数理解析研究所講究録
第74巻 1969年 27-47

拡散過程の局所構造についての注意

阪大 理　池田信行

§1. はじめに　状態空間 S 上の拡散過程，すなわちマルコフ過程で道が連続なものを具体的な特性量を用いて特徴づけようというのが本来の目標である。こゝではこの目標に対するいくつかの試みを紹介し，あわせて簡単な例を用い困難点を説明するのが目的である。問題を半群の言葉で言えば S 上の有界連続関数の空間 $C(S)$ 上の線型作用素の半群 $\{T_t\}$ で非負，contraction なもので，更に"局所性"をもつものを特徴づけることである。歴史的に見ればこの問題は Kolmogorov がマルコフ過程論の定式化を与えた最初の段階から意識されていた。実際彼は $\{T_t\}$ の生成作用素の定義域にコンパクトな台を持つ2回連続的微分可能な関数 $C_0^{(2)}(S)$，$(S=\mathbb{R}^n)$，の時は生成作用素が2階の楕円型微分作用素になることとして特徴づけられることを示している。それから30数年を過した今日において，それなりの成果は得られているが，満足すべき形の結果は S が線分の場合のみしか得られていない。

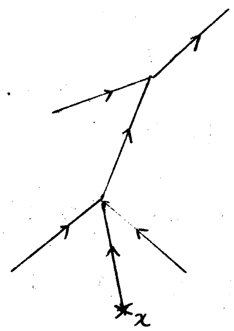
S が線分の時は最初 Feller により解析的方法で解決され，さらに Dynkin や Ito-McKean によってその確率論的背景が明らかにされた。この場合は線分の各点はある意味で"正則"な点と"非正則"な点とに分類され，各々の場合に局所的に

定する解析的な量の組と拡散過程が1対1に対応している。たとえば S が正則な点のみからなる時は，S の尺度 $s(x)$，速度測度 $m(dx)$，消滅測度 $k(dx)$ の組（$s(x)$, $m(dx)$, $k(dx)$）と拡散過程が1対1に対応している。（Ito-McKean [7]）。目標はこの程度の具体性を持った形で解析的な量と拡散過程の対応を一般の場合にみつけることである。

問題の性質上 S は始めに与えられたものでなく，その各点の近傍に制限して考えることは言うまでもないが，一般の距離空間をとるのでは殆んど生産的な結果が得られないことは，例えば S としてコンパクトな距離空間の正の Radon 測度全体とした時は右でのべる決定的な運動だけでも非常に沢山のものがあり，その構造の決定はきわめて困難になってしまうことからも想像される。そこでまず第一段階として，S としては $\mathbb{R}^n$ のある領域を考えることは妥当なことであろう。このような制限をしても一次元の時のような結果はとても得られないが，最近平均 0 の additive functional についての研究が進み，その結果が研究に役立つことがわかり始めている。とくに確率積分の Lévy-伊藤の変換公式が重要で，それを使ったいくつかの考えを Skorohod [15], [16] が提案している。それら自身については他の人のまとまった報告があるので，このノートではそれらの報告の補充として 2, 3 の注

意をのべる。これと密接な関連があるが，適当な測度に対して対称になっている時は Dirichlet 空間を用いる方法も有効になって来る。これについても後で典型的な例をのべる。

§2. 決定的な運動。 S を §1 にのべたように制限しても $n \geqq 2$ の時は決定的な運動が沢山の種類存在し得る。決定的な運動とはあらっぽく言えば出発点 x を定めた時，マルコフ過程の測度 P_x がある1本の道だけに集中しているものである。たとえば右図のように，$\mathbb{R}^2$ の任意の点 x を1つ固定した時，その点を通る向きのついた唯1つの曲線が対応していて，その向きにそって道が集ることはあっても枝わかれすることはないとする。



