数理解析研究所講究録
第73巻 1969年 1-10

函数論における近似の問題

京大理　西野利雄

§1　序

函数論とは"実際に函数を作って，それで研究するものである"と云われる．函数論における近似の問題は，そのような中で，主に函数を作る手段として位置づけられているように思われる．この問題は通常次のような型を取る．即ち，

複素変数 (x) の空間のある領域 $\mathcal{D}$ と，$\mathcal{D}$ では正則な函数のある族 $\mathcal{F}$ が与えられているとき，$\mathcal{D}$ で正則な任意の函数 $f(x)$ に対し，$\mathcal{D}$ のコンパクト集合 E と正の数 ε を任意に与えて E で

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

となるような函数 $\varphi(x)$ を $\mathcal{F}$ に求めること．

このようなことが出来るためには，領域 $\mathcal{D}$ と函数族 $\mathcal{F}$ の間にある関係がなければならない．この関係を具体的にみつけ出すことが函数論における近似の問題の主要な課題である．

§2　一般論

このような問題を統一的に取り扱うには，1950年に岡先生によって確立された次の補題が基本的である．

$\mathfrak{D}$を複素変数 $(x_1,\cdots,x_n)$ の空間の単葉な領域とし，$\mathfrak{P}$を$\mathfrak{D}$のコンパクト集合で

$$|x_i| \leqq r_i \quad (i=1\cdots n), \quad |f_j(x)| \leqq 1 \quad (j=1\cdots\nu)$$

と定義されたものとする．ここでr_iは適当な正の数，$f_j(x)$は$\mathfrak{D}$で正則な函数である．このような集合を以後解析多面体と呼ぶ．次に$n+\nu$個の変数 $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_\nu)$ の空間に多重円筒

$$\Gamma: \quad |x_i| \leqq r_i \quad (i=1,\cdots,n), \quad |y_j| \leqq 1 \quad (j=1\cdots\nu)$$

を考え，この中にn次元の解析集合

$$\Sigma: \quad y_j = f_j(x) \quad (j=1\cdots\nu), \quad (x)\in \mathfrak{P}$$

を作る．このとき当然$\mathfrak{P}$の点とΣの点とは上の式で1:1に対応し，$\mathfrak{P}$の境界点に対応するΣの点はΓの境界上にある．このような状勢のもとに次の補題が得られる．

$\mathfrak{P}$で正則な任意の函数 $\varphi(x)$ にたいし，必ずΓで正則な函数 $\Phi(x,y)$ を求めて

$$\Phi(x, f(x)) = \varphi(x)$$

となるように出来る．[1)]

この補題の証明は相当大がかりであるため，ここではふれない．なお領域が単葉であることは不可欠な条件ではないが

多葉域にすると少し別な問題が生じるので、説明を簡単にするために、ここでは単葉とした。以下では単葉な領域しか考えない。

この補題の意味することは次のようである。即ち、$\mathfrak{P}$で正則なある函数$\varphi(x)$にたいして、上のような正則函数$\Phi(x, y)$を求めるならば、この函数はPの形よりPで一様収斂するx_iとy_jの巾級数に展開出来る。それを適当な所で打ち切って、y_jの所え$f_j(x)$を代入すれば、$\varphi(x)$は$\mathfrak{P}$でx_iと$f_j(x)$の多項式で一様に近似されたことになる。このことより次の主定理を得る。

主定理. 複素変数(x)の空間のある領域$\mathfrak{D}$と、$\mathfrak{D}$で正則な函数のある族$\mathfrak{F}$が与えられたとき、もし$\mathfrak{D}$の任意のコンパクト集合Eにたいし、$\mathfrak{F}$に属する函数によって作られる解析多面体で、Eを含み$\mathfrak{D}$の完全内部に含まれるものが作られるならば、$\mathfrak{D}$で正則な任意の函数は、$\mathfrak{D}$の任意の完全内部でx_iと$\mathfrak{F}$に属する函数との多項式で、いくらでも近似することが出来る。

領域$\mathfrak{D}$がこのような性質をもつとき、我々はそれを$\mathfrak{F}$に関して凸状な領域と云う。特に$\mathfrak{F}$が多項式全体よりなるときは$\mathfrak{D}$を多項式凸状と云ひ、又$\mathfrak{D}$が$\mathfrak{D}$では正則な有理函数全体の作る族に関して凸状であるか、またはそのような領域の増大

列の極限になっているときは，$\mathfrak{D}$を有理凸状と云う．なお2変数以上の空間では，正則函数の自然存在域即ち正則域は任意でないことがわかっているので，$\mathfrak{D}$としては普通正則域しか考えない．しかもこのとき，$\mathfrak{D}$は$\mathfrak{D}$で正則な函数全体の作る族に関して凸状，即ち正則凸状なることがわかっている[2)]ので，主定理の條件は$\mathfrak{D}$が正則域のときは必要條件でもある．

