(x, t) = F^{-1} e^{tP(\xi)} F u_0(x) \tag{4}$$

となる。したがって、（1）の解は、形式的にtranslation invariant operatorで表わされる。ところがtranslation invariant operatorのノルムは、$L^p(1 \leqq p \leqq \infty)$のうちで、$L^2$空间上のopeatorとしてのノルムが最小となるし（Hörmander [3]）、また、ある種の定数係数のCauchy问題に対する差分近似のstabilityもやはり、L^p空间のうちでL^2の場合がもっとも弱い条件で成立することが知られている（Thmée [8]）。よって、ここでは、解の位相を$L^2 = W_0$、初期条件の位相をW_k（xに関する超関数の意味でのk階までの偏導関数がL^2に入るような関数の空间）で与えたとき、well-posedになるような问題について扱かうことにする。

§2. Stability と Well-posedness.

W_k 空間は、$f(x)\in W_k$ に対して

$$\|f\|_k^2 = \int_{R^d} \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha f(x)|^2 dx$$

でノルムを与えれば、Hilbelt 空間となることはよく知られている。さらに $\hat{W}_k = \left\{ \hat{f};\ f\in W_k,\ \|\hat{f}\|_k^2 = \int_{R^d} (1+|\xi|^2)^k |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}$ と W_k とは同等である。ただし、ここで

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{R^d} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$$

である。いま

$$\hat{\mathcal{D}} = \left\{ f;\ \hat{f}\in C_0^\infty \right\}$$

で $\hat{\mathcal{D}}$ を定義すれば、上に述べたことから、$\hat{\mathcal{D}}$ はすべての W_k $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$ の中で dense である。

さて、(1) に対して

$$\begin{cases} v(x,t+\Delta t) = Q(T,\Delta t)v(x,t), \quad v(x,0)=u_0(x) \\ Q(T,\Delta t) = \sum_{|\alpha|\leq q} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} Q_{\alpha,\rho,\sigma} \lambda^\rho h^\sigma T^\alpha \end{cases} \tag{5}$$

の形の差分近似を考える。ここで

$T^\alpha = T_1^{\alpha_1}\cdots\cdots T_d^{\alpha_d}$, $T_i v(x) = v(x_1,\cdots,x_i+h_i,\cdots,x_d)$, $h_i = r_i h$, $\Delta t = \lambda h^p$, $\lambda = \mathrm{const}$, $Q_{\alpha,\rho,\sigma}$ は $N\times N$ の定数行列である。

定義1. (1) が weakly well-posed であるとは、ある $k\geq 0$

が存在して、任意の $T>0$ に対して

$$\sup_{0\leq t\leq T}\ \sup_{\|f\|_k=1}\ \|F^{-1}\exp\{tP(\xi)\}Ff\|_0 < +\infty \qquad (6)$$

となることである。

明らかに、(6)は $\exp\{tP(\xi)\}$ が W_k から L^2 への multiplication operator として有界であることと同値である。さらに (1) が weakly well-posed である必要十分条件が、行列 $P(\xi)$ が Petrowski-Gårding の条件：すなわち

$$\sup_{\xi\in R^d}\ \max_{1\leq i\leq N}\ \mathrm{Re}\{\lambda_i(\xi)\} = \sup_{\xi\in R^d}\Lambda(\xi) < +\infty \qquad (7)$$

を満たすことであることが知られている。ここで $\lambda_i(\xi)$ は行列 $P(\xi)$ の固有値である。このとき、ある定数 $C_1, C_2>0$ に対して

$$|\exp\{tP(\xi)\}| \leq C_1(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}e^{C_2 t} \qquad (8)$$

が成立する。

定義2. (5) が (1) と consistent であるとは、任意の $T>0$ と任意の $f\in\hat{D}$ に対して

$$\left\|\left\{P(D)-\frac{Q(T,\Delta t)-I}{\Delta t}\right\}F^{-1}\exp(tP(\xi))Ff\right\|_0 \to 0 \quad \text{as } \Delta t\to 0 \qquad (9)$$

が、$t\in[0,T]$ に関して一様に成立することである。

(5) が weakly stable であるとは、ある $k\geq 0$ に対して

$$\sup_{\substack{0\leq n\Delta t\leq T\\ \|f\|_k=1}}\|Q(T,\Delta t)^n f\|_0 < +\infty \qquad (10)$$

