数理解析研究所講究録
第71巻 1969年 37-58

力学系の安定問題

京都大学　工学部　　西川　禕一

1. 緒　言

物理系のなかには，微分方程式で表わされる dynamical system が多い。たとえば力学系，電気回路網，制御系などである。Dynamical system のうち最も基本的であり，また最も古くから研究され体系づけられてきたのはせまい意味での dynamical system，すなわち力学系である。この小論は主として安定論の立場から力学系の性質を概観したものである。歴史的に見ればNewton 以後，前世紀までにLagrange およびHamilton によって変分原理に基づいた力学系の表現形式の一般化が試みられ，一方Lagrange，Poincaré を経てLiapunov の安定理論が導かれた。ところが最近宇宙飛翔体の運動の安定問題等に関連して，再びLagrange 形式あるいはHamilton 形式とLiapunov 理論との関連が議論されることになった。その意味で本論ではまず最初に力学系の表現形式について簡単に述べたのであるが，これは後に述べる安定

定理の準備である。特に安定と深い関係をもつ減衰については注意深く述べた。

実際上重要な係数励振の問題については才5節において触れ，才6節ではnonautonomousな非線形系の近似解析について簡単に述べた。

よく知られているように，力学系の数学的表現形式は他の物理系のそれと密接な関係にあり，従って力学系の安定論は他の分野にも応用できよう．

2.　力学系の表現形式

まずはじめに力学系の標準的な表現形式，すなわちLagrange方程式およびHamilton方程式について述べておく．

<u>定義</u>　$Z_1, \cdots, Z_m$ を力学系のある座標系，t を時間とする．それらの間には次の形の r 個の関係

$$f_i(Z_1, \cdots, Z_m, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \tag{2.1}$$

があるとき，ホロノーム（holonomic）な束縛条件があるという．ホロノームな束縛条件があるとき $Z_1, \cdots, Z_m$ の中から r 個を消去して，$n = m - r$ 個の独立な変数，すなわち一般化座標で置き換えることができる．本節では一般化座標を $q_1, \cdots, q_n$ で表わす．n を系の自由度（degrees of freedom）という．

定義　(2.1)式がtを陽に含まないとき束縛条件はスクレローム(scleronomic)であるという。

さて，n自由度系のポテンシャル・エネルギ$V(q_1,\cdots,q_n)\equiv V(q)$を$q=0$のまわりに展開すれば

$$V(q)=V(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}(0)\,q_i+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}(0)\,q_i q_j+\cdots \tag{2.2}$$

ポテンシャル・エネルギに含まれる定数cを適当に選ぶことにより$V(0)$は常にゼロにできる。$q=0$が平衡状態であれば右辺第2項もゼロであるから結局

$$V(q)=V_2+V_3+\cdots \tag{2.3}$$

ただし$V_2, V_3, \cdots$はq_iに関してそれぞれ2次，3次，…の項を表わす。

p個の質点より成る系を考え質点の質量をm_k，慣性系における位置ベクトルを$\underline{r_k}$とする($k=1,2,\cdots,p$)。位置ベクトル$\underline{r_k}$はq_iおよびtの関数であるから

$$\dot{\underline{r_k}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \underline{r_k}}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \underline{r_k}}{\partial t} \tag{2.4}$$

したがって運動エネルギは*

$$T=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2}m_k\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \underline{r_k}}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \underline{r_k}}{\partial t}\right]^2 \tag{2.5}$$

＊　連続物体の場合には微小質量要素についての積分をとればよい。

あるいは

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \tag{2.6}$$

となる。ただし T_0, T_1, T_2 はそれぞれ $\dot{q}_i$ に関して 0 次，1 次，2 次の項である。スクレロノーム系においては $\partial \mathbf{r}_k/\partial t = 0$ であり，したがって $T = T_2$ である。しかし非スクレロノーム系においても T は陽に t を含まない場合もあることを注意しておこう。

定義　系の Lagrange 関数 L は

$$L = T - V \tag{2.7}$$

により定義される。

保存ホロノーム系の Lagrange 運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.8}$$

により与えられる。系に非保存力が存在するときは次のような一般化非保存力 Q_i を導入する。

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.9}$$

$\mathbf{F}_j$ は非保存力，$\mathbf{r}_j$ はその作用点の位置ベクトルである．Q_i を用いると非保存ホロノーム系の Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.10}$$

