数理解析研究所講究録
第 74 巻 1969 年 16-26

Skorohod に対する Remark
[harmonic coordinate をとり取す事に関して]

小林道正

1 Skorohod の研究において，rank 1 の process は，drift の変換を通して，harmonic coordinate をとりだすことができて，それと，rank 0 の process として表わされることが示されている。しかしながら，これに対して Motoo が次のような反例を示した。即ち，負の方向では吸収壁 Brown 運動をし，正の方では反射壁 Brown 運動をするような Markov 過程である。
この process は rank 1 であるが，原点において，harmonic coordinate が，drift の変換で，とりだせないことが示された。

そこで，このような特異な点を characterize する事が問題になる。この場合に，ある関数族の中のすべての関数に対して drift の変換で harmonic にできない点として，特異な点を定めることが考えられるが，どのように関数族を定めれば，有意義であるかが，まだはっきりしないため，問題は解決されていない。

ここでは，あるクラスの関数を一つ固定した時に，それを drift の変換で harmonic にできる点とできない点を区別し，それらの点の性質を考える。

2 $\mathfrak{E} = \{ u(\cdot) \,;\, u_1 - u_2 = u \quad u_k$ は class(D) の regular excessive function $\}$

とおく。 u_k に対して harmonic function $u_{k,1}$ と potential $u_{k,2}$ が存在して. $u_k(x) = u_{k,1}(x) + u_{k,2}(x)$

さらに $u_{k,2}$ に対して. positive continuous additive functional $A_t^{[u_k]}$ で $E_x(A_\zeta^{[u_k]}) = u_{k,2}(x)$

をみたすものが存在する。

そこで.
$$A_t^{[u]} = A_t^{[u_1]} - A_t^{[u_2]}$$
とおく。

$$u(x_t(w)) - u(x_0(w)) + A_t^{[u]}$$

は平均 0 の additive functional であることがわかり これを $\hat{u}_t$ と記す。次に

$$\mathfrak{E}_2 = \{ u(\cdot) \,;\, u \in \mathfrak{E} \;,\; \hat{u}_t \text{ が2乗可積分} \}$$

とおく。 non negative additive functional $\langle \hat{u} \rangle_t$ で $E_x \langle \hat{u} \rangle_t = E_x \hat{u}_t^2$ なるものが存在する。

従って, $u \in \mathfrak{E}_2$ に対して.

$$u(x_t) - u(x_0) = \hat{u}_t - A_t^{[u]}$$
となっている。

ここで.次の事を仮定する。

$A_t^{[u]}$ は $\langle \hat{u} \rangle_t$ に関して絶対連続である。即ち. $\mathcal{F}(S)$ m'ble な関数 $a(x)$ が存在して.

$$A_t^{[u]} = \int_0^t a(x_s)\, d\langle \hat{u} \rangle_s$$
となっている。

$$B[0,t] = B_t^{[u]} = \int_0^t a(x_s)^2 d\langle \hat{u} \rangle_s$$ とおく。

$B_t^{[u]}$ は non-negative additive functional である。

[定義1]　$\sigma = \sigma^{[u]} = \sup\{t > 0 ;\ B[0,t] < \infty\}$

σ は Markov time であるがわかる。

Blumenthal の 0-1 law によって

$$P_x\{\sigma = 0\} = 0 \quad \text{or} \quad 1$$

であるから次の定義ができる。

[定義2]

x が $[u]$-regular point とは　$P_x(\sigma^{[u]} = 0) = 0$

x が $[u]$-singular point とは　$P_x(\sigma^{[u]} = 0) = 1$

regular point の全体を K とし singular point の全体を K^c とする。

3

はじめに、regular point から出れば、σ までは、drift の変換で harmonic にできる事を示す。

[定理1]

$u \in \mathcal{E}_2$ とし、x を regular point とする。このとき、functional β_t と $T_n \uparrow \sigma$ なる Markov time の sequence が存在し、$\beta_{t \wedge T_n}$ が M-functional になり、

$$E_x e^{\beta_{t\wedge T_n} - \frac{1}{2}\langle \beta \rangle_{t\wedge T_n}} = 1 \quad \text{かつ}$$

$$E_x e^{\beta_{t\wedge T_n} - \frac{1}{2}\langle \beta \rangle_{t\wedge T_n}} u(x_{t\wedge T_n}) = u(x)$$ が成り立つ。

