数理解析研究所講究録
第73巻 1969年 35-54

Exponential Sum

京大 数研　栗原光信

§0. 序

Weierstrassの多項式近似定理、即ち「有限区間$[a, b]$上のすべての連続函数$f(x)$は多項式によっていくらでも精密に近似できる」はよく知られている。この定理を出発点として、多項式近似に関して多数の人々が色々な方向に拡張を行っている。その中の一つとしてMüntzによる拡張が有名である。彼は次の形の定理を証明した。「$\lambda_0=0$, λ_1, λ_2, $\cdots\cdots$, λ_n, $\cdots\cdots$を無限大に発散する正の増加実数列とするとき、区間$[0, 1]$上のすべての連続函数$f(x)$が、$x^{\lambda_0}=1$, x^{λ_1}, x^{λ_2}, $\cdots\cdots$, x^{λ_n}, $\cdots\cdots$の有限個の一次結合$p(x)=a_0+a_1x^{\lambda_1}+\cdots\cdots+a_nx^{\lambda_n}$でいくらでも精密に近似できるための必要十分条件は、$\sum 1/\lambda_\nu=+\infty$となることである。」今この定理において$x=e^{-2\pi X}$なる変数変換を施すと、区間は$[0, +\infty)$になりその上の連続函数$F(X)$がある Dirichlet 多項式$P(X)=a_0+a_1e^{-2\pi\lambda_1 X}+\cdots\cdots$

$\cdots + a_n e^{-2\pi\lambda_n x}$ によっていくらでも精密に一様近似されるための必要十分条件が、$\sum 1/\lambda_\nu = +\infty$ ということになる。このような exponential type の函数近似の問題として、Müntz の定理を拡張し、もっと一般の空間で論じた L. Schwarz [2] の結果をここで紹介する。もちろん紹介できるのはその一部分であるが、彼の基本的な考え方はこの部分から良くうかがえると思う。

§1. 用語の説明

E を複素数体上の topological vector space とする。

定義 1. E のベクトル列 $[e_\nu]_{\nu \in N}$ が E で total であるとは、すべての $x \in E$ に対し少くとも一つの表現

(1) $x = \lim_j \sum_\nu (x_\nu)_j e_\nu$

をもつことである。但し、$\sum$ は e_ν の有限個の和を示す。このとき、x は $[e_\nu]$ に従属しているという。

定義 2. $[e_\nu]_{\nu \in N}$ が libre であるとは、次の互に同値な条件のどれか一つを満すことである。

1° $[e_\nu]_{\nu \in N}$ に含まれるどの e_ν も、残りの $[e_\mu]_{\mu \neq \nu}$ によって張られる部分空間の closure に含まれない。

2° $\lim_j \sum_\nu (x_\nu)_j e_\nu = 0$ ならば、すべての ν に対して、$\lim_j (x_\nu)_j = 0$ となる。

3° すべての表現 $x=\lim_j \sum_\nu (x_\nu)_j e_\nu$ に対し、$\lim_j (x_\nu)_j$ がどの ν についても存在する。

定義3. $[e_\nu]_{\nu\in N}$ が total でかつ libre のとき、base という。このとき任意の $x\in E$ に対し表現(1)が与えられ、$x_\nu=\lim_j (x_\nu)_j$ が定まる。この x_ν を x の成分という。

またこのとき、

(2) $\quad x \sim \underset{\nu\in N}{S}\, x_\nu e_\nu$

とかき表わす。

Hahn-Banachの定理から、$[e_\nu]_{\nu\in N}$ が libre であることと同値な事柄として、

(3) $\quad B[f_\mu, e_\nu] = \delta_{\mu,\nu}$

を満すような $[f_\mu]_{\mu\in N} \subset E'$ が存在する。但し、E' は E の共役空間で、B は E と E' の間の双一次形式である。$[e_\nu]_{\nu\in N}$ が E の base ならば(3)を満すような $[f_\mu]_{\mu\in N}$ は一意的に定まる。このとき、(3)を満すような $[f_\mu]_{\mu\in N}$ を biorthogonal normal system という。$x\in E$ の成分 x_ν は $x_\nu=B[f_\nu, x]$ で与えられる。

Laplace変換は次の公式で与えられる。

(4) $\quad G(\lambda)=\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x} f(x)\,dx\ ;\ \lambda=\sigma+i\tau$