力 $\underline{F_j}$ に関する仕事積分が決して正にはならないとき，すなわち $\underline{F_j}$ が系にエネルギを加えないときそれを減衰力と呼び，減衰力の和から成る Q_i を一般化減衰力と呼び $\overline{Q_i}$ と書く．仕事積分は

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\underline{F_j}\cdot\frac{d\underline{r_j}}{dt}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\underline{F_j}\cdot\frac{\partial\underline{r_j}}{\partial t}dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\overline{Q_i}\,\dot{q}_i\,dt\ \leq\ 0 \tag{2.11}$$

t_2-t_1 は任意の時間巾である。

<u>定義</u>　(2.11)式の第1項を束縛減衰 (constraint damping)，第2項を一般化減衰 (generalized damping) と呼ぶ。また $q\equiv 0$ 以外の運動では常に系のエネルギが失われるとき，減衰は完全 (complete) であるという。

減衰が一般化減衰のみより成り，さらにそれが完全であるときは不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{Q_i}\,\dot{q}_i\ <\ 0 \tag{2.12}$$

が成り立つ．

減衰力のうち代表的なものとして $\overline{Q_i}$ が

$$\overline{Q_i}\ =\ -\ \frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i} \tag{2.13}$$

の形で与えられるものがある．線形の粘性減衰がその例である。R は Rayleigh の減衰関数と呼ばれる。Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2.14)$$

となる。線形粘性抵抗の場合 R は2次形式

$$R = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} d_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \qquad (d_{ij} = d_{ji} > 0) \qquad (2.15)$$

である。

<u>定義</u>　系の Hamilton 関数 H は

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \qquad (2.16)$$

により定義される。

$L = T - V$ および $T = T_0 + T_1 + T_2$ を (2.16) 式に代入すれば

$$H = T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = T_2 + V - T_0 \qquad (2.17)$$

<u>定義</u>　V および T_0 は $\dot{q}_i$ を含まない。T_0 が t を陽に含まないときは q_i のみの関数

$$P = V - T_0 \qquad (2.18)$$

を定義することができ，P を動的ポテンシャル (dynamic potential) と呼ぶ。

P を用いれば Hamilton 関数は

$$H = T_2 + P \qquad (2.19)$$

と書ける。さらに (2.6) 式の直後に指摘したように，スクレロノームなホロノーム系では，$T = T_2$ であり，

$$H = T + V \qquad (2.20)$$

と書ける。

(2.16) 式の定義より

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \frac{dL}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}$$

よってホロノーム系では (2.10) 式を用いて

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.21}$$

保存系では

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.22}$$

さらにもし L が t を陽に含まないならば（たとえ非スクレロノーム系であっても）保存系では H は定数であり，束縛減衰のない完全減衰系では H は時間と共に減少する。

最後に系の Hamilton 方程式を示しておこう。まず

<u>定義</u>　$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ (2.23)

により定められる p_i を一般化運動量と呼ぶ。

系の Hamilton 運動方程式は

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.24}$$

により与えられる。

3. 線形化された運動方程式とその安定定理

力学系の基礎方程式には才2節で述べたLagrange 形式, Hamilton 形式の他にもちろんNewton の才2運動法則に基づく形式がある。このうちHamilton形式は 1階の微分方程式であるが, 他は2階微分方程式の形で表わされている。形としてはHamilton形式が最もきれいであるが, 系の挙動, たとえば振動の物理的考察と結びつけるためには2階方程式の方がわかりやすい。本節ではLagrange 関数を用いて運動方程式を導き, それを線形化したものを行列で表わしてみる。

系の質点の位置ベクトル $\underline{r_k}$ は一般に一般化座標と時間tとの関数である。スクレロノーム系ではtを陽に含まないのが普通であるが, 解析の便宜上慣性系に対して加速運動をしている座標系, たとえば回転座標系を用いることも多く, そのような場合にはスクレロノーム系でも $\underline{r_k}$ はtに陽に依存する。本節以下では便宜上一般化座標を q_i でなく x_i と書く。

