

(0, A)-semigroups について

早大 教育 大 春 博之助

§1.  $X$  を Banach 空間とし, 以下の条件を満足するような  $X$  上の有界線型作用素の one parameter family  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  を考へる:

$$(1) \quad T(0) = I, \quad T(t)T(s) = T(t+s) \quad t, s \geq 0;$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} T(t)x = T(t_0)x, \quad t_0 > 0, x \in X.$$

このような族  $\{T(t)\}$  を semigroup と呼ぶ。そして

$$(3) \quad A_0 x = \lim_{h \rightarrow 0+} \{T(h)x - x\}/h$$

で定義されるような作用素を  $\{T(t)\}$  の infinitesimal generator (i.g.) と呼ぶ。定義域  $D(A_0)$  は (3) の右辺の極限が存在するような  $x$  の集合である。また

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|T(t)\|$$

は常に  $< +\infty$  の値として存在し, これを  $\{T(t)\}$  の type と呼ぶ。

semigroup  $\{T(t)\}$  が class (A) に属するとは,  $X_0 = \bigcup_{t > 0} T(t)[X]$  が  $X$  で稠密であり, 実数  $\omega_1 > \omega_0$  が存在して, 実部が  $\omega_1$  より大きい各  $\lambda$

に対して以下の条件を満足するような有界線形作用素  $R(\lambda)$  が存在することをいう:

$$\langle a \rangle \quad R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad x \in X_0;$$

$$\langle b \rangle \quad \sup\{\|R(\lambda)\| : \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1\} < +\infty;$$

$$\langle c \rangle \quad s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda) = I.$$

このときさらに

$$\langle d_0 \rangle \quad \int_0^1 \|T(t)x\| \, dt < +\infty, \quad x \in X$$

が成立するならば,  $\{T(t)\}$  は class  $(0, A)$  に属するといひ, また  $\langle d_0 \rangle$

の代わりに

$$\langle d_1 \rangle \quad \int_0^1 \|T(t)\| \, dt < +\infty$$

が成立するとき  $\{T(t)\}$  は class  $(1, A)$  に属するといひ, semigroup  $\{T(t)\}$

が以上の classes のいすれかに属するならば, その i.g.  $A_0$  は

densely defined, pre-closed である ( $\{T(t)\}$  が class  $(C_0)$  に属するとき

には  $A_0$  は closed). その閉包  $A$  は complete infinitesimal generator

(c.i.g.) と呼ばれる. もし  $A$  が  $(A)$ -semigroup の c.i.g. であるならば

は  $\rho(A) \supset \{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1\}$  で各  $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1$  に対して  $R(\lambda) = R(\lambda; A)$  となる.

ここに  $\rho(A)$  は  $A$  の resolvent set,  $R(\lambda; A)$  は  $A$  の  $\lambda$  における resolvent

operator を表わすものとする.  $A$  が  $(0, A)$  もしくは  $(1, A)$  class の

semigroup の c.i.g. であるときには  $\omega_1$  は  $> \omega_0$  なる任意の数でよい.

以上についての詳細しい議論は Hille-Phillips [1] にのべられていゝ.

最近 H. Sunouchi [2] は  $R^d$  で定義された線素ベクトル値関数の  
つくる  $L^2$ -空間における初期値問題

$$(CP) \quad (d/dt)u = P(D)u, \quad t > 0; \quad u(0, \xi) = x(\xi)$$

の Semigroup characterization を取扱っている。ここに  $P(D)$  は定  
数行列係数をもつ、 $\xi \in R^d$  に関する偏微分作用素である。この  
結果では、(CP) が mildly correctly posed であるとき自然に  
class (0, A) 並びに class (A) の semigroups が導かれる。一方 R.S.  
Phillips [4] は class (C\_0) と class (0, A) の semigroups の性質に依りて  
abstract Cauchy problem についての 2 つの formulations を与えて居  
り [2] の諸結果との間の関連を考へることが出来る。この報告  
では、主に (0, A)-semigroups についてその生成問題、 $C_0$ -群列  
の収束性の問題について得られる結果をのべる。