例えば、$f(x)\in L^2(0,+\infty)$ の場合、$e^{-\varepsilon x}f(x)\in L^1$ となり、$G(\lambda)$ は $\sigma>0$ で正則となる。さらに、すべての半平面

$\sigma \geqq \varepsilon > 0$で有界かつ$|\lambda| \to \infty$のとき0に近づく。$\sigma$を固定して$G(\sigma+i\tau)$を$\tau$の函数と考えると、$G(\lambda)$は$x \geqq 0$で$e^{-2\pi\sigma x}f(x)$に等しく$x<0$で0に等しい函数のFourier変換となる。即ち、

$$G(\sigma+i\tau) = \int_0^\infty [e^{-2\pi\sigma x}f(x)]e^{-2\pi i\tau x}dx\ 。$$

従って、Fourierの逆変換公式から

$$(5) \qquad f(x)e^{-2\pi\sigma x} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma+i\tau)e^{2\pi i\tau x}d\tau$$

となる。そこで、

定義 4. $H^p \equiv \left\{ \begin{array}{l} G(\lambda)\ ;\ \lambda=\sigma+i\tau,\ \sigma>0\text{で正則}, \\ \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|G(\sigma+i\tau)|^p d\tau \text{ が } \sigma>0 \text{ で} \\ \qquad \text{有限} \end{array} \right\}$

$$\|G\|_{H^p} \equiv \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\sigma+i\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

を導入すると、$G(\lambda) \in H^q\ (1 \leqq q \leqq 2)$ならば、(5)は意味をもち、Parseval-Rieszの不等式から、

$$(6) \qquad \|f(x)e^{-2\pi\sigma x}\|_{L^{q'}(0,+\infty)} \leqq \|G\|_{H^q}$$

が得られる。但し、$q' = q/(q-1)$。変換(5)はH^qから$L^{q'}$への連続線型写像である。一方、$F \in C'(0,+\infty)$については、Laplace-Stieltjes変換

$$G(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\lambda x}dF(x)$$

が対応し、$L^1(0,+\infty)$とH^∞との間で同じ考察が可能である。尚一般に$C(A,B)$は両端で0になる連続函数の全体とする。

§2. Müntz の定理の一般化

定理 1. $\Lambda=[\lambda_\nu]$ ($\nu=1,2,3,\cdots\cdots$) は正の増加実数列で、$\lim\limits_{\nu\to+\infty}\lambda_\nu=+\infty$ とする。

1° $\sum 1/\lambda_\nu=+\infty$ ならば、$[e_\nu=e^{-2\pi\lambda_\nu x}]$ は、$p<+\infty$ のとき $L^p(0,+\infty)$ で又 $p=+\infty$ のとき $C'(0,+\infty)$ で total となり、どのベクトル e_ν もその他のベクトル $[e_\mu]_{\mu\neq\nu}$ に従属している。

2° $\sum 1/\lambda_\nu<+\infty$ ならば、$[e_\nu]$ は、$p<+\infty$ のとき $L^p(0,+\infty)$ で又 $p=+\infty$ のとき $C(0,+\infty)$ で total とはならないが、libre である。

この定理を証明しよう。$[e_\nu=e^{-2\pi\lambda_\nu x}]$ が total になるためには、次の事柄が成立すれば必要十分であることは容易にわかる。

a) $p<+\infty$ のとき、$\varphi(x)\in L^{p'}(0,+\infty)$, $p'=p/(p-1)$ が

$$\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x}\varphi(x)\,dx=0 \quad (\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots) \tag{7}$$

を満すならば、必ず $\varphi(x)\equiv 0$ となる。

b) $p=+\infty$ のとき、$\Phi\in C'(0,+\infty)$ が

$$\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x}\,d\Phi(x) \quad (\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots) \tag{8}$$

を満すならば、必ず $\Phi=0$ となる。

1° の証明。

$$J(\lambda)=\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x}\cdot\varphi(x)\,dx \quad (p<+\infty)$$

$$J(\lambda)=\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x}\,d\Phi(x) \qquad (p=+\infty)$$

とおく。$J(\lambda)$が上の条件(7)と(8)を満しているとしよう。$J(\lambda)$ $(\lambda=\sigma+i\tau)$は$\sigma>0$で正則、$\sigma\geqq\varepsilon>0$で有界、$\lambda=\lambda_\nu$で0になる。ここで、$J(\lambda)\not\equiv 0$とすると、Blashke の正則函数の零点に関する定理を用いると、

$$\sum_{\lambda_\nu\neq a}\log\left|\frac{1+(a-2\varepsilon)/\lambda_\nu}{1-a/\lambda_\nu}\right|<+\infty \quad (a>\varepsilon)$$