(2.5)あるいは(2.6)式より系の運動エネルギは

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \tag{3.1}$$

ただし

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_k m_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial t}\right)^2$$

$$T_1 = \sum_i \left[\sum_k m_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial t}\right)\right]\dot{x}_i \equiv \sum_i \gamma_i \dot{x}_i \tag{3.1a}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[\sum_k m_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial x_j}\right)\right]\dot{x}_i\dot{x}_j \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mu_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$$

$x=0$ を平衡状態とし，T_0，γ_i，μ_{ij} を $x=0$ のまわりで Taylor展開する．

$$T_0(x) = T_0(0) + \sum_i \frac{\partial T_0}{\partial x_i}(0)\, x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j}(0)\, x_i x_j + \cdots$$

$$\gamma_i(x) = \gamma_i(0) + \sum_j \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}(0)\, x_j + \cdots$$

$$\mu_{ij}(x) = \mu_{ij}(0) + \sum_l \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_l}(0)\, x_l + \cdots$$

さらにポテンシャル・エネルギ V も Taylor展開すれば，

$$V(x) = V(0) + \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(0)\, x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(0)\, x_i x_j + \cdots$$

$V(0) = T_0(0)$ とおくことができ，また平衡状態の定義から $\partial(T_0-V)/\partial x_i = 0$ であるから，平衡状態からの変位が小さいとき x_i および $\dot{x}_i$ についての3次以上の項を無視すれば Lagrange 関数は

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\, \dot{x}_i \dot{x}_j + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}\, \dot{x}_i x_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\, x_i x_j \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし

$$m_{ij} = \mu_{ij}(0) \qquad \Gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}(0) \qquad k_{ij} = -\frac{\partial^2 (T_0 - V)}{\partial x_i \partial x_j}(0) \tag{3.2a}$$

なお $\gamma_i(0)$ は運動方程式の中に表われないので無視した．(3.2)式を行列で書けば

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^t M \dot{x} + x^t \Gamma \dot{x} - \frac{1}{2} x^t K x \tag{3.3}$$

ここに　$(M)_{ij} = m_{ij}$，$(\Gamma)_{ij} = \Gamma_{ij}$，$(K)_{ij} = k_{ij}$　(3.3a)

であり，x は x_i より成る n 行の列ベクトルである。保存力のみ存在する場合には(2.8)式より Lagrange 運動方程式は

$$M\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = 0 \tag{3.4}$$

ここに　$G = \Gamma - \Gamma^t$　(3.4a)

明らかに M および K は対称行列であり，G は反対称行列である。さらに運動エネルギは速度がゼロでない限り常に正であるから，(3.1a),(3.2a),(3.3a)式より M は正定値(positive definite)であることがわかる。M を慣性行列，K をポテンシャルあるいは保存力行列と呼ぶ。G は r_k が陽に t に依存することから生じたものであるが，これは実際問題においては回転座標系を用いることから生ずることが多いので，回転結合(gyroscopic coupling)による行列と呼ぶことにする。

以上では保存力のみを考えたが，非保存力がある場合には(2.10)式の Lagrange 方程式を用いればよい。たとえば Rayleigh 関数が(2.15)式で与えられる減衰力の場合には Lagrange 方程式は

$$M\ddot{x} + G\dot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \tag{3.5}$$

となる。ただし $(D)_{ij} = d_{ij}$ であり，D は対称な正定値行列で減衰行列と呼ぶ.

次に(3.5)式のゼロ解 $x = 0$ の安定性について 2,3 の定理を示しておく。ゼロ解の安定性を単に系の安定性と言う.