§2. 本節では semigroups の生成問題について考へる。

閉作用素  $A$  に対して次の条件を導入する:

$$(i)' \quad D(A) \text{ は } X \text{ で dense で, } \rho(A) \supset \{\lambda: \operatorname{Re}(\lambda) > 0\};$$

$$(ii)' \quad \|R(\lambda; A)\| = O(1/|\lambda|) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty;$$

$$(iii)' \quad \sup \{\|R(\lambda; A)\|: \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} < +\infty;$$

(iv)' 各  $x \in D(A^2)$ ,  $0 < \delta' < \delta$  とするような任意の対  $\delta', \delta$  と任意の

$\varepsilon > 0$  に対して  $\lambda_0 \equiv \lambda_0(x; \varepsilon, \delta, \delta')$  が存在して

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq \{\varphi(\delta') + \varepsilon\} \|x\|, \quad \lambda > \lambda_0, \quad n \geq \lambda \delta,$$

ここで  $\varphi$  は、ある negative type の非負値、非増加函数である。

(iv)' の形の条件は W. Feller [3] によつて導かれた。そして (A)-Semigroups の Feller type の生成定理として次の Phillips の定理 [1; §12.5, Theorem 12.5.1] がよく知られている。

定理 P. 閉作用素  $A$  が negative type の (A)-semigroup  $\{T(t)\}$  の c.i.g. であるための必要十分条件は、 $A$  に対して (i)'-(iv)' が満足されることである。またこのとき各  $t > 0$  に対して  $\|T(t)\| \leq \varphi(t)$ 。

この節ではこの定理を、同じく Feller type であり一般の形にして、(A), (0, A), (1, A), (C<sub>0</sub>) の各 class の生成定理を単一の方法で導き出すことを考へる。

今閉作用素  $A$  に対して次の条件を導入する。

(i) 定義域  $D(A)$  は  $X$  で dense で、実数  $\omega$  が存在して

$$P(A) \supset \{\lambda: \operatorname{Re}(\lambda) > \omega\}.$$

(ii)  $\|R(\lambda; A)\| = O(1/\lambda)$  as  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

(iii) 非負整数  $k$  が存在して、任意の  $x \in D(A^k)$  と任意の  $T > 0$  に対して集合  $\{\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\|: 0 \leq n/\lambda \leq T; \lambda > \omega\}$  は  $X$  で有界。

(iv) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して正数  $M_\varepsilon$  が存在して、各  $x \in D(A^k)$  に対して  $\lambda_0 \equiv \lambda_0(\varepsilon, x)$  が対応して

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq M_\varepsilon \|x\|, \quad \varepsilon \leq n/\lambda \leq 1/\varepsilon, \quad \lambda > \lambda_0.$$

上記の条件 (i)-(iv) を満たす閉作用素の族を  $\mathcal{O}_\omega^{(k)}$  で表わす。すると次の結果を得る。

定理 2.1.  $\mathcal{O}_\omega^{(K)}$  に属する閉作用素  $A$  は, 次の条件を満足する  
よって有界線形作用素のつくる一意な semigroup  $\{T(t)\}$  を生成する:

(a) 各  $x \in D(A^k)$  と任意の  $t > 0$  に対して,  $j \rightarrow \infty$  のとき  $n_j/\lambda_j \rightarrow t$ ,  
 $n_j \rightarrow \infty$  ならば,

$$T(t)x = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j^{n_j} R(\lambda_j; A)^{n_j} x;$$

(b) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して正数  $M_\varepsilon$  が存在して,

$$\|T(t)\| \leq M_\varepsilon, \quad t \in [\varepsilon, 1/\varepsilon];$$

(c)  $A^p T(t)x = T(t)A^p x, \quad x \in D(A^p), p \geq 1;$

(d) 各  $x \in D(A^k)$  に対して  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$ . また各  $x \in D(A^{k+1})$   
に対して,

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax ds = \int_0^t AT(s)x ds, \quad t > 0.$$

従って  $A_0 \in \{T(t)\}$  の l.g. とおくと  $D(A^{k+1}) \subset D(A_0)$ .

