

$\Delta u = f(P, u)$ の単調な
差分近似公式について

早大理工 中島 勝也

§ 1. 序

この論文の目的は、Poisson 方程式に対して J.H. Bramble
- B.E. Hubbard [1] が与えた単調型差分近似公式の解の最大
値定理をみたと、表題の非線形方程式にも適用できる
ことを示すことにある。

かんたんにするために $P = (x, y)$ は 2次元の有界領域 R 内に
あるものとし、 R の境界 C はなめらかな曲線であるとする。

問題は C 上で与えられた連続関数 $g(P)$ に対し

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta u(P) &= f(P, u) & P \in R \\ u(P) &= g(P) & P \in C \end{aligned}$$

となるような $u = u(P) \in C^2(R) \cap C(\bar{R})$ を求めよ。

ということであるが、解析解の存在に関しては、適当な増減
条件のもとに証明されている。たとえば Bers [1],

Courant-Hilbert [1], Pohozaev [1] と参照されたい。

数値解の収束性と誤差評価に関しては Greenspan [1], Collatz [1] がわかりよい。そこで用いられる方法は最大値原理で、差分近似では係数行列の positivity である。しかし誤差の精度をあげようとするとき、係数行列の positivity が失われる。しかし誤差評価に用いられる解の性質は実はこの positivity よりも もっとゆるい条件で成り立つ。Bramble-Hubbard [1] は係数行列の Monotonicity を用いたが、本論文では、Monotonicity よりもさらに広範な性質が最大値原理に関係することを示される。まず、行列のこれらの性質を明らかにするところから始めよう。

§2. 行列解析からの準備.

定義 1. 行列 A が、ベクトル x に対し

$$(2) \quad Ax \geq 0 \quad \text{ならば} \quad x \geq 0$$

となるとき 単調であるという。ここで不等式は各要素ごとに負でないものとする。

Lemma 1. 単調行列は正則である。

証明. $Ax \geq 0$ ならば $x \geq 0$ はまた
 $Ax \leq 0$ ならば $x \leq 0$ を意味し、併せて
 $Ax = 0$ ならば $x = 0$ となるから
 A は正則である。 (終)

Lemma 2. A が単調であることと、 A が正則で
 $A^{-1} \geq 0$ であることと同値である。

証明. A が単調ならば $A^{-1} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ が存在し、
 $AA_i = \varepsilon_i (= \text{単位ベクトル}) \geq 0 \quad \therefore A_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n$
 したがって $A^{-1} \geq 0$.

逆に $A^{-1} \geq 0$ ならば $Ax \geq 0$ のとき

$$A^{-1}(Ax) = x \geq 0 \quad (\text{終})$$

系. 単調行列の積は単調である。

Lemma 3. A, B とも単調行列であるとする。そのとき

(3) $A \leq B$ ならば $A^{-1} \geq B^{-1}$ である。

証明. $A^{-1} = (a_1^-, a_2^-, \dots, a_n^-)$, $B^{-1} = (b_1^-, b_2^-, \dots, b_n^-)$
 とする。

$$A(a_i^- - b_i^-) = \varepsilon_i - Ab_i^- = \varepsilon_i - (A - B + B)b_i^- \\ = (B - A)b_i^- \geq 0.$$

$$\therefore a_i^- \geq b_i^- \quad i=1, 2, \dots, n \quad \therefore A^{-1} \geq B^{-1} \quad (\text{終})$$

さてこの単調行列のもつ重大な意味をつぎにあげよう。

連立一次方程式

$$(4) \quad Ax = b$$

の二つの近似解 x_0, x_1 が不等式

$$(5) \quad Ax_0 \leq b \leq Ax_1$$

を満足するものとする。このとき A が単調ならば

真の解 x は 関係式

$$(6) \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

を満足し、したがって x_1 のもと誤差の評価式

$$(7) \quad 0 \leq x_1 - x \leq x_1 - x_0$$

を得る。

積分型微分方程式の差分近似方程式の係数行列のもと単調性つまり逆行列の非負なる性質は、Green 関数の非負性に対応している。

さて与えられた行列が単調であるかどうかを判定する、かんたんな見分け方はないものがあるうか。それに関して、つぎにのべる正型行列 (matrices of positive type) がある。