減衰および回転結合を取り去った方程式

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{3.6}$$

を(3.5)式のtruncated equationと呼ぶ。

定理 3.1　(3.6)式はKの固有値がすべて正であれば，またそのときに限り(Liapunov)安定である。

証明は簡単であるから省略する。(3.5)式の安定性と(3.6)式のそれとはどのような関係にあるだろうか。減衰が無い場合，すなわち$D=0$の場合にはKの固有値が負であってもGがあるために安定化される例がある。たとえば文献[1,2]参照。このことは早く19世紀の終りにKelvinおよびTaitによって指摘された[3]。彼らはさらに$D \neq 0$の場合について，定理3.2が成り立つことを主張したが，厳密な証明は後年Liapunov法を用いてChetaevによってなされた[4]。

定理 3.2　行列Kの固有値はいずれもゼロでないものとする。そのとき(3.5)式の安定性はtruncated equation (3.6)式のそれと同じである。

近年Zajacは定理3.2を少し拡張して次の定理3.3および3.4を得た[5]。

定理 3.3　行列Kの固有値はいずれもゼロでないとする。そのとき(3.5)式の特性根のうち(複素平面の)右半面にあるものの数は行列Kの負の固有値の数に等しい。

定理3.4　(3.5)式においてD ($D \neq 0$) は正定値ではなく, 単に正半定値 (pos. semidefinite) であるとする。そのときもしKのすべての固有値が正 (負) ならば系は安定 (不安定) である。

以上の定理の証明については省略するが, 定理3.2は次の第4節に述べるHamilton関数をLiapunov関数として用いる方法によって簡単に示すことができる。

4.　Liapunovの方法とHamilton関数

運動の静的平衡状態の安定性に関する研究は古くLagrangeにさか上る。

定理4.1　(Lagrange - Dirichlet)

ホロノームかつスクレロノームな保存系のポテンシャル・エネルギが静的平衡状態において局所的最小ならば, その状態は (Liapunov) 安定である。

この定理は安定の十分条件を与えている。定理4.1の命題の必要性はLiapunov [6] およびChetaevによって証明され, 次の定理が得られた。

定理4.2　(Liapunov - Chetaev)

ホロノームかつスクレロノームな保存系のポテンシャル・エネルギが静的平衡状態において局所的最小でないならば,

その状態は不安定である。

他方 Poincaré は Lagrange の定理を一般化し，次のような安定の十分条件に関する定理を与えた。

定理4.3 （Poincaré）

ホロノームな保存系においてHamilton関数は時間を陽に含まないとする。そのような系のある状態に対し，もし動的ポテンシャル P が局所的最小ならば，その状態は（Liapunov）安定である。

定理 4．3 はHamilton関数 H を Liapunov関数に選ぶことにより証明される。

以上の3つの定理はいずれも保存系に関するものであるが，系が減衰を含む場合には次の定理が得られる。

定理 4．4　力学系において，次の5つの条件が満たされているとする。

(1) 束縛条件はホロノームである。

(2) L したがって H は t を陽に含まない。

(3) すべての非保存力は減衰力である。

(4) 減衰は完全である。

(5) 減衰は一般化減衰より成り，束縛減衰はない。

そのとき系のある状態に対し，

(1) もし $H(p, q)$ あるいは $H(q, \dot{q})$ が局所的最小ならば，

その状態は漸近安定であり，

(2) もし $H(p, q)$ あるいは $H(q, \dot{q})$ が局所的最小でないならばその状態は不安定である。

証明： 才2節において述べたことから，この定理の5つの条件が満たされているときには，運動方程式の解曲線に沿ってとったHの時間微分 $\dot{H}(p, q)$ あるいは $\dot{H}(q, \dot{q})$ は負定値な関数である。このことから，Liapunov の方法における安定および不安定定理[7]を用いて定理4.4の結果がただちに証明される。

5. 変係数系の近似解法

系のパラメタの時間的変動，時間的に変化するポテンシャルの場における運動などのために，運動方程式の係数が時間的に変化する系が少なくない。ここでは$n(\geq 1)$自由度の線形系を考えてみよう。なお本節の問題の詳細については文献[8]を参照されたい。

変係数が摂動と考えられる程度に小さいとき，微分方程式を標準形

$$\ddot{x} + Jx = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon^{k} f^{(k)}(x, \dot{x}, t) \tag{5.1}$$

に書きなおすことができる。x および $f^{(k)}$ は n-ベクトル，J は ω_i^2 $(i=1, \cdots, n)$ を対角要素とする $n \times n$ 対角行列であ