(e)  $X_0 = \bigcup_{t>0} T(t)[X]$  とし  $\omega_0 \in \{T(t)\}$  の type とおす. おすとあ  
る  $\omega_1 > \omega_0$  が存在して, 各  $x \in X_0$  と  $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1$  なる  $\lambda$  に対して,

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

が well defined である. さしに  $X_0$  は  $X$  で dense であり,

$$R(\lambda)x = R(\lambda; A)x, \quad x \in X_0, \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1.$$

この定理の証明の主な段階は以下にのべる補題を証明する  
ことにある:  $r > \max\{0, \omega\}$  を  $1 >$  とし,  $n = 2^m r$  とおく. 更に,

elements を簡単にするために

$$T(n;t) \equiv r_n^{[r_n t]} R(r_n; A)^{[r_n t]} = (I - r_n^{-1} A)^{-[r_n t]}$$

すなわち、今  $t > 0$  を 1 に定め任意の  $x \in D(A^{2k+2})$  をとる。そして  $T(n+1;t)x - T(n;t)x$  を、

$$\left\{ \left( I - \frac{1}{r_{n+1}} A \right)^{-[2r_n t]} x - \left( I - \frac{1}{r_{n+1}} A \right)^{-2[r_n t]} x \right\} + \left\{ \left( I - \frac{1}{r_{n+1}} A \right)^{-2[r_n t]} x - \left( I - \frac{1}{r_n} A \right)^{-[r_n t]} x \right\}$$

変形して各項を評価すると、

$$\| T(n+1;t)x - T(n;t)x \| = O(1/r_{n+1})$$

あることを証明することができる。ここで order  $O$  は  $t$  の任意の compact subinterval 上で一様となる。そこで (ii) と (iv) を使ってこの結果を得る。

補題 2.1.  $A \in \mathcal{O}_{\omega}^{(k)}$  とする。すると各  $x \in D(A^k)$  と  $t > 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(n;t)x$  が存在する。ここでこの収束は  $(0, \infty)$  の任意の compact subinterval 上で一様である。

そこで  $T_0(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(n;t)x$  とおいて、(iv) によって各  $t > 0$  に対して存在する  $T_0(t)$  の continuous extension を  $T(t)$  とするのである。

ここで  $A$  を type  $\omega_0$  の  $(A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. とし、 $\omega_1 (> \omega_0)$  を  $\langle \lambda \rangle$

を成立させる十分大きな実数として  $T_1(t) \equiv e^{-\omega_1 t} T(t)$  とおく。

すると equivalent semigroup  $\{T_1(t)\}$  は negative type の  $(A)$ -semigroup と

$A_1 = A - \omega_1$  はその c.l.g. である。そこで各  $t > 0$  に対して  $\varphi(t) \equiv$

$\| T_1(t+\sigma) \|; \sigma \geq 0$  とおく。すると  $\varphi$  は非負値をとる非増加

は negative type の函数となり, 各  $t > 0$  に對して  $\|T(t)\| \leq \varphi(t)$  である. 従つて c.g. とその resolvents に関するよく知られた評価 ([1; §12.5] もしくは [3]) によつて  $A_1$  に對して條件 (i)-(iv) が成立していることがわかる. 條件 (iii) は次の形で (iii) と解釋している.

補題 2.2.  $\sup\{\|R(\lambda; A)\| : \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1\} < +\infty$  ならば (iii) が  $k=2$  の場合に満足される.

証明には [1; Lemma 11.5.2, p345] を使う. そこで條件 (i), (ii), (iii), (iv) を満足する閉作用素の族を  $\mathcal{O}_\varphi(A)$  で表わす. すると定理 2.1 と上にのべた注意から次の形で定理 P を導き出すことができる.

定理 2.2. 閉作用素  $A$  が  $(A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. であるための必要十分条件は  $A$  が  $\mathcal{O}_\varphi(A)$  に属することである.

$A$  を type  $\omega_0$  の  $(A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. とする. すると上にのべた注意からある  $\omega_1 > \omega_0$  に對して  $A \in \mathcal{O}_{\varphi_{\omega_1}}^{(2)}$  となる.