が成立することである。

いま（5）式を Fourier 変換すれば

$$\hat{v}(\xi, t+\Delta t) = Q(\xi, \Delta t)\hat{v}(\xi, t), \quad Q(\xi, \Delta t) = \sum_{\alpha,\rho,\sigma} Q_{\alpha,\rho,\sigma} \lambda^{\rho} h^{\sigma} e^{i\alpha\cdot\xi r h} \tag{11}$$

となる。ただし、$\alpha\cdot\xi r h = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \xi_j r_j h$, $|\xi_j h_j| \leqq \pi$ とする。

W_k と $\hat{W}_k$ の同等性から（9），(10) はそれぞれ次のことと同値となる。すなわち

任意のコンパクト集合 $K \subset R^d$ 上で一様に

$$P(\xi) - \frac{Q(\xi, \Delta t) - I}{\Delta t} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad \Delta t \to 0. \tag{9'}$$

ある $C_3 > 0$ が存在して、$n\Delta t \leqq T$ のとき

$$|Q(\xi, \Delta t)^n| \leqq C_3 (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}, \quad |\xi_i h_i| \leqq \pi. \tag{10'}$$

定義3．（5）が（1）の解へ収束するとは，任意の $u_0 \in W_k$ に対して，$n_j \Delta_j t \to t$，$\Delta_j t \to 0$ のとき

$$\| \{ F^{-1} \exp\{tP(\xi)\} F - Q(T, \Delta_j t)^{n_j} \} u_0 \| \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty \tag{12}$$

が，$t \in [0,T]$ に関して一様に成立する場合をいう。

このとき Lax の Equivalence Theorem に相当する次の結果がある。

定理 1（Wendroff [10]）

（i）．（5）が（1）と consistent かつ weakly stable

…れば、（1）はweakly well-posedであり、かつ（5）は（…）に収束する。

（1）がweakly well-posed，（5）が（1）とconsistentであるならば、（5）の収束から（5）のweak stabilityが従がう。

§3、Characterization.

Aronson [1] は、（1）がweakly well-posedであること、すなわち（7）を満たす必要十分条件が（1）とconsistentでweakly stableな差分近似が存在することであることを示した。

もし（5）が（1）の解へ収束していれば、t方向の増大度は $\exp\{tP(\xi)\}$ のそれと同じであるから

$$|Q(\xi,\Delta t)^n| \leqq C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} e^{C_4 n\Delta t}, \quad |\xi_i h_i| \leqq \pi \qquad (10'')$$

となるはずである。以下では（10″）を満たす差分近似をweakly stableということにする。

定義4、i)、（1）がcorrectly posedであるとは、（7）式を満たす場合をいう。

ii)、（1）がhyperbolicであるとは、ある定数Cが存在し

て、任意の$\xi \in R^d$に対して

$$\max_{1 \leq i \leq N} |Re\{\lambda_i(\xi)\}| \leqq C \tag{13}$$

が成立する場合をいう。

iii)、(1)がparabolicであるとは、定数$C_1, C_2, \mu > 0$が存在して、任意の$\xi \in R^d$に対して

$$\Lambda(\xi) \leqq C_1 - C_2|\xi|^\mu \tag{14}$$

が成立する場合をいう。

Thmée[9]は、parabolicであるための必要十分条件が、あるkが存在して任意の微分作用素$Q(D)$と任意の$0<\delta<T<+\infty$に対して

$$\sup_{\delta \leq t \leq T} |Q(\xi)\exp\{tP(\xi)\}| \leqq C(Q,\delta,T)(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \tag{15}$$

が成立することであることを示した。ここで$C(Q,\delta,T)$は、正の定数である。

定理2 (Aronson[1], Thmée[9])

i)、(1)がcorrectly posedであるための必要十分条件は、(1)とconsistentかつweakly stableな差分近似が存在することである。

ii)、(1)がhyperbolicであるための必要十分条件は、(1)とconsistentかつweakly stableな差分近似(5)で

$\cdots t+\Delta t) = Q'(T,\Delta t)v(x,t)$, $\quad Q'(T,\Delta t) = \sum_{|\alpha|\leq q}\sum_{\rho}\sum_{\sigma} Q_{\alpha,\rho,\sigma}(-\lambda)^{\rho} h^{\sigma} T^{\alpha}$