る。ただしω_iは非摂動系の固有周波数である。$f^{(k)}$はxおよび$\dot{x}$に関して線形，tに関しては周期$2\pi/\omega$の周期関数であるとする。$f^{(k)}$には減衰に対応する定数も含めておく。なお非摂動系は安定である，すなわちω_i^2はすべて正であると仮定しておく。

i成分について書けば（5.1）式は

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon^k \sum_{j=1}^{n} \left[g_{ij}^{(k)}(t) x_j + h_{ij}^{(k)}(t) \dot{x}_j \right] \tag{5.2}$$

ここに

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(k)}(t) &= g_{ijo}^{(k)} + \sum_{l=1}^{L} \left[g_{ijcl}^{(k)} \cos l\omega t + g_{ijsl}^{(k)} \sin l\omega t \right] \\ h_{ij}^{(k)}(t) &= h_{ijo}^{(k)} + \sum_{l=1}^{L} \left[h_{ijcl}^{(k)} \cos l\omega t + h_{ijsl}^{(k)} \sin l\omega t \right] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Floquet の定理により（5.2）式の特殊解は

$$x_i(t) = e^{mt} \psi_i(t) \tag{5.4}$$

の形に書くことができる。ただしmは特性指数，$\psi_i(t)$は周期$2\pi/\omega$の周期関数である。

εが十分小さいとき未知量mおよびψ_iをεのべき級数に展開し

$$m = m^{(0)} + \sum_{k=1} \varepsilon^k m^{(k)} \tag{5.5}$$

$$\psi_i(t) = \psi_i^{(0)} + \sum_{k=1} \varepsilon^k \psi_i^{(k)} \tag{5.6}$$

またω_iの小さな変化が解にどのように影響するかを調べるためにω_iにも摂動を与えてみる：

$$\omega_i = \omega_i^{(0)} + \sum_{k=1} \varepsilon^k \omega_i^{(k)} \tag{5.7}$$

(5.7) 式を (5.2)式に代入すれば

$$\ddot{x}_i + \omega_i^{(0)2} x_i = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon^k f_i^{(k)}(x, \dot{x}, t) - 2\varepsilon \omega_i^{(0)} \omega_i^{(1)} x_i$$
$$- \varepsilon^2 (2\omega_i^{(0)} \omega_i^{(2)} + \omega_i^{(1)2}) x_i - \cdots \qquad (5.8)$$

(5.5) および (5.6) を (5.4) に代入すれば特殊解 x_i は

$$x_i = \exp\left[\sum_{k=1} \varepsilon^k m^{(k)} t\right] \cdot \left[\sum_{k=0} \varepsilon^k \varphi_i^{(k)}(t)\right] \qquad (5.9)$$

と書ける。ただし

$$\varphi_i^{(k)}(t) = \exp\left[m^{(0)} t\right] \cdot \psi_i^{(k)}(t) \qquad (5.10)$$

$\exp[m^{(0)}t]$ は一般に周期 $2\pi/\omega$ の周期関数ではないから，関数 $\varphi_i^{(k)}(t)$ は有界ではあるが周期関数ではない。しかし ψ 関数の代りに φ 関数を用いることにより以下の計算ははるかに簡単になる。

(5.10) を (5.8) に代入し，ε の等べきの項を比較すれば

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{\varphi}_i^{(0)} + \omega_i^{(0)2} \varphi_i^{(0)} = 0 \qquad (5.11)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{\varphi}_i^{(1)} + \omega_i^{(0)2} \varphi_i^{(1)} = f_i^{(1)}(\varphi^{(0)}, \dot{\varphi}^{(0)}, t) - 2\omega_i^{(0)} \omega_i^{(1)} \varphi_i^{(0)} - 2m^{(1)} \dot{\varphi}_i^{(0)} \qquad (5.12)$$

$\cdots$

(5.11) 式の解は

$$\varphi_i^{(0)} = r_i \cos(\omega_i^{(0)} t - \theta_i) \qquad (5.13)$$

(5.13) を (5.12) 式右辺に代入すれば，周波数 $\omega_j^{(0)}$ および $|\omega_j^{(0)} \pm l\omega|$ ($j = 1, \cdots, n$; $l = 1, \cdots, L$) の項があらわれる．定義より $\varphi_i^{(1)}$ は有界である．(5.12) 式の解 $\varphi_i^{(1)}$ が有界なるための必要十分条件は，同式の右辺において $\cos \omega_i^{(0)} t$ および $\sin \omega_i^{(0)} t$