という関係式を得る。$\lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=+\infty$だから、上の関係式は$\sum 1/\lambda_\nu<+\infty$と同値になる。これは仮定に矛盾するから、$J(\lambda)\equiv 0$、従って$\varphi(x)\equiv 0$ $(p<+\infty)$かつ$\Phi=0$ $(p=+\infty)$である。故に、$[e_\nu]$はtotalである。$[e_\nu]_{\nu\in N}$のどれかを一つ除いても、$\sum 1/\lambda_\nu=+\infty$の性質は変らないから、その$e_\nu$は残りのベクトルに従属している。

2° の証明。 $\sum 1/\lambda_\nu=S$とおく。

$$(9) \qquad W(\lambda)=\prod_\nu\left(\frac{1-\lambda/\lambda_\nu}{1+\lambda/\lambda_\nu}\right)$$

は半平面$\{\lambda=\sigma+i\tau\,;\,\sigma>0\}$で、$|W(\lambda)|\leqq 1$。$\sigma=0$上で連続かつ$|W(\lambda)|=1$。 $J(\lambda)=W(\lambda)/(1+\lambda)^2$とおく。明らかに、$J(\lambda_\nu)=0$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$。さらにすべての$p\geqq 1$に対して、$J(\lambda)\in H^p$である。とくに$1\leqq p\leqq 2$に対しては、Laplace変換の性質(5)によって$\varphi(x)\in L^{p'}(0,+\infty)$

($p' \geqq 2$) が定まり、

$$J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x}\varphi(x)\,dx$$

とかける。また同時に、$\varphi(x) \in L^{p'}$ ($1 \leqq p' < 2$) が示され得る。それは、公式(5)と(6)及び $J(\lambda)$ の具体的な形を用いることにより、不等式

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|^{p'} dx \leqq \|J\|_{H^1}^{p'} + k\|J\|_{H^2}^{p'}(2S+2)^{p'}$$

が導かれるからである。但し、k は定数である。この $\varphi(x)$ は条件(7)と(8)($d\Phi(x) = \varphi(x)\,dx$ とおく)を満たしているが、恒等的に0ではない。従って $[e_\nu]$ は total ではない。一方、$J(\lambda)$ は $\lambda = \lambda_\nu$ しか零点をもたない。従って、$[e_\nu]_{\nu\in N}$ のうちどれか e_μ を除いても $\sum_{\nu\neq\mu} 1/\lambda_\nu < +\infty$ の性質は変らないから、改めて $J(\lambda)$ を作れば残りの $[e_\nu]_{\nu\neq\mu}$ が total でなくしかも $J(\lambda_\mu) \neq 0$ とできる。故に e_μ は残りの $[e_\nu]_{\nu\neq\mu}$ の張る部分空間の closure に含まれない。以上で定理1が示された。

これから直ちに、$[e_\nu]_{\nu\in N}$ による biorthogonal normal system を構成することができる。

$$(10) \qquad J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{J'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

とおくと、次の結果が得られる。

$$J_k(\lambda_j) = \delta_{k,j},$$

$$(11)\quad \begin{cases} J_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x}\varphi_k(x)\,dx, \\ \varphi_k(x)\in L^{p'}(0,+\infty),\quad 1\leqq p'\leqq+\infty \\ p'\geqq 2 \text{ のとき、} \|\varphi_k(x)\|_{L^{p'}}\leqq\|J_k\|_{H^p}\leqq C_1/|J'(\lambda_k)| \\ 1\leqq p'<2 \text{ のとき、} \|\varphi_k(x)\|_{L^{p'}}\leqq(C_2 S+C_3)/|J'(\lambda_k)| \end{cases}$$

但し C_1, C_2, C_3 は $\Lambda=[\lambda_\nu]$ に関係する定数である。

$p=+\infty$ のときは $d\Phi_k(x)=\varphi_k(x)dx$ とする。

§3. $A^p(\Lambda)$ の考察

定義 5. $[e_\nu=e^{-2\pi\lambda_\nu x}]$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ のすべての有限個の元によって張られる空間の L^p $(p<+\infty)$ 又は C $(p=+\infty)$ closure を $A^p(\Lambda)$ とおく。