定義 2. つぎの条件をみたす行列 $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ を正型である (of positive type) という。

$$(8) \quad (a) \quad a_{ij} \leq 0 \quad i \neq j \text{ のとき,}$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \geq 0 \quad \text{すべての } i \text{ について,}$$

(c) $J(A)$ を $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合とするとき

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0 \quad \text{ある } i \in J(A) \text{ について,}$$

(d) A の中で 任意の i から, $J(A)$ のある j に達する道 (connection) がある,

i から j への道というのは A の零でない要素の列

$a_{i k_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{r-1} j}$ をいう。

注. $J(A) = \{1, 2, \dots, n\}$ のとき A は Minkowski 行列という。

Lemma 4. 正型行列は単調である。

証明. $Ax \geq 0$, A が正型であるとする. $x \geq 0$ で

ないとする. x の負の最小の要素 $x_k < 0$ が存在して

$$0 \leq \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \leq x_k \sum_{j=1}^n a_{kj} \leq 0$$

$\sum_{j=1}^n a_{kj} = 0$, $\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = 0$, $a_{kj} \leq 0 (k \neq j)$ これは x の

要素がすべて x_k に等しいことを意味し, $i \in J(A)$ に

対して Ax の i 要素が負となる. (終)

注. ある置換行列 P によって

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

となる行列を可約であるといい, そうでない行列を既約

であるという. グラフ理論によれば, 任意の i から

すべての j に達する A の中の道があることが, A が既約

である = と同等で, 係数行列の既約性は格子点集合が

連結であることからみちびかれる.

Lemma 5. A は単調行列, $B = (b_{ij})$ は $\sum_{j=1}^n b_{ij} \geq 0$

をみたすものとする. そのとき $A^{-1}B$ も同じ関係 $\sum_{j,k} \alpha_{ij}^{(k)} b_{jk} \geq 0$

をみたす. ただし $\alpha_{ij}^{(k)}$ は A^{-1} の ij 要素とする.

証明. $\sum_k \sum_j (\alpha_{ij}^{(k)}) b_{jk} = \sum_j (\alpha_{ij}^{(j)}) \sum_k b_{jk} \geq 0$.

5.3. 差分近似式の作り方

問題(1)を解くために、 xy 平面を幅 h の、軸に平行な正方形格子で覆い、 R_h を R 内の格子点集合、 C_h を C と格子線の交点の集合とする。 $R_h = R_1 + S_1 + S_2$ とし、 S_2 はその近隣4点のうち少なくとも一つが C_h 上にある点の集合、 S_1 はその上下左右各一つ計8個の近隣のうち $C_h + S_2$ の点があるような点の集合とする。 Poisson 方程式に対する差分近似方程式の作り方の要訣は、Laplacian に対する公式誤差が、

R_1 で $O(h^k)$ のときには

$$S_h = S_1 + S_2 \text{ で } O(h^{k-2})$$

とするので精度のバランスがとれることである。ここで O は同位の無限小を表わす Landau の記号である。

さて当面の問題(1)の解 $u \in C^6(R)$ と $f_u \geq 0$ を仮定して、精度が $O(h^4)$ の数値解を得る公式を導こう。

$$(9) \quad \diamond_h u(x, y) = u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)$$

とき、

$$(10) \quad \Delta_h u(P) = \frac{1}{12h^2} [16 \diamond_h - \diamond_{2h}] u(P), \quad P \in R_1$$

とする。近似度は4である。

$$(11) \quad |\Delta u - \Delta_h u| \leq \frac{2}{15} M_6 h^4, \quad P \in R_1.$$