次に, 條件 (i), (ii) と  $k=2$  の場合の條件 (iii), そして (iv) のかわりに次の条件を満足する閉作用素の族を  $\mathcal{O}_\varphi(0, A)$  で表わす:

(iv)<sub>0</sub>. 各  $x \in X$  に對して  $(0, \infty)$  上で upper semicontinuous な函数  $f(t, x)$  で

次の条件をみたすものが存在する.

(a)  $(0, T)$  の形の任意の有界区間で summable;

(b) 任意の  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \beta < \gamma$  となる任意の  $\beta, \gamma$  に對して  $\lambda_0 \equiv$

$\lambda_0(x; \beta, \gamma, \varepsilon)$  が対応して,

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq f(m/\lambda; x) + \varepsilon \quad \beta \leq m/\lambda \leq \gamma, \lambda > \lambda_0.$$

(i), (ii) と  $k=2$  の場合の (iii) の下は, (iv)<sub>0</sub> から次のような条件が導き出される:

(iv)' 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し正数  $M_\varepsilon$  が存在して

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n\| \leq M_\varepsilon, \quad \varepsilon \leq m/\lambda \leq 1/\varepsilon, \lambda > \omega, \omega > 0.$$

従って  $A \in \mathcal{O}_f(0, A)$  ならば定理 2.1 によつて (a) - (e) を満たす semigroup  $\{T(t)\}$  が存在し, 補題 2.1 と合わせると次の結果を得る: 任意の  $t > 0$  に対し  $t_j \rightarrow \infty$  のとき  $\lambda_j \rightarrow \infty, m_j/\lambda_j \rightarrow t$  ならば

$$(*) \quad T(t) = s\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j^{m_j} R(\lambda_j; A)^{m_j}, \quad t > 0.$$

そこで  $f$  の upper semicontinuity と上の結果から, 各  $x \in X$  に対し  $\|T(t)x\| \leq f(t, x)$  となるから  $\{T(t)\}$  は class  $(0, A)$  に属する.

かくして次の形の  $(0, A)$ -semigroups の生成定理を得る.

定理 2.3. 閉作用素  $A$  が  $(0, A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. であるための必要十分条件は  $A \in \mathcal{O}_f(0, A)$  となることである. またこのとき各  $x \in X$  と  $t > 0$  に対し  $\|T(t)x\| \leq f(t, x)$  となる.

上の定理で  $\mathcal{O}_f(0, A)$  の条件 (iii) <sub>$k=2$</sub>  を (iii)' とおきかえてもよい.  $A$  を type  $\omega_0$  の  $(0, A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. であるとする. すると任意の  $x \in D(A)$  に対し  $T(t)x$  は  $t \geq 0$  で連続である.



従って,

$$R(\lambda: A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} T(t) x dt, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0, x \in D(A)$$

を評価することによつて,  $A$  に対して条件 (iii) が  $k=1$  の場合に成立することかわかる. 従つて  $A \in \mathcal{O}_\omega^{(1)}$  である.

次に (iv)<sub>0</sub> の代りに次の形の条件を導入する.

(iv)<sub>1</sub>  $(0, \infty)$  上で upper semicontinuous な函数  $f(t)$  で次の条件をみたすものが存在する:

(a)<sub>1</sub>  $(0, T)$  の形の任意の有界区間で summable.

(b)<sub>1</sub> 任意の  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  と  $0 < \beta < \gamma$  とする任意の対  $\beta, \gamma$  に対して  $\lambda_0 \equiv \lambda_0(x; \beta, \gamma, \varepsilon)$  が存在して,

$$\|\lambda^n R(\lambda: A)^n x\| \leq f(n/\lambda) \|x\| + \varepsilon, \quad \beta \leq n/\lambda \leq \gamma, \lambda > \lambda_0.$$

そこで (i), (ii), (iii)<sub>k=2</sub>, (iv)<sub>1</sub> を満足する閉作用素の族を  $\mathcal{O}_\omega^{(1, A)}$  で表わす. 今  $A \in \mathcal{O}_\omega^{(1, A)}$  であるとすると, 前の議論から  $A$  は  $(0, A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. であり, 40 条 (\*) と  $f$  の upper semicontinuity から任意の  $t > 0$  に対して  $\|T(t)\| \leq f(t)$  となる. 従つて  $(1, A)$ -semigroups について次の生成定理が得られる.