前節迄の結果から $\sum 1/\lambda_\nu<+\infty$ のとき、$F(x)\in A^p(\Lambda)$ に対して

$$(12)\qquad F(x)\sim \underset{\nu}{S}\, c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu x}$$

と表わすことができる。c_ν は $A^p(\Lambda)$ 上の連続な線型汎函数で、L^p $(p<+\infty)$ 又は C $(p=+\infty)$ 上に拡張でき、それらは

$$\varphi_k\in L^{p'}\ (p<+\infty),\quad \Phi_k\in C'\ (p=+\infty)$$

で定められて、

$$(13)\qquad c_k=\int_0^\infty \varphi_k(x)F(x)\,dx$$

とかける。このとき、

$$(14)\qquad |c_k|\leqq\|F\|_{L^p}\|\varphi_k\|_{L^{p'}}\leqq\frac{C}{|J'(\lambda_k)|}\|F\|_{L^p}$$

が成立する。CはΛに関係する定数である。

展開式(12)は具体的にどのような収束になっているのだろうか。その解答を知る上で(13)と(14)の式は重要な役割を演ずるのであるが、その他に$\Lambda=[\lambda_\nu]$に関する一つの概念を用いることにする。それは、Bernstein [1]の導入によるΛのcondensation index Δという概念である。

定義6. $\Lambda=[\lambda_\nu]$ $(\nu=1, 2, \cdots\cdots)$ のcondensation index Δとは

$$(15)\qquad \Delta \equiv \limsup_{\nu\to\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \log |1/E(\lambda_\nu)|$$

$$E(\lambda)=\prod_\nu \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)。$$

$\Delta \neq 0$ときと、$\Delta=0$のときで(12)の展開式の収束の方法が異なるのである。$\Delta=0$となるような$\Lambda=[\lambda_\nu]$は、例えば$\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu \geqq q>0$なる定数$q$が存在する場合が含まれる。従って$\lambda_\nu \equiv \nu$のときもその例である。次の定理が証明できる。

定理2. $\sum 1/\lambda_\nu < +\infty$でかつ$[\lambda_\nu]_{\nu\in N}$のcondensation index Δが0ならば、すべての$F(X)\in A^p(\Lambda)$は次の性質をもつ。

1° $F(X)$は$(0, +\infty)$で解析的であり、半平面$\{Z=X+iY\,;\,X>0\}$で正則な函数$F(Z)$に拡張できる。

2° $F(z)$はDirichlet展開

$$F(z)=\sum_\nu c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu z}$$

をもち、$\sum|c_\nu|e^{2\pi(\lambda_1-\lambda_\nu)x}$がすべての半平面$x\geqq\varepsilon>0$で一様収束している。$c_\nu$は$F$の$[e_\nu=e^{-2\pi\lambda_\nu x}]$によるComponentである。

3° $$e^{2\pi\lambda_1 x}|F(z)|\leqq\sum|c_\nu|e^{2\pi(\lambda_1-\lambda_\nu)x}\leqq C(x)\|F\|_{L^p}$$

が成り立つ。但し、$C(x)$は任意の半直線$x\geqq\varepsilon>0$で有界である。

4° 多項式列$F_j(x)=\sum_\nu(c_\nu)_j e^{-2\pi\lambda_\nu x}\in A^p(\Lambda)$が$F$に$L^p$−収束しているならば、$F_j(z)$は$F(z)$に任意の半平面$x\geqq\varepsilon>0$で一様収束し、その平面で一様に

$$\lim_j e^{2\pi\lambda_1 x}[\sum|(c_\nu)_j-c_\nu|e^{-2\pi\lambda_\nu x}]=0$$

が成立する。

一般に$\Delta\neq 0$の場合は上の定理は必ずしも成立しない。例えば、

$$\begin{cases}2\pi\lambda_{2n}=n^2, \quad 2\pi\lambda_{2n+1}=n^2+e^{-n^4}\\ F(z)=\sum_\nu c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu z}\\ c_{2n}=e^{n^3}, \quad c_{2n+1}=-e^{-n^3}\end{cases}$$