の係数がいずれもゼロとなることである。$m^{(1)}$，すなわち特性指数の1次の項はこの$\varphi_i^{(1)}$の有界条件から定められる。あるi, j, lの組に対して

$$|\omega_j^{(0)} \pm l\omega| = \omega_i^{(0)} \tag{5.14}$$

となるとき，周波数$|\omega_j^{(0)} \pm l\omega|$の項は$\omega_i^{(0)}$の項と同様に扱わなければならない。よって便宜上次の分類をする。

Case 1.　すべてのi, j, lに対して$\omega_i^{(0)} \neq l\omega/2$かつ$\omega_j^{(0)} \pm \omega_i^{(0)} \neq l\omega$

Case 2.　あるi, lに対して$\omega_i^{(0)} = l\omega/2$

Case 3.　あるi, j, lに対して$\omega_j^{(0)} \pm \omega_i^{(0)} = l\omega$

Case 2では$l\omega - \omega_i^{(0)} = \omega_i^{(0)}$，Case 3では$\pm(l\omega - \omega_j^{(0)}) = \omega_i^{(0)}$である。Case 1では系の固有周波数$\omega_i$と係数変化の周波数$\omega$との間に特別の関係はなく，非共振の場合と呼ぶ。それに対しCase 2および3は共振の場合と呼ばれるが，Case 3は多自由度系においてのみ生ずる共振である。共振の場合には係数の周期的変化により振動解の振巾が成長する，いわゆるパラメトリック共振が発生し，系は不安定となる。その他Case 2と3とが重なる場合（2重共振）もある。

例としてCase 3について$m^{(1)}$の値と系の不安定条件を書けば次のようになる。不安定条件は$m^{(1)}$の実部が正になる条件という意味であり，第1次近似解の不安定条件ということである。

<u>Case 3A</u>. $\omega_j^{(0)} + \omega_i^{(0)} = l\omega$ の場合

$$4m^{(1)} = \alpha + i\beta \pm (\gamma_R + i\gamma_I) \quad \text{および} \quad \alpha - i\beta \pm (\gamma_R - i\gamma_I)$$

ただし $\alpha = h_{i0}^{(1)} + h_{j0}^{(1)}$

$$\beta = \left[(g_{i0}^{(1)} - 2\omega_i^{(0)}\omega_i^{(1)})\omega_j^{(0)} - (g_{j0}^{(1)} - 2\omega_j^{(0)}\omega_j^{(1)})\omega_i^{(0)} \right] / \omega_i^{(0)}\omega_j^{(0)}$$

$\gamma_R = \Gamma^{1/2}$ の実部 (≥ 0) $\qquad$ $\gamma_I = \Gamma^{1/2}$ の虚部

$$\begin{aligned} \Gamma = (\omega_i^{(0)}\omega_j^{(0)})^{-2} \cdot \Big\{ & \Big[(h_{i0}^{(1)} - h_{j0}^{(1)})\omega_i^{(0)}\omega_j^{(0)} + i\big[(g_{i0}^{(1)} - 2\omega_i^{(0)}\omega_i^{(1)})\omega_j^{(0)} \\ & + (g_{j0}^{(1)} - 2\omega_j^{(0)}\omega_j^{(1)})\omega_i^{(0)} \big] \Big]^2 + \omega_i^{(0)}\omega_j^{(0)} \Big[(g_{ijcl}^{(1)} - \omega_j^{(0)} h_{ijsl}^{(1)}) \\ & + i(g_{ijsl}^{(1)} + \omega_j^{(0)} h_{ijcl}^{(1)}) \Big] \cdot \Big[(g_{jicl}^{(1)} - \omega_i^{(0)} h_{jisl}^{(1)}) - i(g_{jisl}^{(1)} + \omega_i^{(0)} h_{jicl}^{(1)}) \Big] \Big\} \end{aligned}$$