定理 2.4. 閉作用素  $A$  が  $(1, A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. であるための必要十分条件は  $A \in \mathcal{O}_\omega^{(1, A)}$  となることである. またこのとき各  $t > 0$  に対して  $\|T(t)\| \leq f(t)$  である.

従つてまた  $A$  が type  $\omega_0$  の  $(1, A)$ -semigroup の c.l.g. であるならば

は  $A \in \mathcal{O}_f^{\omega_0}$  である. 最後に,  $(C_0)$ -semigroup の生成定理は次のようにのべられる.

定理 2.5.  $A$  が  $(C_0)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.g. であるための必要十分条件は, ある数  $\omega$  に対して  $A \in \mathcal{O}_f^{\omega}$  となることである.

33. 本節では半群の収束性について述べる. 最近 I. Miyadera [5] は  $(1, A)$ -semigroups の作る列の収束性を取扱ひ, 半群の perturbation theory を論じている:

$\{T_n(t) : t \geq 0\}_{n=1,2,3,\dots}$  を  $(1, A)$ -semigroups の列として,  $A_n$  で各  $\{T_n(t)\}$  の c.l.g. を表わす. 今この列に対して次のような条件を仮定する.

(S)<sub>1</sub> 実数  $\gamma$  が存在して,

$$\sup_n \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \|T_n(t)\| dt < +\infty.$$

(C) 実部が  $\gamma$  より大きい数  $\lambda_0$  が存在して,

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda_0; A_n) = R(\lambda_0)$$

が有界線型作用素として存在する.

このとき I. Miyadera は次の結果を得ている.

定理 M. 条件 (S)<sub>1</sub> と (C) の下には次の 2 つの条件を置く:

(M1) 正数  $K$  が存在して,

$$\|\lambda R(\lambda; A_n)\| \leq K, \quad \lambda > \gamma, n=1,2,3,\dots$$

(M2)  $R(\lambda_0)[X]$  は  $X$  で dense.

すると次のことが成立する.

(a) 閉作用素  $A$  が存在して, 或る  $(1, A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. となり,  $R(\lambda_0; A) = R(\lambda_0)$ .

(b)  $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) = T(t), \quad t > 0,$

ここで収束は  $(0, \infty)$  の任意の compact subinterval で一様である.

この節ではこの定理を  $(0, A)$ -semigroups の場合に拡張することを考える:

$\{T_n(t); t \geq 0\}_{n=1,2,3,\dots}$  を  $(0, A)$ -semigroups の列として,  $(S)_1$  の代わり

りに次のような条件を考える:

(S) 実数  $\gamma$  が存在して

$$\sup_n \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \|T_n(t)x\| dt < +\infty, \quad x \in X.$$

前と同様にして  $A_n$  で各  $\{T_n(t)\}$  の c.l.g. を表わすものとする. すると各  $n$  に対して  $\rho(A_n) \cap \{\lambda; \operatorname{Re}(\lambda) > \gamma\}$  であることを証明することができる. この節の主定理として次の結果を得る.

定理 3.1. 条件 (S) の下に, 閉作用素  $A$  が存在して,

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \|T(t)x\| dt < +\infty, \quad x \in X,$$

となる或る  $(0, A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. となり, 収束 (b) が成立するための十分条件は, (C), (M1), (M2) と次の条件が満足

されることがある:

(B) 任意の  $\varepsilon > 0$  と各  $x \in X$  に対して

$$\sup_n \int_{\varepsilon}^{\xi} \|T_n(t)x\| dt = O(|\xi - \varepsilon|),$$

ここで order  $O$  は  $\xi, \xi' \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$  に関して一様である。

また, このとき  $R(\lambda_0; A) = R(\lambda_0)$  となる。

例えば, (B) は下のいずれの条件から直接に導かれる。

(B)<sub>1</sub> 任意の  $\varepsilon > 0$  と任意の  $x \in X$  に対して

$$\text{ess. sup}_{\varepsilon \leq t \leq 1/\varepsilon} \sup_n e^{-\delta t} \|T_n(t)x\| < +\infty.$$

(B)<sub>2</sub> 各  $x \in X$  に対して  $T_n(t)x$  は  $(0, \infty)$  で *locally uniformly bounded*.