その時曲線上の位置のみに応じて定まる速度で向きの方向に動く運動を考えれば，その軌跡を道とするマルコフ過程が得られる。$S \subset \mathbb{R}^n$ は必要ならば充分小さくとっておいて，S で上のような特徴を持ったマルコフ過程の特性としてのべることをつぎに考える。$\bar{S} = S \cup \{\partial\}$ は S の一点 compact 化で，それを状態空間とする Hunt 過程 $X = \{x_t(\omega), \zeta, \mathcal{F}_t, P_x, x \in \bar{S}\}$ を考える。点 ∂ は trap，すなわち $P_\partial\{x_t(\omega) = \partial, t \geqq 0\} = 1$ をみたしており，ζ は ∂

への衝突時間とする。以下の議論で最も基本的な仮定は"X が拡散過程"であること，すなわち"X の道が連続"なことである。さらに便宜上 $P_x[\exists^1 : \lim_{t\uparrow\zeta} x_t(\omega) = \partial] = 1, \quad x\in \overline{S}$ を仮定する。またしばしば additive functional についての結果を用いるが，その時は Meyer の仮定(L) すなわち標準測度 η が存在することを仮定する。（標準測度については本尾[12] 参照）。またマルコフ過程論で通常用いられることは前提にされているとし，記号も可能な限り常識的に用い，詳しくのべないことにする。

マルコフ過程 X があるとき，$\alpha : [0,\infty)\times\Omega \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ なる関数 $\alpha(t,\omega)$ はつぎの性質をみたす時 additive functional と呼ばれる：(A.1) t を固定した時 ω について $\mathcal{F}_t$-可測 (A.2) $\mathcal{F}$-可測集合 Ω_α が存在し，つぎの性質をもつ。$P_x[\Omega_\alpha] = 1$, $x\in S$。任意の $\omega\in\Omega_\alpha$ に対して $\alpha(t,\omega)$ は有限で，右連続であり左極限をもつ。(A.3) $\alpha(t,\omega) = \alpha(\zeta,\omega)$, $t\geq\zeta$. (A.4) 任意の t, s に対して $\alpha(t+s,\omega) = \alpha(t,\omega) + \alpha(s,\theta_t\omega)$

このようなものの全体を $\mathbb{A}$ で表わす。（本尾[12]）。いま
$\mathfrak{A} = \{A ; A\in\mathbb{A},\ E_x[A_t] = 0,\ \exists\alpha>0 : \int_0^\infty e^{-\alpha t}E_x[A_t^2]\,dt<\infty,\ \forall x\in S\}$,
$\mathfrak{A}_2 = \{A ; A\in\mathfrak{A},\ E_x[A_t^2]$: t について有界, $\forall x\in S\}$ とおく。
本尾－渡辺[13] によれば $A\in\mathfrak{A}_2$ ならば $\lim_{t\uparrow\zeta} A_t = A_\zeta$ が存在し，$E_x[A_\zeta^2]<\infty$, $E_x[A_\zeta] = 0$，しかも $\mathfrak{A}_2 = \{A ; A\in\mathfrak{A},$

$E_x[A_\zeta^2]<\infty$, $E_x[A_\zeta]=0$, $\forall x\in \dot{S}\}$ となる。つぎに $\mathfrak{A}^c=\{A;$ $A\in\mathfrak{A}$, A：連續$\}$, $\mathfrak{A}_2^c=\{A;\ A\in\mathfrak{A}_2$, 連續$\}$ とおけば、任意の $A\in\mathfrak{A}_2$ に対して A の不連續点は道 $x_t(\omega)$ の不連續点に限るので、今の場合は $\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_2^c$ となる。

つぎの条件をみたす拡散過程を"決定的な運動" という。

(1) 任意の $x\in S$ に対して定数 $\zeta=\zeta(x)$ が存在し $P_x[\zeta(\omega)=\zeta]=1$, (2) 任意の $(t,x)\in[0,\zeta)\times S$ に対して $c=c(t,x)$ が存在し $P_x[\,x_t(\omega)=c\,]=1$ である。