このDirichlet級数は至る所発散である。しかし、2つづつ項をまとめて、

$$g_n(z)=c_{2n}e^{-2\pi\lambda_{2n}z}+c_{2n+1}e^{-2\pi\lambda_{2n+1}z}$$

とすると、$\sum_n |\mathfrak{g}_n(Z)|$ は任意の角領域 (α, K) 即ち

$$X>\alpha,\ |Y/(X-\alpha)|\leqq K,\ (\alpha, K>0)$$

で一様収束することがわかる。そこで一般的に次の定理が成立する。

定理 3. $\sum 1/\lambda_\nu<+\infty$ とする。$\Lambda=[\lambda_\nu]\ (\nu=1,2,\cdots\cdots)$ を連続する項を含むあるグループ列 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_n, \cdots\cdots$ に分割すると、すべての $F(X)\in A^p(\Lambda)$ は次の性質を満すようにできる。

1° $F(X)$ は $(0,+\infty)$ 上で解析的であり、半平面 $\{Z=X+iY;\ X>0\}$ で正則な函数 $F(Z)$ に拡張できる。

2° $F(Z)$ は Dirichlet 展開 $F(Z)=\sum_\nu c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ をもち、c_ν は F の $[e_\nu=e^{-2\pi\lambda_\nu X}]$ による component である。もし、

$$\mathfrak{g}_n\langle F(Z)\rangle=\sum_{\lambda_\nu\in\mathfrak{g}_n} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

とおくと、$e^{2\pi\lambda_1 X}\sum_n|\mathfrak{g}_n\langle F(Z)\rangle|$ はすべての角領域 (ε, K) 即ち、$X\geqq\varepsilon>0,\ |Y/(X-\varepsilon)|\leqq K$ で一様収束する。

3° $$e^{2\pi\lambda_1 X}|F(Z)|\leqq e^{2\pi\lambda_1 X}\sum_n|\mathfrak{g}_n\langle F(Z)\rangle|\leqq C(X,Y)\,\|F\|_{L^p}$$

が成立する。但し、$C(X,Y)$ はすべての角領域 (ε, K) で有界である。

4° 多項式列 $F_j(X)\in A^p(\Lambda)$ が F に L^p-収束しているなら

ば、$F_j(z)$ は $F(z)$ にすべての角領域 (ε, K) で一様収束し、その角領域で一様に

$$\lim_j e^{2\pi\lambda_1 X}\sum|a_n\langle F-F_j\rangle|=0$$

が成立する。

§4. 定理2，3の証明の概略

まず、定理2の証明の概略を述べよう。10頁の3°の不等式を導くことがその証明の大部分である。定理の仮定から、(14)の不等式を用いることができるから、

$$(16)\qquad \sum|c_k|e^{2\pi(\lambda_1-\lambda_k)X}\le C'\|F\|_{L^p}\left(1+\sum_{k\ge 2}\frac{e^{2\pi(\lambda_1-\lambda_k)X}}{|J'(\lambda_k)|}\right)$$

を得る。しかるに、$J(\lambda)$の定義（6頁）から、

$$(17)\qquad |J'(\lambda_k)|=\left(\prod_{\substack{\lambda_\nu\in\Lambda\\ \nu\neq k}}\left|\frac{1-\lambda_k/\lambda_\nu}{1+\lambda_k/\lambda_\nu}\right|\right)\frac{1}{2\lambda_k(1+\lambda_k)^2}.$$

「$\{\lambda_k\}$が無限大に発散する正数列」に注意すれば、任意の正数 η に対して、十分大きなすべての λ_k に関し、

$$(18)\qquad \frac{1}{2\lambda_k(1+\lambda_k)^2}\ge e^{-\eta\lambda_k},\quad \prod_{\nu\neq k}\left|1+\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}\right|\le e^{\eta\lambda_k}$$

が成立する。一方、Condensation index Δ が0であることと $[\lambda_k]$ が正の増加数列なることを用いると、(15)の定義式から、任意の正数 η に対して、

(19) $$\prod_{\nu\neq k}|1-\lambda_k/\lambda_\nu| \geq e^{-\eta\lambda_k}$$

が十分大きいすべてのλ_kについて成立する。したがって、任意の正数αに対して、定数$K(\alpha)$を定めると、すべてのkについて、

(20) $$|J'(\lambda_k)| \geq K(\alpha)\, e^{-\alpha\lambda_k}$$

なる評価式を(17)、(18)、(19)から導くことができる。ここで、$\varepsilon=\alpha\lambda_2/[\pi(\lambda_2-\lambda_1)]$とおくと、$X\geqq\varepsilon$を満す$X$については、$X\geqq\alpha\lambda_k/[\pi(\lambda_k-\lambda_1)]$が成り立つから、(16)と(20)より、