ここで  $X$ -値関数  $f(t)$  が  $(0, \infty)$  で *locally bounded* であるとは, 各

$t \in (0, \infty)$  に対して正数  $\delta > 0$  がとれて,  $[t-\delta, t+\delta] \subset (0, \infty)$ ,

$\sup \{ \|f(s)\| : t-\delta \leq s \leq t+\delta \} < +\infty$  となることをいう。

定理 M のように (S)<sub>1</sub> を仮定したときには条件 (B) は不要になる。

何故ならばこのときには次のよく知られた lemma で  $\varphi(t) =$

$\|T_n(t)\|$  とおくことにより, (B)<sub>2</sub> が満足されてしまうからである。

ある:

補題 (Hille-Phillips).  $\varphi(t) (> 0)$  は  $(0, \infty)$  で可測な関数とし,

$\varphi(t+s) \leq \varphi(t)\varphi(s)$  で  $\int_0^\infty e^{-\delta t} \varphi(t) dt \leq M$  を満足してゐるものとする。

すると各  $t > 0$  に対して

$$\varphi(t) \leq M^2 e^{\delta t} / t^2.$$

従って定理 3.1 から定理 M を次のようにして導くことができる:  
 今 (S)<sub>1</sub>, (C), (M1), (M2) が満たされているものとすると,  
 定理 3.1 から class (0, A) の limit semigroup  $\{T(t)\}$  を見出すこと  
 が出来る.  $\|T(t)\|$  は  $t > 0$  に對して可測であるから,

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \|T(t)\| dt < +\infty$$

であることを示せば十分である. ここから命題 (b) から

$\|T(t)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t)\|$  となるから Fatou の補題によつて  
 $e^{-\delta t} \|T(t)\|$  が  $(0, \infty)$  上で summable であることを示すことが  
 できる.

次に定理 3.1 のいくつかの variations を考える. 主要 lemmas  
 をいくつか用ゐる.

補題 3.1. (S) と (C) と次の条件を仮定する:

$$(K) \quad s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda; A_n) = I, \quad \text{uniformly in } n.$$

すると以下のことが成立する:

(a) 正数  $\delta$  が存在して,  $\|R(\lambda; A_n)\| \leq L, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \delta; n=1, 2, 3, \dots$

(b) (M1) が満たされる.

(c) 実部が  $\delta$  より大きい任意の  $\lambda$  に對して

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda; A_n) = R(\lambda)$$

が有界線型作用素として存在する.

(d) 閉作用素  $A$  が存在して,  $\operatorname{Re}(\lambda) > \delta$  に對して  $R(\lambda) = R(\lambda; A)$  と

なる。さらに、 $s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda) = I$ 。(従って  $D(A)$  は  $X$  で稠密)。

(a), (b) の証明には、各  $\operatorname{Re}(\lambda) > \delta$  と各  $x \in X$  に対して

$$R(\lambda; A_n)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T_n(t)x dt$$

であることを注意して条件(S)と共鳴定理を使う。(c), (d) の証明には T. Kato [6; Theorem IX 2.17, p503] の結果を使う。

補題 3.2. (S) と (C) の下では (M1)+(M2) と (K) とはたがいに同等である。

(M1)+(M2)  $\Rightarrow$  (K) については、まず  $R(\lambda_0)[X]$  の任意の元  $x$  について  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_n \| \lambda R(\lambda; A_n)x - x \| = 0$  をいうことが出来るから (M2) を使って (K) を得る。この補題により我々は定理 3.1 を次の形に書き直すことができる:

定理 3.2. 条件(S)の下に、定理 3.1 の (a), (b) が成立するための十分条件は、(C), (K), (B) が満たされていることである。

この結果は上に引用した T. Kato の定理 [6; Th. IX 2.17] の  $(0, A)$ -Semigroups の場合への直接の拡張になっている。

次に、inversion formula に関する Phillips の定理 [1; Th. 6.3.3, p221] の証明を見直すことによつて次の補題を得る。

補題 3.3.  $\eta > 0$  に対して  $f_p(\eta; x) \equiv e^{-\eta} \| T_p(\eta)x \|$  とおく。すると条件(S)と(B)の下に次のことが成立する:

$$(a) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} k(\xi, \eta; \lambda) f_p(\eta; x) d\eta = f_p(\xi; x), \quad \xi > 0.$$

ここで,  $K(\xi; \eta; \lambda) = e^{-\lambda(\xi+\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^2 \xi)^{n+1} \eta^n / n!(n+1)!$ .