証明には次の [Lemma] を用いる。

[Lemma]

β_t, γ_t を bounded M-functional とし、さらに $\langle\beta\rangle_t$ が bounded とする。このとき

$$E_x e^{\beta_t - \frac{1}{2}\langle\beta\rangle_t} = 1$$

$$E_x e^{\beta_t - \frac{1}{2}\langle\beta\rangle_t}(\gamma_t - \langle\gamma, \beta\rangle_t) = 0$$

この Lemma は「確率積分の変換公式」によって示される。

T_n の作り方だけ示しておく。

$$\sigma_n = \sup\{t : B[0,t] \leq n\}$$ とおくと

$$\beta_t^n = \int_0^t a(x_s)\chi\{t < \sigma_n\} d\hat{u}_s$$ が存在する。

$t < \sigma(w)$ なる t に対しては $t < \sigma_n(w)$ なる n が存在し、$m \geq n$ なる任意の m に対して、$\beta_t^m = \beta_t^n$ だからこの値を β_t とおく。すると $\beta_{t\wedge\sigma_n} = \beta_t^n$ がわかる。

$$\sigma(m,n) = \sup\left\{t : t \leq \sigma_n,\ \sup_{s\leq t}|\beta_s| \leq m,\ \sup_{s\leq t}|\hat{u}|_s \leq m,\ A_t^{[u]} \leq m\right\}$$

とおくと、

n に対して次のような m が存在する。

$$P_x\left(\sigma(m,n) < \sigma_n - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$

この m をとって、$T_n = \sigma(m,n)$ とおけばよい。

あとは Lemma の γ を $\hat{u}$ でおきかえれば定理が容易に示される。

4 ここでは K が fine open である事を示す。
即ち regular point からでれば、しばらくは singular point へは達しないで、K の中だけ動く。

[定理2]

x を regular point とするとき、次のような $\mathcal{B}(S)$-可測集合 $V(x)$ が存在する。 $V(x) \ni x$、 $V(x) \subset K$

$$P_x(\tau(V(x)) \leq \sigma < \zeta) = P_x(\sigma < \zeta) \quad \cdots\cdots (4.1)$$

$$P_x(\tau(V(x)) > 0) = 1 \quad \cdots\cdots (4.2)$$

ここで τ は first exit time

[証明の概略]

[I] $V(x)$ の定義と可測性。

$$U_n = \{x : P_x(\sigma \leq \tfrac{1}{n}) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\}$$

とおくと、 $U_{n+1} \subset U_n$

x が regular ならば ある n が存在して $P_x(\sigma > \frac{1}{n}) > \frac{1}{n}$

$\therefore\ x \in U_n^c$ よって $V(x) \equiv U_n^c$ とおく。

可測性は、まず有界連続関数 φ に対して、

$$g(x) = E_x(\varphi(B_{\frac{1}{n}})) \quad とし、$$

$\lim_{t \to 0} H_t g(x) = g(x)$ を示し、$g(x)$ は $\mathcal{B}(S)$-可測であることがわかり、次に一般の有界可測関数 φ に対しても同じことがいえる。 $\varphi(a) = \chi_{\{a=\infty\}}$ とおけば、$V(x)$ の可測性がわかる。

(4.1) の証明は略し．(4.2) を証明する．

[II] path が continuous であるから．$\sigma(U_n(x)) = \tau(V(x))$

よって．$P_x(\sigma(U_n)=0)=0$ ・・・・・・・・ (4.3)

を示せばよい。　まず．compact sets の increasing sequence $\{K_n\}$ が存在して $K_n \uparrow U_n(x)$．

$$P_x(\sigma_{K_m} \downarrow \sigma_{U_n(x)}) = 1$$

(4.3) を否定すると．　$P_x(\sigma_{K_m} \downarrow 0) = 1$

$\sigma_{K_m} < \zeta$ では　$x_{\sigma_{K_m}} \in U_n(x)$ だから

$$P_{x_{\sigma_{K_m}}}\left(\sigma \leq \frac{1}{n(x)}\right) \geq 1 - \frac{1}{n(x)}$$