このときつぎの命題が成りたつ。

命題。2.1 X が決定的な運動であることと、

$$\mathfrak{A}_2=\{0\} \tag{2.1}$$

なることは同等である。

証明は色々あるが次の本尾一渡辺 [13] の証明は簡明である。

証明。X が決定的な運動の時 $\mathfrak{A}_2=\{0\}$ なることは自明である。したがって逆を示せば充分である。(2.1) を仮定する。$f\in C(\bar{S})$, $f(\partial)=0$, $u(x)=G_\alpha f(x)$ とおく。Dynkin の公式より $A_t=u(x_t(\omega))-u(x_0(\omega))+\int_0^t e^{-\alpha s}f(x_s(\omega))ds$ とおけば $A\in\mathfrak{A}_2$ である。故に $u(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha s}f(x_s(\omega))ds$, a.e (P_x), 一方 $u(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha s}E_x[f(x_s(\omega))]ds$ である。したがって

$$f(x_s(\omega))=E_x[f(x_s(\omega))],\qquad \text{a.e }(P_x),\qquad s\geq 0.$$

上のような f で $\bar{S}$ の点は分離されるので上の等式は X が決

定的な運動であることを示している。

いま X が決定的な運動で任意の $x \in \bar{S}$ に対して $\zeta(x)<\infty$ としよう。f は S 上で 1 で ∂ で 0 とする。$u = G_0 f(x)$, $y_t(\omega) = u(x_t(\omega))$ とおけば $t<\zeta(x)$ に対して $y_t(\omega) - y_0(\omega) = -t$, a.e. (P_x) となる。このことから決定的な運動は本質的には積分上の等速運動の集りに帰着されることがわかる。また決定的ということは S の各点 x の近傍で考えられる局所的な概念である。

§3. Hunt の条件 [H] と正則な運動。前の節の決定的な運動というのは確率論的興味から言えば始めから考察の対象から除いても良いとも言える。S の任意の点 x のどのように小さい近傍 $U(x)$ をとっても X の $U(x)$ への制限 $X|_{U(x)}$ に対して条件(2.1)は成立しないとしても差支えないだろう。ところが $S=\mathbb{R}^2$ で2次元の Brown 運動と1次元の時空 Brown 運動では事情が非常に違って来る。これは上にのべた条件をみたしているが、後者の場合はある方向には決定的な運動をしている。Skorohod [10] は例えば $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動に適当な操作をほどこし1次元位の Brown 運動を作るような操作を提案している。彼によればその操作で $\mathbb{R}^n$ の構造を幾段階かほどこし1次元の構造に帰着出来ることになるが、現在知られ

ている限りではそこには未解決の技術的な困難があるようなので、こゝではまず2次元Brown運動と1次元Brown運動を区別するような分類を考えてみよう。(本林[9])。まず記号として, $\mathcal{L}^+ = \{\varphi;\ \varphi \geqq 0,\ \varphi \in \mathbb{A}\}$, $\mathcal{L}_1^+ = \{\varphi;\ \varphi \in \mathcal{L}^+,$ $E_x[\varphi_\zeta] < \infty,\ x \in S\}$, $\mathcal{L} = \{\varphi;\ \varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)},\ \varphi^{(i)} \in \mathcal{L}^+\}$, $\mathcal{L}_1 = \{\varphi;\ \varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)},\ \varphi^{(i)} \in \mathcal{L}_1^+\}$, $\mathcal{E} = \{u;\ u = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} - u_2^{(1)} - u_2^{(2)}$, $u_i^{(1)}$: class D の excessive function, $u_i^{(2)}$: class D の harmonic function$\}$ とおく。このとき、任意の $u \in \mathcal{E}$ に対して $\varphi^{[u]} \in \mathcal{L}_1$ が対応して $A_t^{[u]} = u(x_t(\omega)) - u(x_0(\omega)) - \varphi_t^{[u]}$ とおけば $A^{[u]} \in \mathfrak{A}$ で、とくに $\mathcal{E}_2 = \{u;\ u \in \mathcal{E},\ A^{[u]} \in \mathfrak{A}_2\}$ とおく。nearly Borel 可測な u に対して, $P_x[u(x_t(\omega)) = u(x_\zeta(\omega));\ 0 \leqq t < \zeta] = 1$, $x \in S$, が成立っておれば u は nearly constant と呼ばれる。(本尾[12])。nearly analytic set B に対し $\sigma_B = \inf\{t;\ x_t(\omega) \in B,\ t > 0\}$ とおく($\inf \phi = \infty$ とする。) B が(X に関して) negligible であるとは, $P_x[\sigma_B = \infty] = 1$, $x \in S$, が成りたつことである。また $P_x[\sigma_B = 0] = 0$ または 1 で 0 に等しい時 x は B に関して非正則, 1 に等しい時 x は B に関して正則という。

