

## Skorohod "On the local structure of continuous Markov processes" の紹介 II

名古屋大 教養 神田護

### §0. 序

この本文では, Skorohod の上記の題目の論文の一部の簡単な紹介をする。梶田倍之氏による前半の紹介にひきつづき, ここでは後半の前半を扱う。しかし一応独立に書いたので記号は統一していないと思うが, できるだけ原論文に忠実にする。原論文の内容については不備な点がある事と, 結果的にも, ここで紹介する範囲は, M. Motoo-S. Watanabe あるいは H. Kunita-S. Watanabe の結果に含まれる所が多いので証明はつけない。なお後半の後半はその意図は非常に興味深いが筆者には証明できぬ事と 最近東京教育大の小林氏等によりそれに関連した興味深い結果及び Skorohod の主張に対する反例等もでているのでここでは省略させて頂く。

注意 以下で考えている process は, relative compact な domain  $\square$  上の process で原論文の条件をすべてみたしている

るものとする。更に、原論文の前半 1~5 までの主張は全て正しいものとする。

§1.  $M$ -functional の直交性及び完備性

$\Phi_M$  を  $M$ -functional の全体とする。

定義.  $\alpha_t, \beta_t \in \Phi_M$   $\alpha_t$  と  $\beta_t$  が直交する。

$$\begin{aligned} & \Updownarrow \\ & E_x \alpha_t \beta_t = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

この時、 $\alpha_t \perp \beta_t$  とかく。

Prop. 次の性質は、 $\alpha_t \perp \beta_t$  と同等である。

1)  $\langle \alpha, \beta \rangle_t = 0, \quad \forall t \geq 0$

2)  $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}(x) = 0$  ( $0 \in \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$  の 1 つの minima としてとれるとき)

Prop.  $\alpha_t^{(i)}, i=1, 2, \dots \in \Phi_M$  に対して

$$\alpha_t^{(k(1))} \equiv \alpha_t^{(1)}, \quad \alpha_t^{(k(k))} \equiv \alpha_t^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^t \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial \alpha^{(k)j}}(\alpha_s) d\alpha_s^{(k)j}$$

とおけば、 $\alpha_t^{(i)}, i=1, 2, \dots \in \Phi_M$  が  $\alpha_t^{(i)} \perp \alpha_t^{(j)}, i \neq j$  である。

定義 上のようにして得られた  $\alpha_t^{(i)}, i=1, 2, \dots \in \Phi_M$  より直交化して得られた system という。

次に  $\Phi_M$  に位相をいれよう。

定義  $\Phi_M$  の位相;  $\alpha_t^{(n)} \in \Phi_M$  が  $\alpha_t \in \Phi_M$  に収束

するとは 任意の  $t \geq 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} E_x (\alpha_t^{(n)} - \alpha_t)^2 = 0$

となる事である。

注意 原論文では、次の条件になっている。

$$(\star)', \quad E_x(\alpha_t^{(n)} - \alpha_t)^2 \text{ が } \forall t \geq 0 \text{ に対して } \cup \text{ で有界 かつ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_x(\alpha_t^{(n)} - \alpha_t)^2 = 0$$

— 筆者にはその定義では次の定理が示せなかった。

定理 (原論文 Th 6.2)  $\Phi_M$  の完備性;  $\alpha_t^{(n)}, n=1,2,\dots \in \Phi_M, \alpha_t \in \Phi_M,$

$$\alpha_t^{(n)} \rightarrow \alpha_t \text{ in } \Phi_M$$

$\Leftrightarrow$

$$(\star) \quad \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \cup} E_x(\alpha_t^{(n)} - \alpha_t^{(m)})^2 = 0$$

この定理の証明は原論文ではなされてないが(勿論原論文で  $(\star)$  の部分に  $(\star)'$  の  $\alpha_t$  を  $\alpha_t^{(m)}$  で置きかえたものになっている), 筆者が Dynkin の本を真似してやった方法はハンガツである。原論文の条件  $(\star)'$  からは,  $\alpha_t$  の連続性が示せなかった。

定義 (~~原論文 Th 6.3~~)  $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$  が  $\Phi_M$  で完全 (complete) であるとは,  $\forall i$  に対して  $\beta_t \perp \alpha_t^{(i)}$  となる  $\beta_t \in \Phi_M$  は 0 に限る。

定理 (原論文 Th 6.3)  $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$  を完全な互に直交する  $M$ -functional の system とする。その時  $\forall \beta_t \in \Phi_M$  は

$$\beta_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_t^{(j)}}(x_s) d\alpha_s^{(j)}$$

ここで被積分の被乗は  $\Phi_M$  の位相による。

定理 (原論文 Th 6.4) 特に process  $X$  が Feller process として  $A$  はその強 infinitesimal operator とする。その時  $A$  の domain に属する函数の列  $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots}$  があって

$$\hat{\varphi}_i(t) = \varphi_i(x_t) - \varphi_i(x_0) - \int_0^t A \varphi_i(x_s) ds$$