故に　$E_x\left\{P_{x_{\sigma_{K_m}}}\left(\sigma \leq \frac{1}{n(x)}\right) ; \sigma(K_m) < \zeta\right\} \geq \left(1-\frac{1}{n(x)}\right)P_x\{\sigma(K_m)<\zeta\}$

左辺 $= P_x\left\{\sigma(w^+_{\sigma_{K_m}}) \leq \frac{1}{n(x)} : \sigma(K_m) < \zeta\right\}$

$$\leq P_x\left\{B\left[\sigma(K_m), \sigma(K_m)+\frac{1}{n(x)}+\frac{\delta}{2}\right]=\Delta,\ \sigma(K_m)<\zeta\right\}$$

$$\leq P_x\left\{B\left[0, \frac{1}{n(x)}+\delta\right]=\Delta\right\} + P_x\left\{\sigma(K_m) \geq \frac{\delta}{2}\right\}$$

$$\leq P_x\left\{\sigma \leq \frac{1}{n(x)}+\delta\right\} + P_x\left\{\sigma(K_m) \geq \frac{\delta}{2}\right\}$$

ここで m は任意であり．$P_x(\sigma(K_m) \downarrow 0) = 1$

を仮定しているから　$P_x\left(\sigma(K_m) \geq \frac{\delta}{2}\right) \longrightarrow 0$　$(m \to \infty)$

又　$P_x(\sigma(K_m) < \zeta) \longrightarrow 1$

従って．

$$P_x\left\{\theta \le \frac{1}{n(x)} + \delta\right\} \ge 1 - \frac{1}{n(x)}$$

が任意の δ に対して成り立つ．

$$\therefore \quad P_x\left\{\theta \le \frac{1}{n(x)}\right\} \ge 1 - \frac{1}{n(x)}$$

これは $x \in U_{n(x)}$ を意味し．矛盾である。　（証明終り）

5. ［例1］

regular point, singular point を．$(0,1)$ 上の吸収壁Brown運動を例にして考えてみる。

Green function $g(x,y)$ は次式で与えられる。

$$g(x,y) = \begin{cases} 2(1-x)y & 0 < y \le x < 1 \\ 2(1-y)x & 0 < x \le y < 1 \end{cases}$$

$$u(x) = \int_0^1 g(x,y)f(y)dy \quad \text{とおくと．}$$

確率積分の変換公式により

$$\hat{u}_t = \int_0^t u'(x_s)dx_s, \qquad A_t^{[u]} = -\frac{1}{2}\int_0^t u''(x_s)ds$$

$$\langle \hat{u} \rangle_t = \int_0^t u'(x_s)^2 ds \quad \text{がわかり．さらに}$$

$$B[0,t] = \int_0^t a(x_s)^2 d\langle \hat{u} \rangle_s = \int_0^t b(x_s)ds$$

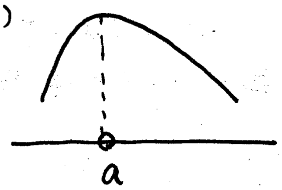
ここで

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)^2}{u'(x)^2} & \text{if} \quad u'(x) \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad u'(x) = 0 \end{cases}$$

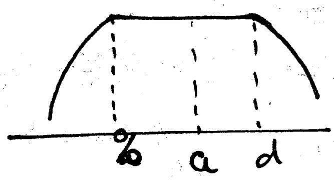
従って．f が bounded の時は $u'(a) \neq 0$ なる a は regular point であることがわかる。

又 $u'(a)=0$ なる a は次の二つの場合がある。

(イ)



(ロ)



(イ)の a は singular point である。なぜなら、もし regular とすれば $\exists T_n \uparrow \sigma$ $$E_a e^{\beta_{t\wedge T_n}-\frac{1}{2}\langle\beta\rangle_{t\wedge T_n}}(u(x_{t\wedge T_n})-u(a))=0$$

$\therefore$ $u(a)=u(x_{t\wedge T_n})$ a.e. P_a で矛盾.