系は次のいずれかの場合不安定となる。

1. $\alpha + \gamma_R > 0$ (5.15)

2. $\alpha + \gamma_R = 0$ かつ $\beta = \gamma_I = 0$ (5.16)

3. $\alpha = \gamma_R = 0$ かつ $\beta = 0,\ \gamma_I \neq 0$ あるいは $\beta \neq 0,\ \gamma_I = 0$ (5.17)

<u>Case 3B</u>. $\omega_j^{(0)} - \omega_i^{(0)} = l\omega$ の場合

Case 3A の諸式において $\omega_i^{(0)}$ および $\omega_i^{(1)}$ の前の符号を変えればよい。

以上は才1近似の安定のみについて述べたが，k 次近似では一般に $\omega_i^{(0)} = kl\omega/2$ および $\omega_j^{(0)} \pm \omega_i^{(0)} = kl\omega$ の近傍で k 次共振による不安定が発生する。

本節で述べた近似解析法は多くの問題に応用することができるが，一例として文献[8]では楕円軌道上を運動するスピン衛星の姿勢安定の問題が議論されている。

6. 漸近展開法

ここではn自由度のnonautonomousな攝動系に対する漸近展開法の適用について簡単に述べておく[10].

前節(5.1)式と同じ形の方程式を考える。ただしここでは関数$f^{(k)}$はx, $\dot{x}$について非線形であってもよく，tについても必ずしも周期的ではないとする。ベクトルxのi成分x_iの解を

$$x_i = a_i \cos \psi_i + \sum_{k=1} \varepsilon^k u_i^{(k)} \tag{6.1}$$

の形に書く。ただしa_iおよびψ_iは時間と共に変化し，次の微分方程式を満足する．

$$\dot{a}_i = \sum_{k=1} \varepsilon^k A_i^{(k)} \tag{6.2}$$

$$\dot{\psi}_i = \omega_i + \sum_{k=1} \varepsilon^k B_i^{(k)} \tag{6.3}$$

u_iはa_i, ψ_i, tの関数，$A_i^{(k)}$および$B_i^{(k)}$はa_iの関数である。以上のように仮定し，未知関数$u_i^{(k)}$, $A_i^{(k)}$および$B_i^{(k)}$を順次定めてx_iの近似解を求めるのが漸近展開法に基づく解法である．

(6.1)〜(6.3)式を(5.1)式に代入し，εの等べきの項を比較すれば次の一連の線形偏微分方程式が得られる．

$$\sum_{j,l=1}^{n} \omega_j \omega_l \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial \psi_j \partial \psi_l} + 2 \sum_{j=1}^{n} \omega_i \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial \psi_j \partial t} + \omega_i^2 u_i^{(k)}$$

$$= 2a_i B_i^{(k)} \omega_i \cos \psi_i + 2A_i^{(k)} \omega_i \sin \psi_i + f_{ik} \tag{6.4}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

ただし

$$f_{i1} = f_i^{(1)}(a_j\cos\psi_j,\ -a_j\omega_j\sin\psi_j,\ t) \tag{6.5}$$
$$f_{i2} = \cdots$$

(6.4)式は $u_i^{(k)}$ に関する微分方程式で，未知のパラメタ $A_i^{(k)}$, $B_i^{(k)}$ を含む。f_{ik} は $u_i^{(\ell)}$, $A_i^{(\ell)}$, $B_i^{(\ell)}$ ($\ell=1,\cdots,k-1$) が与えられれば既知の関数である。よって(6.4)式を k について1から順次解いていけばよい。原理的には線形変換により代数方程式に変換して解くことができるが，実際の計算は一般に面倒である。

f_{ik} が t について周期 $2\pi/\omega$ の周期関数であるとしよう。f_{ik} は ψ_i について周期 2π の周期関数であるから，$u_i^{(k)}$ も ψ_i および t について周期関数となる。$u_i^{(k)}$, f_{ik} を Fourier 展開すれば

$$u_i^{(k)} = \sum_{m_{i0}\cdots m_{in}} \Big[\bar{u}_i^{(k)c\,m_{i0}\cdots m_{in}} \cos(m_{i0}\omega t + \sum_j m_{ij}\psi_j) + \bar{u}_i^{(k)s\,m_{i0}\cdots m_{in}} \sin(m_{i0}\omega t + \sum_j m_{ij}\psi_j) \Big] \tag{6.6}$$