§3 Rungeの定理

函数論における近似の問題の一般論は，現在のところ，上の主定理につきる．ところでこの主定理はこのままの形で非常に有用なものなのであるが，それでもなお，$\mathfrak{D}$と$\mathfrak{F}$の関係として例えば次のような問題にすら答えてはいない．即ち

$\mathfrak{D}$を任意の正則域とするとき，$\mathfrak{F}$としていかなる函数族にまで制限し得るか？

$\mathfrak{F}$として多項式の全体を取るとき，$\mathfrak{D}$にはいかなる條件をつければよいか？

これらの問題は1変数の分野では，よく知られたRungeの定理によって完全に解決されている．それを我々の言葉で云うならば

複素変数zの平面上では，任意の領域が有理凸状である．又ある領域が多項式凸状であるためには，$\mathfrak{D}$が單連結である

ことが必要且つ十分である。

ところが，2変数以上の分野では，この状勢は全く一変して，任意の正則域は必ずしも有理凸状ではない。又ある領域$\mathfrak{D}$が多項式凸状であるためには，$\mathfrak{D}$が単連結であることは十分條件ではなく，そればかりか必要條件ですらない。以下でこのような状勢の差がいかなるところから来るのかを見よう。

これが実はここで取り上げようとしたものである。

§4. 1変数の場合の考察

先ず1変数の場合に，いかにして上のような結果に到達するかを，我々の立場から考察してみよう。

$\mathfrak{D}$を複素変数zの平面上の任意の領域とし，Eを$\mathfrak{D}$の任意のコンパクト集合とする。このとき$\mathfrak{D}$外に有限個の点 $a_1,\cdots,a_\nu$ を取り

$$|z|\leq M, \qquad \left|\frac{\alpha_i}{z-a_i}\right|\leq 1 \quad (i=1,\cdots,\nu)$$

なる形の解析多面体で，Eを含み$\mathfrak{D}$の完全内部に含まれるものを取ることは容易である。ここでα_iは適当な実数である。

このことは，$\mathfrak{D}$が有理凸状であることを直接示している。

また，2点 a, b をz平面上にとり，aを含む，bを中心とした円γをえがくならば，γの外にある任意のコンパクト集合Eにたいし，それを含む解析多面体

$$|z| \leqq M, \qquad \left|\frac{r}{z-b}\right| \leqq 1$$

を考えることによって，主定理より，点 a のみで極をもつ有理函数は点 b のみで極をもつ有理函数によって，E でいくらでも一様に近似されることがわかる。このことより，z 平面に領域 $\mathfrak{D}$ が与えられたとき，$\mathfrak{D}$ の任意のコンパクト集合 E にたいして，$\mathfrak{D}$ の各境界点より E と交はることなく無限遠点に達する曲線がえがけるならば，$\mathfrak{D}$ は多項式凸状であると云える。このようなことが出来るためには，$\mathfrak{D}$ が単連結でありさえすればよい。なおこの条件の必要性は多項式が全平面で正則なことから来る。ここで注意すべきことは，1 変数の場合は点と点の動きのみきが問題になっていることである。

§5　多変数の場合

同様の考え方を多変数の場合に適用してみよう。そのためには，1 変数のとき点であったものを，多項式の 0 点の集合即ち代数面におきかえればよい。先ず複素変数 $(x_1, \cdots, x_n)$ の空間のある正則域 $\mathfrak{D}$ が，有理凸状であるためには，E を $\mathfrak{D}$ の任意のコンパクト集合とするとき，$\mathfrak{D}$ 外の各点 p にたいし，p を通り E と交はらない代数面が少なくとも 1 つ存在すればよい。実際もしそうなっているならば，$\mathfrak{D}$ 外の点を通る適当な有限個の代数面を与える適当な多項式 $P_j(x)$ $(j=1,\cdots,\nu)$ をつか

って，

$$|x_i| \leqq r_i \quad (i=1\cdots n); \quad \left|\frac{1}{P_j(x)}\right| \leqq 1 \quad (j=1\cdots\nu)$$

なる形の解析多面体で$\mathfrak{D}$を内部から近似することが出来る．なおこの條件の必要性は$\mathfrak{D}$が正則凸状なることより明らかであらう．そこで任意の正則域がこの條件をみたすかどうかが問題となる．

１９４１年，岡先生は次のような例を示してこのことが必ずしも成立しないことを示された。[3]