(ロ)では. a は regular point で. b, d は singular point であることがわかる。

6

今まで一つの u を固定して話をしたが、ここで異なった u を考え、ある点が regular になったり、singular になったりする場合を(0,1)上の Brown 運動について考える。即ち、0 1 の hitting time が σ になる u と、ならない u を区別する必要十分条件を与える。はじめにいくつかの Lemma を準備する。

[Lemma 1]

$g(x)$ を $(0,1)$ の境界上の関数とする。

σ' をそこへの hitting time とする。

$$v(x)=E_x\left(e^{-\int_0^{\sigma'}V(x_s)ds}g(x_{\sigma'})\right)$$ とおくと、

$v(x)$ は $$\frac{1}{2}f''(x)-V(x)f(x)=0$$

の有界な解である。

[Lemma2]

$$\frac{1}{2}f''(x) - V(x)f(x) = 0 \qquad f(x)\geq 0,\ x\in[0,1]$$

が $f(1)=0$ なる有界でない解をもつ事と、次の事は同値である。 $0<{}^{\exists}a<1$.

$$\int_0^a xV(x)\,dx=\infty$$

[Lemma3]

$$P_x\left(\int_0^{\sigma_0} V(x_s)\,ds=\infty,\ \sigma'=\sigma_0\right)=P_x(\sigma'=\sigma_0)$$

である事と次の事が同値である。 $0<{}^{\exists}a<1$

$$\int_0^a xV(x)\,dx=\infty$$

[Proposition]

$(0,1)$ における Brown 運動において、0 への hitting time が ∂ になるための必要十分条件は、

$0<{}^{\exists}a<1$
$$\int_0^a x\,\frac{u''(x)^2}{u'(x)^2}\,dx=\infty.$$

次に regular point であるが、他の点からその点に hit すると ∂ になる例を与える。

$[-1,0]$ で反射壁 Brown 運動

$(0,1)$ で吸収壁 Brown 運動 を考え、

$$u(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x} & 1>x>0\\ 1 & 0\geq x\geq -1\end{cases}$$ とおく。

これは、0 は明らかに regular point であるが、上の[Proposition]より、0にhitすると ∂ になってしまう。

7 次に上の例で示されたような点を characterize する。

[定理3]

Hunt の条件(F)の下で，次のような thin Borel set

$L \subset F$ が存在する。

任意の regular point に対して，

$$P_x(\sigma = \sigma_{F^c} \wedge \sigma_L : \sigma < \zeta) = P_x(\sigma < \zeta)$$

が成立する。

この証明には Blumenthal-Getoor [fifth Berkeley]

による次の Lemma を用いる。

[Lemma]

Hunt の条件(F)の下で，T を thin accessible terminal time とし，$P_x(\zeta \leq T < \infty) = 0$ とするとき，

thin Borel set $B \subset E$ が存在して，

$T = \tau_B$ が almost surely on $\{T < \zeta\}$ で

成立する。

Lemma，定理とも証明は略する。

具体的に L がどのような集合であるかを示すのが次の

Proposition で，L は $U_n = \{x : P_x(\sigma \leq \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n}\}$

の $n \to \infty$ の極限として考えられることを示す。

[Proposition]

任意の x に対して $P_x(\lim_{n\to\infty} \sigma_{U_n} = \sigma < \zeta) = P_x(\sigma < \zeta)$

が成り立つ。特に x を regular point とすれば

$$P_x(\lim_{n\to\infty} \sigma_{U_n} = \sigma_L,\ \sigma = \sigma_L < \zeta) = P_x(\sigma = \sigma_L < \zeta)$$

また L はあるいみで translation line に似た性質を持っていることを示すのが次の Proposition である。

[Proposition]

x を regular point とすると、ある n が存在して

$$P_x(\sigma_{U_n} > 0) = 1.$$

以上のことを模型的に図で示せば次のようになる。