数理解析研究所講究録
第 70 巻 1969 年 145-150

高速気体粒子を含む流れの気体論模型

東大 宇宙研 小口伯郎

気体粒子の平均速度が熱速度に比較して非常に大きい場合気体粒子の流れは beam-like と考えられる。そのような流れが物体などと干渉するとき，物体から反射する粒子あるいはそれらと衝突した経験をもつ粒子は一様流の beam-like 流れとはかなり異なった分布関数で記述されよう。この種の流れのもっとも典形的ものとして高マッハ数の流れに現われる衝撃波がある。分布関数が平衡分布よりあまり大きくずれてない場合には，いわゆる B-G-K 模型[1]はボルツマン方程式に対するよい近似を与えることが知られている。しかし上に紹介した非常な高速気体粒子を含む流れのように分布関数が平衡分布より大きくずれる場合その妥当性は必ずしも保障されていない。実際 Liepmann[2][3]らがもとめた B-G-K 式の高マッハ数における衝撃波の構造の数値解は速度・温度プロフィルの非対称性を示し，従来知られている Mott-Smith の解析結果および実験事実との差異を認められた。

B-G-K模型方程式は種々実際の応用に便利であるという事実から，最近その適用性を越えて取り扱われているが，ここでは高速気体粒子を含む流れに適用する場合，その非平衡性を考えに入れる工夫が試みられた．簡単のため一次元定常の問題（例えば強い衝撃波の構造）を対照に取り扱うことにする．

物体との衝突を経験しない一様流の気体粒子はbeam-likeであるとすると　分布関数はデルタ関数δを用いて

$$n_1\delta(c_x=u,\ c_y=0,\ c_z=0)$$

と表わすことができる．ここでn_1はbeam-like moleculeの数密度とする．衝突経験分子の分布関数をFとすると分布関数fは

$$f=F+n_1\delta \qquad (1)$$

と書くことができる．

分布関数が式（）によって表わされるとき，ボルツマン方程式の衝突項

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{coll.}=\iiint(f'f_1'-ff_1)g\,b\,db\,d\epsilon\,d\mathbf{c}_1 \qquad (2)$$

を，B-G-K衝突模型導出に類似の考えを適用して簡単化することを試みよう．先づ損失項，すなわち

$$L = \iiint f f_1 g b\, db\, d\epsilon\, d\mathbf{c}$$

について cross collision によるものは

$$n_1 \delta \iiint F_1 g b\, db\, d\epsilon\, d\mathbf{c} \qquad (3)$$

および $$n_1 F \iiint \delta_1 g b\, db\, d\epsilon\, d\mathbf{c} \qquad (4)$$

である。ここで相対速度 g は beam-like 粒子の平均速度 U が熱速度 $\bar{c}$ と比較して充分大きいということから

$$g \approx U$$

と与えられる。なお衝突断面が速度と関係ないという簡単な近似を導入すると式 (3), (4) はそれぞれ

$$n_1 \delta \iiint F_1 g b\, db\, d\epsilon\, d\mathbf{c}_1 \approx n_1 n_2 U Q \delta \qquad (5)$$

$$n_1 F \iiint \delta_1 g b\, db\, d\epsilon\, d\mathbf{c}_1 \approx n_1 U Q F \qquad (6)$$

のような関係で表わすことができる。

式 (5) は beam-like 粒子の損失項を表わすが，beam-like 粒子については生成がないと仮定すると，その分布について

$$c_x \frac{\partial n_1 \delta}{\partial x} = - n_1 n_2 U Q \delta \qquad (7)$$

を得る．non-beam-like 粒子の分布 F に関しては平衡分布からのずれが大きくないとして従来の B-G-K 模型が適用されるとする．以上の事項を基に全分布関数 $f = F + n_1\delta$ について Boltzmann 方程式を類似するものとして

$$c_x \frac{\partial (F + n_1 \delta)}{\partial x} = \nu (F_0 - F) \qquad (8)$$

を得る．ここで

$$\nu = \nu_s + n_1 u Q$$

で，ν_s は non-beam-like 粒子の self collision frequency．

なお

$$F_0 = n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT_2}(v - u_2 i)^2\right]$$

で，n_2, T_2, u_2 は non-beam-like 粒子の数密度，温度，平均速度である．

式(8)は従来の B-G-K 模型式の一つの拡張された形となっているが未知数 n_1 を含む．この未知数は式(7)より

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} = -n_1 n_2 Q$$

であるから，

$$n_1 = n_{10}\, e^{-\int_{-\infty}^{x} n_2 Q\, dx'} \qquad (9)$$

と与えられる．ここで n_{10} は無限上流の数密度．

結局 式(9)を補足して模型方程式(8)を解くことが可能になる。たとえば衝撃波の問題については式(8)の積分は容易に次の形で得られる。

$$F(c_x>0)=\int_{-\infty}^{\xi}\frac{F_0}{c_x}\exp\frac{\xi'-\xi}{c_x}d\xi'+\int_{-\infty}^{\xi}\frac{n_1 n_2 Q\delta}{\nu}\exp\frac{\xi'-\xi}{u}d\xi'$$

$$F(c_x<0)=\int_{\infty}^{\xi}\frac{F_0}{c_x}\exp\frac{\xi'-\xi}{c_x}d\xi'+\int_{\infty}^{\xi}\frac{n_1 n_2 Q\delta}{\nu}\exp\frac{\xi'-\xi}{u}d\xi'$$

ここで

$$\xi=\int_0^x \nu\,dx'=\int_0^x(\nu_s+n_1 u Q)\,dx' \qquad (10)$$

実際の数値計算は現在進行中で、その結果は得られていないが最後に示した関係によって明らかなように従来のB-G-K模型式の解($n_1=0$に相当する)と比較するときn_1が存在する衝撃波前方においてかなりの補正が現われることが予想される。実際式(10)から見られるように従来のB-G-K解の非対称性を消去する傾向の補正である。B-G-K解の非対称性については、最近Bird[4]らによる数値実験の結果によって明らかになったように、かなり疑わしいものであることが判ってきた。ここでの試みが従来のB-G-K模型の欠点を補い、その適用範囲を拡げることになることを期待した

文献

1) Bhatnagar, P.L *et al*, Phys. Rev., 94, 511 (1954).

2) Liepmann, H.W *et al*, Phys. Fluids, 5, 1313 (1962).

3) Oguchi, H, In "Rarefied Gas Dynamics", Academic Press (1965).

4) Bird, G. A., J. Fluids Mech., 30, 479 (1967).