２複素変数x, yの空間で続領域

$$r_1 < |x| < 1, \qquad r_2 < |y| < 1 \qquad (r_1 + r_2 > 1)$$

を考え，ここから

$$|y - x + 1| < \rho \qquad I(x) > 0 \qquad \left(\rho < \frac{1-r_1}{3}\right)$$

なる部分をのぞきさった領域を$\mathfrak{D}$とする．この領域はたしかに正則域である．$\mathfrak{D}$の$y = y_0$による切口は$I(y_0) < 0$ならば円環$r_1 < |x| < 1$，又$I(y_0) > 0$ならばこの円環より$|y_0 - x + 1| < \rho$なる円に含まれる部分をのぞきさったものである．この円はy_0と共に動くが，y_0が例えば

$$|y_0| = \frac{1+r_2}{2}, \qquad |y_0 + 1| = \frac{1+r_2}{2}, \qquad I(y_0) > 0$$

をみたすときは，上の円環に完全に含まれてしまう．このとき代数面の形より，上のようにのぞかれた点を通って$\mathfrak{D}$を交はらないような代数面は決して存在しないことがわかる．

なおこのような領域は、例え単連結であっても存在することをWermerが示している[4]。即ち正則域は単連結であっても多項式凸状どころか有理凸状ですらないことがあるのである。

そこで更に有理凸状な正則域が多項式凸状になるための條件をみよう。$\mathfrak{D}$をそのような領域とし、Eを$\mathfrak{D}$の任意のコンパクト集合とするとき、E外の各点pにたいし、pを通りEと交はらないような代数面の内、それを代数面であることを保ちながら、Eと交はることなく連続的に変形して無限遠までもって行けるものが少なくとも1つあることが必要且つ十分な條件である。実際多項式 $P_1(z)$ と $P_2(z)$ の0面として定義された2つの代数面 S_1 と S_2 とがあり、S_1 は解析多面体

$$\mathfrak{P} \ : \quad |z_i| \leqq r_i \quad (i=1,\dots,n); \ \left|\frac{1}{P_2(z)}\right| \leqq 1$$

の外にあるならば、S_1 のみで極をもつ有理函数は、S_2 のみで極をもつ有理函数で、$\mathfrak{P}$ においていくらでも一様に近似される。このことより上の條件が十分であることがわかる。必要なことは前と同様である。ところで、このような條件をみたす領域は必ずしも単連結である必要はない。実際、x, y の空間で

$$|x| < 2, \qquad |y| < 2, \qquad |xy-1| < \rho$$

で定義される領域は、確かに多項式凸状であるが、ρが十分小さいときは単連結ではない。それでは単連結であることが

十分条件であろうか？　もしある領域$\mathfrak{D}$が多項式凸状であって且つ単連結であるならば、$\mathfrak{D}$の任意のコンパクト集合Eにたいし，Eと交はらない代数面はすべて前のようにして連続的に無限遠まで変形していける。このことを使って次の例がある。

　複素変数xとyの空間で積領域

$$1<|x|<M, \qquad |y|<\frac{1}{2}$$

より代数面の族

$$tx^2-(2t-1)x-y=0 \qquad 0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$$

に含まれる点を全部のぞいた領域を$\mathfrak{D}$とする。これはたしかに有理凸状で単連結な正則域である。$\mathfrak{D}$の$y=y_0$による切口は，円環$1<|x|<M$より

$$x=\frac{1}{2t}\left\{(2t-1)\pm\sqrt{(2t-1)^2-4ty_0}\right\} \qquad 0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$$

で与えられる曲線をのぞいたもので、具体的にえがける。この切口を$y=-\frac{2}{5}$の近傍でみることより，$\mathfrak{D}$のコンパクト集合Eを十分大きくとるならば、$\mathfrak{D}$外にある代数面

$$x=0$$

をEと交はることなく連続的に無限遠点え変形して行くことは決して出来ないことがわかる。[5)]

　これらの例より，多変数の分野では，ある正則域が有理凸

状又は多項式凸状であるための条件を求めようとすれば、次元の高さからくる領域の形の自由さのみならず、代数面の形の非常な特殊性をも考慮せねばならぬことがわかる。そしてこの条件はおそらく位相的なものではなり。1変数のとき、位相的であり得たのは代数面が実は点であったと云う非常な特殊性から来ているのである。

1) K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* Iwanami Shoten. 1961. P 72 ~ 157

2) H. Cartan, P. Thullen, *Regularitäts- und Konvergenz-bereiche,* Math. Annalen. 1932.

3) K. Oka, loc. cit. P. 40

4) J. Wermer, *An example concerning polynomial convexity,* Math. Annalen 139 147-150 (1959)

5) T. Nishino, *Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes,* J. Math. Kyoto Univ. 6-1 (1966) 85-90.