$\cdots = -P(D)u$ と consistent かつ weakly stable なものが存在することである。

iii) (1) が parabolic であるための必要十分条件は、(1) と consistent かつ weakly stable な差分近似で次のことを満たすものが存在することである。すなわち、任意の微分作用素 $R(D)$ に対して、それと consistent な差分近似 $S(T,h)$ が少くとも一つ存在して、任意の $0<\delta<T<+\infty$ に対して

$$\sup_{\delta\leq n\Delta t\leq T} \left| S(\xi,h)\, Q(\xi,\Delta t)^{n} \right| \leq C(S,\delta,T)(1+|\xi|^{2})^{\frac{k}{2}} \qquad (16)$$

が成立する。

略証、i), ii), iii) の十分性は

$$Q(T,\Delta t) = \Big(1-\frac{(-1)^{p}}{2^{p+1}d}\sum_{j=1}^{d}(T_j - 2 + T_j^{-1})^{p}\Big)I + \lambda h^{p} P(\delta) \qquad (17)$$

とおき λ を十分小さくとればよい。また iii) については、$S(T,h) = R(\delta)$ とおけばよい。ただしここで、

$$\delta = (\delta_1,\cdots,\delta_d),\quad \delta_j = (T_j - T_j^{-1})/2ih_j$$

である。

i), ii) の必要性は定理 1 の i) を用いればよい。iii) の必要性は次のようにして証明される。すなわち、$R(D) = (-\Delta)^{m}$, $-\Delta = \sum_{j=1}^{d} D_j^{2}$ とおき、定理 1 の i) と $S(\xi,h)\longrightarrow|\xi|^{2m}$ as $h\rightarrow 0$ が R^{d} の任意のコンパクト集合上で一様に成立していることによって

$$S(\xi,h)Q(\xi,\Delta t)^{n} \to |\xi|^{2m}\exp\{tP(\xi)\} \quad \text{as } n\Delta t\to t,\ \Delta t\to 0,\ \delta\leqq t\leqq T \qquad (18)$$

が成立する。したがって (16) より任意の $\xi\in R^{d}$ に対して

$$|\xi|^{2m}\exp\{t\Lambda(\xi)\} \leqq C(m,\delta,T)(1+|\xi|^{2})^{\frac{k}{2}}$$

が成立する。ここで $2m>k$ とし、$t=1$ とおけば、$|\xi|$ が十分大きい所では、

$$\Lambda(\xi) \leqq C(m) - (2m-k)\log|\xi| \qquad (19)$$

が成り立つ。

一方、Seidenberg-Tarski の定理と Puiseux 展開とから $|\xi|$ が十分大きい所では

$$\Lambda(\xi) = C|\xi|^{h} + \text{lower order term} \qquad (20)$$

と表わせる。(19) および (20) より $C<0$, $h>0$ となる。ゆえに (1) は parabolic である。

Thmée [9] は、(1) が parabolic かつ L^{2} から L^{2} への意味で well-posed である場合について上の定理の iii) を証明しているが、それとまったく同様にして iii) は証明される。(1) が L^{2} から L^{2} への意味で、あるいは W_{k} から W_{k} への意味で well-posed となる必要十分条件、および (5) が L^{2} から L^{2} への意味で、あるいは W_{k} から W_{k} への意味で stable となる必要十分条件は、Kreiss [4], Miller and Strang [5] 等によって調べられている。ここでは、ある $k>0$ に対して W_{k} から L^{2} への意味

で，well-posedおよびstableとなるための条件をしらべることにする。以下の二つの定理の証明は，Morton[6]とほとんど同じである。

定理3．（1）がW_kからL^2への意味でwell-posed，すなわち（8）式が成立するための必要十分条件は，ある定数C_3が存在して，任意の$\mathrm{Re}\,z > c_2$なるzに対して

$$|(z-P(\xi))^{-1}| \leqq \frac{C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{\mathrm{Re}\,z - c_2} \tag{21}$$

が成立することである。

証明．必要性は

$$(z-P(\xi))^{-1} = \int_0^\infty e^{-zt}\exp\{tP(\xi)\}\,dt$$

により明らかである，よって十分性を証明すればよい。

簡単のため，$\lambda_i(\xi)$はすべて異なっていると仮定する。すると，

$$\exp\{tP(\xi)\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{tz}\,dz}{(z-P(\xi))} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{Q(z)\,e^{tz}}{\prod_{i=1}^{N}(z-\lambda_i(\xi))}\,dz$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\frac{Q(\lambda_i(\xi))\,e^{t\lambda_i(\xi)}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i(\xi)-\lambda_j(\xi))} = (Q(z)e^{tz})[\lambda_1(\xi),\cdots,\lambda_N(\xi)] \tag{22}$$