ここで $M_k = \sup_R |\partial^k u|$ とする。

つぎに S_1 での近似公式を作る。そこでの精度 $O(h^2)$ である。

$$(12) \quad \Delta_h u(P) = \frac{1}{h^2} \diamond_h u(P), \quad P \in S_1$$

とする。そのとき

$$(13) \quad |\Delta u - \Delta_h u| \leq \frac{1}{12} M_4 h^2.$$

S_2 の点 $P = (x, y)$ に対し 2 つなぐとも $\rightarrow C_h$ 上の点。近隣 4 点のうちにある。たとえば $0 < \alpha \leq 1$ に対し $(x - \alpha h, y)$ が C_h 上にあるとする。 C の滑らかさから h が小さいときに $(x+h, y), (x+2h, y)$ は R_h 内にあると考えよう。 y 方向に対しても、同様に $0 < \beta \leq 1$ に対し $(x, y - \beta h) \in C$ で $(x, y), (x, y+h), (x, y+2h)$ は R_h の点とする。そのとき

$$(14) \quad \Delta_h u(x, y) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1-\alpha}{\alpha+2} u(x+2h, y) + \frac{2(2-\alpha)}{\alpha+1} u(x+h, y) - \left(\frac{3-\alpha}{\alpha} + \frac{3-\beta}{\beta} \right) u(x, y) + \frac{6}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} u(x-\alpha h, y) - \frac{1-\beta}{\beta+2} u(x, y+2h) + \frac{2(2-\beta)}{\beta+1} u(x, y+h) + \frac{6}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} u(x, y-\beta h) \right], \quad P \in S_2$$

とおく。すると

$$(15) \quad |\Delta u - \Delta_h u| \leq M h^2, \quad P \in S_2$$

となる。 M は定数である。この Δ_h の定義にもとずき、() の差分近似方程式は

$$(16) \begin{cases} \frac{1}{15R^2} [16\Delta_h - \Delta_{2h}] U(P) = f(P, U(P)) & P \in R_1, \\ \frac{1}{R^2} \Delta_h U(P) = f(P, U(P)) & P \in S_1, \\ \Delta_h U(P) = f(P, U(P)) & P \in S_2, \\ U(P) = g(P) & P \in C_h \end{cases}$$

となる。このうち $P \in R_1 + S_1$ に対する $U(P)$ の係数行列が単調であることが以下に証明される。また式(16)は $P \in C_h$ に対する項をあとせば、 $P \in S_2$ の係数が頂の係数に比し圧倒的に大きい。

さて(16)をわかりやすくするために書き直そう。 $P=(x, y)$ とするとき、その4隣を N, E, W, S とし北 N は $(x, y+h)$ とする。他にも同様に考えまた $NN=(x, y+2h)$ などとする。すると $P \in R_1$ のとき $N, E, W, S, NN, EE, WW, SS$ の8点は $R_1 + S_1$ にある。(16)の最初の式は

$$(17) \begin{cases} U(P) - \frac{4}{15} [U(N) + U(E) + U(W) + U(S)] \\ + \frac{1}{60} [U(NN) + U(EE) + U(WW) + U(SS)] \\ = -\frac{1}{5} R^2 f(P, U(P)) & P \in R_1, \\ U(P) - \frac{1}{4} [U(N) + U(E) + U(W) + U(S)] \\ = -\frac{1}{4} R^2 f(P, U(P)) & P \in S_1 \end{cases}$$

となる。式(17)の N, E, W, S のうちには S_2 の点もある。

これらの表での U の値は右辺に移項したものとして (17) を $P \in R_1 + S_1$ に対する $U(P)$ の値を未知数とする連立一次方程式とみ、その係数行列を A とおこう。すると

Lemma 6. 上記の A は単調である。

証明. $A = I - H_1 - H_2$ とおく。ここで I は単位行列で H_1, H_2 は (17) のような表のし方をすれば、 $P \in R_1$ のときは

$$(18) \quad U(P) - \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) [U(N) + U(E) + U(W) + U(S)] - \left(\frac{1}{60} + \varepsilon\right) [U(N) + U(E) + U(W) + U(S)] + \frac{1}{60} [U(NN) + \dots] = -\frac{1}{5} h^2 f(P, U(P))$$

におい、 ε 2 行が H_1 にあ、 ε 4 行が H_2 に対応する。

$P \in S_1$ のときは

$$(19) \quad U(P) - \left(\frac{1}{4} - \bar{\varepsilon}\right) [U(N) + U(E) + U(W) + U(S)] - \bar{\varepsilon} [U(N) + U(E) + U(W) + U(S)] = \frac{1}{4} h^2 f$$