とあれば、 $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1,2,\dots}$  は  $\Phi_M$  で完全となる。

## 7. Maximal functionals. The Rank of a process

定義  $\alpha_t \in \Phi_M$  が  $\beta_t \in \Phi_M$  に subordinate するとは

$$\beta_t = \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x_s) d\alpha_s$$

となる事である。この時  $\beta_t < \alpha_t$  と書く。

定義  $\alpha_t \in \Phi_M$  が maximal  $\iff \alpha_t < \beta_t$  なる常に  $\beta_t < \alpha_t$ 。

定理 (原論文 Th 7.1)  $\{\alpha_t^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}, \alpha_t^{(k)} \in \Phi_M$  を互に直交する完全な system とする。定数  $C_k \neq 0$  があって

$\sum_{k=1}^{+\infty} C_k \alpha_t^{(k)} = \beta_t$  が  $\Phi_M$  で収束するならば、 $\beta_t$  は maximal functional である。

定理 (原論文 Th 7.2)  $\alpha_t \in \Phi_M, \beta_t \in \Phi_M, \beta_t$  は maximal  
その時  $\langle \alpha, \alpha \rangle_t \ll \langle \beta, \beta \rangle_t$

Prop  $\alpha_t$  は maximal,  $\beta_t \in \Phi_M, \langle \alpha, \alpha \rangle_t \ll \langle \beta, \beta \rangle_t$

$\Downarrow$   
 $\beta_t$  は maximal

定理 (原論文 Th. 7.4).  $M$ -functional の列  $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$  が完全であったとする。その時、任意の  $\alpha_t \in \Phi_M$  は、ある maximal functional によって subordinate される。

(そのような maximal functional は次のようなものを選ぶ  
 ばよい)。P2 の Prop. と P4 の定理 (原論文 Th. 7.1) より 少くとも maximal  
 functional は存在するからそれを  $\bar{r}_t$  とする。P4 の定理  
 (原論文 Th. 7.2) より  $\langle \alpha, \alpha \rangle_t \ll \langle r, r \rangle_t$  なる  $\langle \alpha, \alpha \rangle_t = \int_0^t g(\alpha_u) d\langle r, r \rangle_u$   
 とかける。  $\bar{r}_t \equiv \langle r, r \rangle_t - \int_0^t \frac{1}{g(\alpha_u)} d\langle \alpha, \alpha \rangle_u$  とかけば、  
 $\bar{r}_t = \int_0^t g_1(\alpha_u) d\langle r, r \rangle_u$  とかけ、  $\bar{r}_t$  と  $\langle \alpha, \alpha \rangle_t$  は singular なことより  
 $g_1(\alpha_u) = 1$  或  $0$ ,  $d\langle r, r \rangle_u$ -a.e. と合する。  $\beta_t \equiv \alpha_t + \int_0^t g_1(\alpha_u) d\langle r, r \rangle_u$   
 とかけば それを求めたものである。)

定義.  $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$ ,  $\alpha_t^{(i)} \in \Phi_M$  が nondegenerate であるとは、  
 任意の  $\alpha_t^{(k)}$  が  $\{\alpha_t^{(1)}, \dots, \alpha_t^{(k-1)}\}$  によって  $\alpha_t^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t g_i(\alpha_u) d\alpha_t^{(i)}$   
 とあらわされる事がない事である。

注意.  $M$ -functional の system が完全であったとする。  
 その時、maximal functional の system  $\{\beta_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$  で完全  
 かつ nondegenerate, 更に  $\langle \beta^{(i)}, \beta^{(j)} \rangle_t = \langle \beta^{(i)}, \beta^{(j)} \rangle_t$ ,  $\forall i, j$  とした  
 ものをおえらべる。

さて rank の概念を導入しよう。

定義.  $\{\beta_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$  を上の注意によって得られた maximal  
 functional の system とする。

$$\Gamma(x) \equiv \text{rank of } \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \beta^{(1)}}(x), & \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \beta^{(2)}}(x), & \dots \\ \frac{\partial \beta^{(2)}}{\partial \beta^{(1)}}(x), & \frac{\partial \beta^{(2)}}{\partial \beta^{(2)}}(x), & \dots \\ \frac{\partial \beta^{(3)}}{\partial \beta^{(1)}}(x) & \dots & \dots \\ \vdots & & \dots \end{pmatrix}$$

とき、 $\Gamma(x)$  を process の rank という。M-functional の rank 0 process を rank 0 という。

注意  $\Gamma(x)$  &  $\Gamma_1(x)$  を同じ process の rank とする。  
 この時  $\int_0^+ \chi_0(\Gamma_1(x_u) - \Gamma(x_u)) d\sigma_u = 0$ , almost surely, 但し  $\chi_0(k) = 0$  for  $k=0$ ,  $\chi_0(k) = 1$  for  $k \neq 0$ ,  $\sigma_u = \langle \beta, \beta \rangle_u$ ,  $\beta$  は maximal functional とする。原論文の定理 7.5 はそのままでは誤りである。trivial でないどのような条件の下でどのような事になりたつか筆者は知らない。