(21) $$\sum|c_k|e^{2\pi(\lambda_1-\lambda_k)X}\leq C\|F\|_{L^p}\left(1+\frac{\sum e^{-\alpha\lambda_k}}{K(\alpha)}\right)$$

が得られる。仮定$\sum 1/\lambda_k<+\infty$から、$\lim_{k\to+\infty}\lambda_k/k=+\infty$。したがって、(21)の右辺は有限な値をとるから、11頁の3°の不等式が導かれた。また、複素函数

$$G(Z)=\sum c_k e^{-2\pi\lambda_k Z}\qquad (Z=X+iY)$$

が半平面$X>0$で正則となることも示された。さらに、$P_j(X)\in A^p(\Lambda)$を、$P_j\to F$ (in L^p)なるexponential多項式とすると、今得られた不等式から、

$$|P_j(Z)-G(Z)|\leq C(X)\|P_j-F\|_{L^p}$$

となる。よって、$P_j(X)$は$G(X)$に$X\geqq\varepsilon>0$で一様収束しており、したがって、$F(X)=G(X)$となる。これで、定理2が示されたことがわかる。

次に定理3の証明の概略を述べる。この証明においても、11頁の3°の不等式を導くことがその主要な部分である。簡単のために $1 \leqq p \leqq 2$ の場合を考える。グループ $\mathfrak{g}_1$ はとくに元として λ_1 のみを含むものとする。函数 $\mathfrak{g}_n\langle F(Z)\rangle$ は定理3の2°において定義されているが、その係数 c_ν は(13)によって与えられるcomponentである。そこで、

$$\mathfrak{g}_n\langle \varphi(t, Z)\rangle = \sum_{\lambda_\nu \in \mathfrak{g}_n} \varphi_\nu(t) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

とおくと、(13)から次の不等式が得られる。

$$|\mathfrak{g}_n\langle F(Z)\rangle| = \left|\int_0^t \mathfrak{g}_n\langle \varphi(t, Z)\rangle F(t)\,dt\right|$$
$$\leqq \|\mathfrak{g}_n\langle \varphi(t, Z)\rangle\|_{L^{p'}} \|F\|_{L^p}.$$

(10)によって定義された函数 $J_\nu(\lambda)$ を用いて、

$$\mathfrak{g}_n\langle J(\lambda, Z)\rangle = \sum_{\lambda_\nu \in \mathfrak{g}_n} J_\nu(\lambda) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

とおくと、$\mathfrak{g}_n\langle J(\lambda, Z)\rangle$ は $\mathfrak{g}_n\langle \varphi(t, Z)\rangle$ のLaplace変換になっていて、かつ $\in H^p$ である。とくに $1 \leqq p \leqq 2$ に対しては、Parseval-Rieszの不等式から、

$$\|\mathfrak{g}_n\langle \varphi(t, Z)\rangle\|_{L^{p'}} \leqq \|\mathfrak{g}_n\langle J(\lambda, Z)\rangle\|_{H^p}$$
$$= \|\mathfrak{g}_n\langle J(i\tau, Z)\rangle\|_{L^p(-\infty, +\infty)}.$$

したがって、求めるべき11頁の3°の不等式を導くためには、

$$(22) \qquad \|J_1(\lambda)\|_{H^p} + e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n \geqq 2} \|\mathfrak{g}_n\langle J(\lambda, Z)\rangle\|_{H^p} \leqq C(X, Y)$$

が示されれば十分である。$\|J_1(\lambda)\|_{H^p}$ には X も Y も含まれていないから、(22)の左辺の第2項について考察すればよい。

$\Gamma\mathfrak{g}_n$を、2つの線分（$R_n \leqq |\zeta| \leqq R_{n+1}$, $\mathrm{Arg}\,\zeta = \psi$）と（$R_n \leqq |\zeta| \leqq R_{n+1}$, $\mathrm{Arg}\,\zeta = -\psi$）及び2つの円弧（$|\zeta| = R_n$, $|\mathrm{Arg}\,\zeta| \leqq \psi$）と（$|\zeta| = R_{n+1}$, $|\mathrm{Arg}\,\zeta| \leqq \psi$）で形づくられた閉曲線とする。ただし、$\psi$は$0<\psi<\pi/2$を満すある角度とする。また$\Gamma\mathfrak{g}_n$は$\mathfrak{g}_n$に含まれる$\lambda_\nu$のみをその内部に囲み、他の$\lambda_\nu$は$\Gamma\mathfrak{g}_n$の内部には存在しないとする。留数の定理から、

$$
(23) \qquad \mathfrak{g}_n\langle J(\lambda, Z)\rangle = \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{g}_n} \frac{e^{-2\pi\lambda_k Z}}{(\lambda-\lambda_k)J'(\lambda_k)} J(\lambda)
$$

$$
= J(\lambda)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\mathfrak{g}_n} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\,d\zeta
$$