(b) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\sup_{\lambda > 0} \sup_{\varepsilon \leq \xi \leq 1/\varepsilon} \int_0^{\infty} K(\xi, \eta; \lambda) f_p(\eta) d\eta < +\infty.$$

補題 3.3 を使って更に 1 つの補題を得る. この補題が容易に分るようには各条件 (S) の下では (B) と (B)<sub>2</sub> は互いに同値となる.

補題 3.4. (S) と (B) を仮定する. あると函数

$$\psi(t) \equiv \sup_{\sigma \geq 0} \sup_n \|e^{-\gamma'(t+\sigma)} T_n(t+\sigma)\|$$

が各  $t > 0$  に対して有限となるような実数  $\gamma'$  が存在する. かくいえば, このとき  $\psi(t)$  は非負値をとり, 非増加で各  $t > 0$  に対して  $e^{-\gamma' t} \|T_n(t)\| \leq \psi(t)$  となるような negative type の函数である.

そこで (B) の代わりに次の条件を考える.

(B)<sub>3</sub> 非負値, 非増加で任意の  $n$  と各  $t > 0$  に対して  $\|T_n(t)\| \leq \psi(t) (< +\infty)$  となるような negative type の函数  $\psi(t)$  が存在する.

今  $\{T_n(t): t \geq 0\}_{n=1,2,3,\dots}$  を初めにのべて, (S) と (B) を満足するよいうな (0, A)-semigroups の列とすると, 補題 3.4 によつて十分大きな  $\gamma_0$  をとれば equivalent (0, A)-semigroups の列  $\{e^{-\gamma_0 t} T_n(t): t \geq 0\}_n$  で以下にのべる条件と (B)<sub>3</sub> を満足するものを考えることができる:

$$(S') \quad \sup_n \int_0^{\infty} \|T_n(t)x\| dt < +\infty, \quad x \in X.$$

従ってまた定理3.1を次のような形にのべかえることができる。

定理3.3.  $(S)$ の下に、閉作用素  $A$  が存在して、negative type のある  $(0, A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. となり、これに対して4条系 (b) が成立するための十分条件は、 $(C), (K), (B)_3$  が成立することである。

かくして定理3.1を証明することは定理3.3を証明することに帰着される。 $(S), (C), (K)$  を与定すると補題3.1から densely defined な閉作用素  $A$  が存在して各  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  に對して

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda; A_n) = R(\lambda; A)$$

となる。そして各  $\{T_n(t)\}$  が  $(0, A)$ -semigroup であることと  $(B)_3$  から  $A$  はある  $(A)$ -semigroup  $\{T(t)\}$  の c.l.g. であり、これに對して4条系 (b) が成立することが導びかれる。そこで各  $\|T(t)x\|$  の可積分性をいうためには、定理Mを導びき出したように、Fatouの補題を用いればよい。

### 参考文献

- [1] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, A.M.S. Colloq., Vol 31, (1957).
- [2] H. Sunouchi, *Semi-group characterization of Cauchy problems*, to appear.



- [3] W. Feller, On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, *Ann. of Math.*, 58(1), (1953), 166-174.
- [4] R. S. Phillips, A note on the abstract Cauchy problem, *Proc. N. A. S.* 40, (1954), 244-248.
- [5] I. Miyadera, Perturbation theory for semi-groups of operators, *数学* 20(1), (1968), 14-25.
- [6] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, (1966).
- [7] S. Oharu, On the convergence of semigroups of operators, *Proc. Japan Acad.*, 42(8), (1966), 880-884.
- [8] ———, Remarks on the generation of semigroups of bounded linear operators, to appear.
- [9] H. Sunouchi and S. Oharu, On the convergence of  $(0, A)$ -semigroups, to appear.