におい、 $\bar{\varepsilon}$ 2 行が H_1 にあ、 $\bar{\varepsilon}$ 3 行が H_2 に対応する。

ここで ε と $\bar{\varepsilon}$ とは $\frac{1}{4}$ 以下の正数で、

$$(20) \quad \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) \left(\frac{1}{60} + \varepsilon\right) \geq \frac{1}{60} \\ \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) \bar{\varepsilon} \geq \frac{1}{60}$$

ε を満足するようにとる。これは

$$(21) \quad \frac{1}{12} = \varepsilon \leq \frac{3}{20}, \quad \frac{1}{15-60\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon} < \frac{1}{4}$$

と同値で, $\varepsilon = \frac{7}{60}$, $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{8}$ ととれる。

さて

$$(22) \quad A = I - H_1 - H_2 = (I - H_1)(I - (I - H_1)^{-1}H_2)$$

において, $I - H_1$ は正型であることは明らかだから,

$I - (I - H_1)^{-1}H_2$ が単調ならば Lemma 2 により A が単調となる。 A について知れることは, (8)(b)(c)(d) に当る

$$(23) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \geq 0 \quad (\text{すべての } i \text{ について})$$

$$(24) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} > 0 \quad (P \in S_1 \text{ に対応する } i \text{ の一部})$$

であり, $\bar{r}(A) \neq 0$, $i \rightarrow j \in J(A)$ なる H_1 内の道がある。

とくに $(I - H_1)^{-1} > 0$ であつて, $H = (I - H_1)^{-1}H_2$ とおくと

$$I - H = (I - H_1)^{-1}A$$

は正型の条件のうち (8)(c) をすべての行についてみたし,

(8)(a) を証明できれば Minkowski の行列であることが示される。

したがつて H の対角要素以外は負でないことを示せばよい。

$\rho(H_1) < 1$ により $(I - H_1)^{-1} = I + H_1 + H_1^2 + \dots$

$$(25) \quad H = (I - H_1)^{-1}H_2 = H_2 + H_1H_2 + H_1^2H_2 + \dots$$

これを 2 項ずつ加えて H_2 の $-\frac{1}{60}$ の要素を H_1H_2 の正の対応する要素

消すようにする。(20) によりそれが成立つようになる

とつてゐる (終)

さて 解ベクトル $U(P)$ を $P \in R_1$, $P \in S_1$, $P \in S_2$, $P \in C_2$ に従がい、それらに対応する部分ベクトル U_1, U_2, U_3, U_4 に分けると、(16) は

$$(26) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} F_1 R^2 \\ -\frac{1}{4} F_2 R^2 \\ -\frac{1}{8} F_3 R^2 \\ G \end{pmatrix}$$

となる。左辺の行列はその最大要素が 1 となるように、つまり (17) のような形に正規化してあるものとする。その残りのブロックまでは行の要素の和が 0 である。Lemma 6 で証明されたことにより

Corollary. (26) の行列のうち $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ は単調である。

$$(27) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = I$$

とすると、逆行列 $B = (B_{ij})$; $i, j = 1, 2$ は

$$(28) \quad B \geq 0, \quad \text{つまり} \quad b_{jk} = (B)_{jk} \geq 0$$

である。±2

Lemma 7. $-B_{12}A_{23}$, $-B_{22}A_{23}$ は non-negative で、かつそのすべての行について、要素の和は 1 である。

証明. $B \geq 0$ と $A_{23} \leq 0$ から 前半は明らかである。

つきに, (17)より明らかのように, 行列 $(A_{11}, A_{12}), (A_{21}, A_{22}, A_{23})$ は, その要素の行和が 0 であるから

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sum_j (A_{22})_{ij} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$(29) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{kj} (B_{12})_{ij} (A_{23})_{jk} \\ -\sum (B_{22})_{ij} (A_{22})_{jk} \end{pmatrix}$$

(終)

Lemma 8. (Mean property)