と表わされる。$\lambda = i\tau$としてよいから、$\Gamma\mathfrak{g}_n$上のζに対しては、$|\lambda-\zeta| \geqq \delta > 0$とできる。したがって、(23)から、

$$
e^{2\pi\lambda_1 X}\sum_{n\geqq 2}\|\mathfrak{g}_n\langle J(\lambda,Z)\rangle\|_{H^p} \leqq \|J(\lambda)\|_{H^p} K(X,Y)/\delta
$$

を考えれば、(22)を導くことができる。ただし、$K(X,Y)$は次の2つの積分の和である。

$$
K_1(X,Y) = e^{2\pi\lambda_1 X}\frac{2}{2\pi}\int_{R_2 e^{i\psi}}^{e^{i\psi}\cdot\infty}\left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right||d\zeta|
$$

$$
K_2(X,Y) = e^{2\pi\lambda_1 X}\frac{2}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{R_n e^{-i\psi}}^{R_n e^{+i\psi}}\left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right||d\zeta| .
$$

この$K_1(X,Y)$と$K_2(X,Y)$の評価、即ち任意の角領域(ε, K)で両者が有界なることが示されれば、定理の証明を終るわけで

ある。$K_1(X,Y)$については、定理2の証明の前半の部分とほぼ同様な推論によって示されるのだが、この場合はグループ$\mathcal{G}_n$のとり方には全く無関係である。$K_2(X,Y)$の評価に際しては、グループ$\mathcal{G}_n$のとり方に基本的に関係してくる。それは次のHadamardの極小定理とよばれる結果を用いるからである。

補題1. $E(\lambda)$を位数0の整函数とする。このとき、増加の数列 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n, \cdots\cdots$ を適当に選んで、円環 $r_n \leqq |\lambda| \leqq r_{n+1}$ の中に$E(\lambda)$の零点を少くとも1つ含み、かつ、任意の正数αに対し十分大きなすべてのnについて $\displaystyle\min_{|\lambda|=r_n}|E(\lambda)| \geqq e^{-\alpha r_n}$ が成立するようにできる。[2]

このr_nを我々のR_nとして選ぶことにより、$K_2(X,Y)$の有界性が示されるのである。尚、定理3の詳しい証明は長くなるのでここでは省略する。

§5. 注意3項

1° 定理3の逆が成立する。すなわち次のような定理が得られる。

定理4. $\sum 1/\lambda_\nu < +\infty$ とする。函数 $F(X) \in L^p(0,+\infty)$ $(p<+\infty)$ 又は $\in C(0,+\infty)$ が次の性質をもつならば、すなわち、

(1°) $F(x)$は$(0, +\infty)$上で解析的であり、かつ半平面$X>0$で正則な函数$F(Z)$ $(Z=X+iY)$に拡張できる、
(2°) $F(Z)$はDirichlet展開$F(Z)=\sum_{\nu} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$をもち、
$e^{2\pi\lambda_1 X}\sum_{n}|\mathfrak{y}_n\langle F(Z)\rangle|$がすべての角領域$(\varepsilon, K)$で一様収束する、
を満すならば、$F(x)\in A^p(\Lambda)$であり c_νは libre な system $[e_\nu=e^{-2\pi\lambda_\nu x}]$による$F$の componentである。

2° $[\lambda_\nu]$の condensation index Δが0で、2つの近い要素λ_νと$\lambda_\nu+\varepsilon$がある場合を考える。2つのベクトル$e^{-2\pi\lambda_\nu x}$と$e^{-2\pi(\lambda_\nu+\varepsilon)x}$で生成される平面はまた他の2つのベクトル$e^{-2\pi\lambda_\nu x}$と$[e^{-2\pi\lambda_\nu x}-e^{-2\pi(\lambda_\nu+\varepsilon)x}]/2\pi\varepsilon$で張られている。ここで$\varepsilon\to 0$とすると、これらは$e^{-2\pi\lambda_\nu x}$と$xe^{-2\pi\lambda_\nu x}$に変る。同様にして重複度$\alpha_\nu$の要素$\lambda_\nu$については$\alpha_\nu$個の異なるベクトル、

$$e^{-2\pi\lambda_\nu x},\ xe^{-2\pi\lambda_\nu x},\ \cdots\cdots,\ x^{\alpha_\nu-1}e^{-2\pi\lambda_\nu x}$$