$$f_{ik} = \sum_{m_{i0}\cdots m_{in}} \Big[\bar{f}_{ik}^{\,c\,m_{i0}\cdots m_{in}} \cos(m_{i0}\omega t + \sum_j m_{ij}\psi_j) + \bar{f}_{ik}^{\,s\,m_{i0}\cdots m_{in}} \sin(m_{i0}\omega t + \sum_j m_{ij}\psi_j) \Big] \tag{6.7}$$

$\bar{u}_i^{(k)}$, $\bar{f}_{ik}$ は Fourier 係数であり，$\bar{u}_i^{(k)}$ は未知，$\bar{f}_{ik}$ は既知である。m_{ij} は関数 $f_i^{(k)}$ の形によって定まるある範囲の整数値をとる。(6.6)および(6.7)を(6.4)式に代入し，左右両辺における同じ周波数の項を比較することにより次の関係が得られる。

$$A_i^{(k)} = -\bar{f}_{ik}^{\,s*}/2\omega_i \qquad B_i^{(k)} = -\bar{f}_{ik}^{\,c*}/2a_i\omega_i \tag{6.8}$$

ただし $\bar{f}_{ik}^{\,s*}$, $\bar{f}_{ik}^{\,c*}$ は $m_{ij}=\delta_{ij}$ (Kronecker's delta) に対応する Fourier 係数である。また

$$\omega_i^2 - (m_{i0}\omega + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\omega_j)^2 \equiv \Delta \neq 0 \tag{6.9}$$

を満足するすべての m_{ij} ($j = 0, 1, \cdots, n$) の組に対しては

$$\overline{u}_i^{(k)}{}^{c}_{s}{}^{m_{i0}\cdots m_{in}} = \overline{f}_{ik}{}^{c}_{s}{}^{m_{i0}\cdots m_{in}} / \Delta \tag{6.10}$$

となり k 次近似解は確定する。

ある m_{ij} の組に対して $\Delta = 0$ となるときは(6.10)式より $\overline{u}_i^{(k)}$ は形式的に無限大となる。これは共振が起こることを示している。周波数 ω_i の空间で $\Delta = 0$ の3近傍は共振領域と呼ばれ、一般に解の振巾は大きくなる。共振領域では解の位相は外部から加えられる励振の位相と関係をもつので、ψ_i の代りに位相角 θ_i を用いて計算しなければならない[10]。

文　献

1. DeBra, D. D. and Delp, R. H., "Rigid Body Attitude Stability and Natural Frequencies in Circular Orbit," J. Astronaut. Sci., 8, 14～17 (1961).
2. Thomson, W. T., "Spin Stabilization of Attitude Against Gravity Torque," J. Astronaut. Sci., 9, 31～33 (1962).
3. Thomson, W. (Lord Kelvin) and Tait, P. G., Treatise on Natural Philosophy, Part I, Cambridge University Press, 1879, 388～391.
4. Chetaev, N. G., The Stability of Motion, translated from Russian by M. Nadler, Pergamon Press, 1961, 95～101.
5. Zajac, E. E., "The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and Extensions," J. Astronaut. Sci. 11, 46～49 (1964).

6. Liapunov, A. M., Problème Général de la Stabilité du Mouvement, Ann. Math. Studies, no. 17, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.
7. LaSalle, J. and Lefschetz, S., Stability by Liapunov's Direct Method, Academic Press, Inc., New York, 1961, p. 38.
8. Nishikawa, Y. and Willems, P. Y., "A Method for Stability Investigation of a Periodic Dynamic System with Many Degrees of Freedom," to appear in J. Franklin Inst.
9. Nishikawa, Y. and Willems, P. Y., "Stability of an Almost-Periodically Varying Dynamic System," in preparation.
10. Willems, P. Y., "Analytical Investigation of the Attitude Stability of Space Vehicle," Ph. D. Thesis submitted to the Dept. of Eng., University of California, Los Angeles, March, 1968.