(26)において $F_1 = 0, F_2 = 0$ の場合には, ベクトル U_1, U_2 の要素はベクトル U_3 の要素の荷重平均である。したがってこれらの要素の値は, U_3 の要素の最小値と最大値との間にある。

証明.(30) $U_1 = -B_{12} A_{23} U_3, U_2 = -B_{22} A_{23} U_3$ より明らか。(終)

Lemma 9. (Maximum principle)

(26)において $F_1 \geq 0, F_2 \geq 0$ の場合には, 解 (U_1, U_2, U_3) の最大値は U_3 の要素の中にある。もしその最大値が (U_1, U_2) の要素のどれか一つとでも等しければ, 解は定数である。

証明.(31) $U_1 = -B_{12} A_{23} U_3 - \frac{4}{5} R^2 B_{11} F_1 - \frac{1}{4} R^2 B_{12} F_2 \leq -B_{12} A_{23} U_3$

(32) $U_2 = -B_{22} A_{23} U_3 - \frac{4}{5} R^2 B_{21} F_1 - \frac{1}{4} R^2 B_{22} F_2 \leq -B_{22} A_{23} U_3$

より明らか。(終)

Lemma 10. (26) の右辺の行列は正則である。

証明. (26) の右辺を 0 ベクトルとしたときの解が 0 ベクトルであることを示せばよい。

$$(33) \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = 0$$

から $U_4 = 0$. したがって 2, 3 行より

$$(34) \quad A_{32} U_2 + A_{33} U_3 = (-A_{32} B_{22} A_{23} + A_{33}) U_3 = 0$$

また Lemma 7 より

$$(35) \quad \sum_j (A_{32})_{ij} = \sum_{j,k} (A_{32})_{ik} (-B_{22} A_{23})_{kj}$$

他方 (14) より A_{34} を除外したとき (A_{32}, A_{33}) は A_{33} の対角要素が復位になつてくるから $-A_{32} B_{22} A_{23} + A_{33}$ も対角復位であつて正則となる。故に $U_3 = 0$.

さらに Maximum principle によつて $U_1 = U_2 = 0$. (終)

さて (14) 式をよく検討すれば、重要な結果を得る。

Theorem. 1. 差分近似方程式 (16) を

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -A_{34} G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} F_1 \\ \frac{1}{4} F_2 \\ \gamma F_3 \end{bmatrix} \Delta^2$$

と書いたとき、左辺の行列は単調である。また $f(P, U) = 0$ つまり右辺の次のベクトルが零ベクトルのときには、

解ベクトル $U' = (U'_1, U'_2, U'_3)$ はベクトル G の要素の荷重平均に等しい要素からなる。ゆえに解は与えられた境界条件 $g(P)$ の最大値と最小値との間の値をとる。

証明. (14) 式からの計算が長くなるが、根本的には Lemma 6 ~ Lemma 9 の証明と同様にできる。

Theorem. 2. 差分近似方程式 (16) の解は $\frac{\partial f}{\partial u} \geq 0$ のときに誤差 $U_n - u = O(h^4)$ である。

証明については著者の論文 [1] を参照されたい。

以上

参考文献

Bers, L. [1]: On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type. J. Res. Nat. Bur. Stand. 51, 229-236 (1953).

Bramble, J. H., - B. E. Hubbard [1]: New monotone type approximations for elliptic problems. Math. Comp., 18, 349-367 (1964).

Collatz, L. [1]: The Numerical Treatment of Differential Equations. Springer, Berlin, 1966.

Courant, R. - D. Hilbert [1] Method of Mathematical Physics II. Interscience, New York, 1962.

Hakashima, K. [1]: Difference analogue for nonlinear elliptic

partial differential equations with high order of accuracy.
Memoirs of the School of Science & Engineering, Waseda University
No. 32, 77-86 (1968).

Pohožaev, S. I.: [1]: The Dirichlet problem for the equation
 $\Delta u = u^2$. Soviet Math., 1960, 1143-1146.

Greenspan, D.: [1]: Introductory Numerical Analysis of
Elliptic Boundary Value Problem. Harper & Row.
New York, 1966