を考えることができる。重複度をもった数列$[\lambda_\nu]$について、system $[e_\nu]$が total であるか否かは級数$\sum_{\nu}\alpha_\nu/\lambda_\nu$の発散か否かによって測られることになる。

3° 函数の定義される区間が有限区間である場合と、$[\lambda_\nu]$が必ずしも正の数列とは限らない場合にも拡張ができる。
$\Lambda=[\lambda_\nu]$を実数列とし、index νは$-\infty$から$+\infty$迄走ると

し、λ_ν も実数として $-\infty$ から $+\infty$ 迄わたる増加数列とする。このとき $\nu>0$ なら $\lambda_\nu>0$、$\nu<0$ なら $\lambda_\nu<0$ $\lambda_0=0$ としてもよい。さらに $\overset{+}{\Lambda}=[\lambda_\nu]_{\nu>0}$、$\overset{-}{\Lambda}=[\lambda_\nu]_{\nu<0}$ とおく。Müntz の一般化された定理として次の定理5が得られ、また、$A^p(\Lambda;A,B)$ の性質を表わす定理としてその次の定理6が得られる。

定理 5. (1) $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu| = +\infty$ ならば、system $[e^{-2\pi\lambda_\nu x}]$ は $L^p(A,B)$ $(p<+\infty)$ 又は $C(A,B)$ $(p=+\infty)$ で total であり、どのベクトルもその他の残りのベクトルに従属している。

(2) $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu| < +\infty$ ならば、上の system は total ではないが、libre になる。

定理 6. $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu| < +\infty$ であるとき、$F(x)\in A^p(\Lambda;A,B)$ であるための必要十分条件は、$F(x)$ が次の形に表わされることである、すなわち、

$$F(x) = \overset{+}{F}(x) + \overset{\circ}{F} + \overset{-}{F}(x),$$

ただし、$\overset{+}{F}\in A^p(\overset{+}{\Lambda};A,+\infty)$、$\overset{\circ}{F}=$定数、$\overset{-}{F}\in A^p(\overset{-}{\Lambda};-\infty,B)$。

さらに不等式

$$\|\overset{+}{F}(x)\|_{L^p(A,+\infty)} \leqq C\,\|F(x)\|_{L^p(A,B)}$$
$$|\overset{\circ}{F}| \leqq C\,\|F(x)\|_{L^p(A,B)}$$
$$\|\overset{-}{F}(x)\|_{L^p(B,-\infty)} \leqq C\,\|F(x)\|_{L^p(A,B)}$$

が成立する。したがって、

(1) $F(X)$ は (A, B) 上で解析的であり、帯状領域 $A<X<B$ で正則な函数 $F(Z)$ $(Z=X+iY)$ に拡張できる。

(2) $F(Z)$ は Dirichlet-Laurent 級数展開

$$F(Z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

をもち、さらに、$[\lambda_\nu]$ を分割しているグループ列 $\{g_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ を適当に選ぶと $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |g_n\langle F(Z)\rangle|$ が $A<X<B$ で一様収束しているようにできる。

(3) $A<X<B$ で次の不等式が成立する。

$$|F(Z)| \leqq \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |g_n\langle F(Z)\rangle| \leqq C(X, Y)\|F\|_{L^p(A, B)}$$

ただし、$C(X, Y)$ は $A<X<B$ のすべての compact な集合上で有界である。

(4) $F_j(X) \in A^p(\Lambda ; A, B)$ が $L^p(A, B)$ 上で $F(X)$ に収束しているならば、$F_j(Z)$ は $F(Z)$ に $A<X<B$ のすべての compact な集合上で一様収束していて、その上で一様に

$$\lim_{j} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |g_n\langle F_j - F\rangle| = 0$$

が成立する。

参考文献

[1] V. Bernstein ; Leçon sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, Gauthier-Villars, 1933.

[2] L. Schwarz ; Etude des sommes d'exponentielles. Hermann, Paris, 1959.