となる。ただし，ここで

$$f[z_1] = f(z_1),\quad f[z_1,\cdots,z_k] = (f[z_2,\cdots,z_k]-f[z_1,\cdots,z_{k-1}])/(z_k-z_1)$$

いま、$\lambda_i(\xi)$, $i=1,\cdots,N$ のうちで実部が最大のものを $\lambda_{i_1}(\xi)$ とし，λ_{i_1} から出発して次々と長さ $\delta = C_2 - \mathrm{Re}\,\lambda_i(\xi)$ 以下の線分で結べるすべての固有値 $\lambda_i(\xi)$ を群 S_1 とする。残った固有値に対しても同様の方法で群 $S_2, \cdots$ を作り、λ_i, $i=1,\cdots N$ をいくつかの群に分割する。いま、ある群 S_α に属する固有値が $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ でそのうち実部が最大のものが λ_1，すなわち $\delta_\alpha = C_2 - \mathrm{Re}\lambda_1$ とし、S_α に属さない固有値を $\mu_1,\cdots,\mu_{N-k}$ とすると

$$\delta_\alpha \leqq C_2 - \mathrm{Re}\lambda_i \leqq N\delta_\alpha, \quad |\lambda_i - \lambda_j| \leqq N\delta_\alpha, \quad \varepsilon_{ij} = |\lambda_i - \mu_j| \geqq \delta_\alpha/2N \tag{23}$$

が成立する。

$$\Sigma_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \frac{Q(\lambda_i)e^{t\lambda_i}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{j=1}^{N-k}(\lambda_i - \mu_j)^{-1} = [Q(z)e^{tz}R(z)][\lambda_1, \cdots, \lambda_k], \tag{24}$$

$$R(z) = \prod_{j=1}^{N-k}(z-\mu_j)^{-1}$$

とおき、$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ に関する p 階の差分商を D^p で表わすことにすれば，Leibniz の法則と同様にして

$$\Sigma_\alpha = \sum_{\ell=1}^{3^{k-1}} \left(D^p Q(z) D^q e^{tz} D^r R(z) ;\ p+q+r = k-1 \right) \tag{25}$$

となる。容易に分かるように

$$|D^q e^{tz}| \leqq t^q e^{(C_2-\delta_\alpha)t} \tag{26}$$

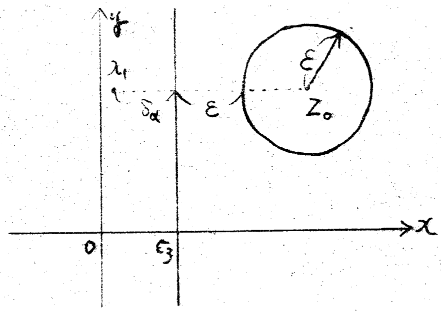
$$\begin{aligned} |D^r R(z)| &= \left| \sum_{\ell=1}^{(N-k)^r} \left(D^{r_1}(z-\mu_1)^{-1} \cdots\cdots D^{r_{N-k}}(z-\mu_{N-k})^{-1};\ r_1 + \cdots + r_{N-k} = r \right) \right| \\ &\leqq N^r \left(\frac{2N}{\delta_\alpha}\right)^r \max_{1\leqq i\leqq k} |R(\lambda_i)| \end{aligned} \tag{27}$$

が成立する。一方 (21) より $|Q(z)| \le C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}(\mathrm{Re}\,z - C_2)^{-1}\prod_{i=1}^{N}(z-\lambda_i)$

であるから、積分路を図のようにとれば

$$|Q^{(m)}(z)| \le (2\pi)^{-1} m! \left|\oint \frac{Q(z)\,dz}{(z-z_0)^{m+1}}\right|$$

$$\le m!\,\varepsilon^{-m} C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\varepsilon^{-1}\prod_{i=1}^{N}(3\varepsilon+\delta_\alpha+|\lambda_1-\lambda_i|) \qquad (28)$$



となる。

いま、$\delta_\alpha>0$ と仮定し, $\varepsilon=\delta_\alpha$, $z=z_0+\zeta$ とおけば

$$Q(z)=\sum_{m=0}^{N-1}B_m\zeta^m$$

したがって (23) (28) より

$$|B_m| \le C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\delta_\alpha^{k-m-1}(N+4)^k\prod_{j=1}^{N-k}(4\delta_\alpha+\varepsilon_{1j})$$

となる。また (23) より $\lambda_1,\cdots\lambda_k$ の convex hull 内では, $|\zeta|\le(N+4)\delta_\alpha$ となる。ゆえに

$$|D^pQ(z)| \le \sum_{m=p}^{N-1} m^p|B_m|\,[(N+4)\delta_\alpha]^{m-p}$$

$$\le C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\delta_\alpha^{k-p-1}(N+4)^{N+k}\prod_{j=1}^{N-k}(4\delta_\alpha+\varepsilon_{1j}) \qquad (29)$$

ところが $\varepsilon_{1j}\le\varepsilon_{ij}+|\lambda_1-\lambda_i|\le\varepsilon_{ij}+N\delta_\alpha$ であるから

$$|R(\lambda_i)|\prod_{j=1}^{N-k}(4\delta_\alpha+\varepsilon_{1j}) = \prod_{j=1}^{N-k}\left(\frac{4\delta_\alpha+\varepsilon_{1j}}{\varepsilon_{ij}}\right)\le[1+2N(N+4)]^{N-k} \qquad (30)$$

(26) (27) (29) (30) から

$$|D^pQ(z)\,D^qe^{tz}\,D^rR(z)|$$

$$\le t^q e^{(C_2-\delta_\alpha)t}N^r\left(\frac{2N}{\delta_\alpha}\right)^r[1+2N(N+4)]^{N-k}C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\delta_\alpha^{k-p-1}(N+4)^{2N}$$

$$\leqq C_3 (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} 2^N (N+4)^{4N-1} (t\delta_\alpha)^g e^{(c_2-\delta_\alpha)t}$$

$$\leqq C_3\, C(g)\, 2^N (N+4)^{4N-1} (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} e^{c_2 t}$$

となる。また $\delta_\alpha = 0$ の場合は、$Q^{(j)}(\lambda_1) = 0$　$j = 0, \cdots, k-2$ となることから

$$|\Sigma_\alpha| = |Q^{(k-1)}(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} R(\lambda_1)| \leqq C_3 (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} (k-1)!\, e^{c_2 t}$$

となる。以上のことから

$$|\exp\{tP(\xi)\}| \leqq C_4 (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} e^{c_2 t},\quad C_4 \text{ は } N \text{ にのみ依存},$$

が、成立することが証明された。$P(\xi)$ の固有値が重複している場合も、上の証明中の差分商を微分で置き変えればよい。

$Q(\xi, \Delta t)$ が $(10')$ を満たしているとき、$Q'(\xi, \Delta t) = e^{-c_4 \Delta t} Q(\xi, \Delta t)$ とおけば $|Q'(\xi, \Delta t)^n| \leqq C_3 (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}},\ n = 0, 1, 2, \cdots$ を満たすから簡単のためにstableとなるための条件を次の形で述べておくことにする。

定理4．$Q(\xi, \Delta t)$ がある定数 $C_1, k > 0$ に対して、

$$\sup_n |Q(\xi, \Delta t)^n| \leqq C_1 (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \qquad \cdots\cdots$$

を満たすための必要十分条件は、ある定数 $C_2 > 0$ が存在して任意の $|z| > 1$ なる z に対して

$$|(z - Q(\xi, \Delta t))^{-1}| \leqq \frac{C_2 (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{|z| - 1}$$

を満たすことである。

文 献

[1]. D. G. Aronson, On the correctness of partial differential operators and the von Neumann condition, Proc. Amer. Math. Soc., 14(1963), pp. 948-955.

[2]. A. Friedman, Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

[3]. L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math., 104(1960), pp. 93-140.

[4], H. O. Kreiss, Über die Stabilitätsdefinition für Differenzengleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren, Nordisk Tidskr. Informations-Behandling, 2(1962), pp. 153-181.

[5]. J. Miller and G. Strang, Matrix theorems for partial differential equations, Math. Scand., 18(1966), pp. 113-123.

[6]. K. W. Morton, On a matrix theorem due to Kreiss, Comm, Pure Appl. Math., 18(1965), pp. 375-380.

[7]. R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference methods for initial-value problems, Interscience, New York, 1967.

[8]. V. Thomée, Stability of difference schemes in the maximum-norm, J. Differential Equations, 1(1965), pp. 273-292.

[9]. V. Thomée, Parabolic difference operators, Math. Scand., 19 (1966), pp. 77-107.

[10], B. Wendroff, Well-posed problems and stable difference operators, SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968) pp. 71-82.