Hunt の条件[H]。F が S の compact な部分集合で X に関して negligible でないならば, F に対して正則な点 x_0 が存在する。

§4

以下この節では S の任意の点 x のどのような近傍 $U(x)$ に X を制限しても，決定的運動ではないとする。この仮定の下でつぎのような概念を導入する。

$x_0 \in S$ のどのような小さな近傍 $U(x_0)$ に X を制限しても，$X|U(x_0)$ に対して，"$u \in \mathcal{E}_2$，$A^{[u]} = 0 \Rightarrow u$; nearly constant" という性質がある時 x_0 は X に関して"<u>正則</u>"という。x_0 が正則でない時"<u>特異</u>"という。そのとき，

<u>命題. 3. 1</u>（渡辺（信）[18]）. 条件 [H] が成りたっておれば S の各点は正則である。

この証明は渡辺（信）氏によってつぎの補題を基礎にして与えられた。

<u>補題.</u> 3. 1.（Banach の定理）。f が $[a, b]$ で有界変分な関数とし，$N(y) = \#\{x ;\ f(x) = y,\ x \in [a, b]\}$ とおけば

$$T(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} N(y)\,dy$$

である。こゝで $T(a, b)$ は $[a, b]$ での f の全変分とする。

<u>命題の証明</u>。$x_0 \in S$ を１つとって来て，そのある近傍での X の制限 $X|U(x_0)$ をとれば再び条件 [H] が成りたっている。したがって始めから S を充分小さくとっておいて $X|U(x_0)$ をあらためて X とする。ある u をとって来て，$u \in \mathcal{E}_2$，$A^{[u]} = 0$ とする。任意の c に対し $\tau_c(\omega) = \inf\{t ;\ \varphi_t^{[u]} = c\}$，$(\inf \phi = \infty)$，とおく。また $S(y ; c) = \{x ;\ u(x) = u(y) + c\}$ とする。

いま $\omega \in \{\omega ; \sigma_{S(y;c)}(\omega) < \infty, x_0(\omega) = y\}$ とすれば $\sigma_{S(y;c)}(\omega) = \tau_c(\omega)$ である。一方 $\omega \in \{\omega ; \sigma_{S(y;c)}(\omega) = \infty, x_0(\omega) = y\}$ に対し $\phi = \{t ; x_t \in S(y;c)\} = \{t ; u(x_t(\omega)) = u(y) + c\} = \{t ; \varphi_t^{[u]}(\omega) = c\}$。故に $\tau_c(\omega) = \infty$ となり，常に $P_y[\sigma_{S(y;c)} = \tau_c] = 1$，$y \in S$ が言える。任意に固定した $y \in S$ に対して $P_y[\tau_c(\omega) < \infty] > 0$ なる $c \neq 0$ が存在したとする。いま $c > 0$ としても一般性を失わない。このとき $0 \leq d \leq c$ なる任意の d に対して $P_y[\tau_d(\omega) < \infty] > 0$ である。しかも $S(y;d)$ は nearly Borel set で compact set の系列 $\{G_n\}$ で $G_n \uparrow S(y;d)$，$\sigma_{G_n} \downarrow \sigma_{S(y;d)}$ なるものが存在する。故にある $N > 0$ が存在して，任意の $n \geq N$ に対して $P_y[\sigma_{G_n} < \infty] > 0$ であるので，条件[H]より $G_n^{reg} \neq \phi$，$\forall n \geq N$，である。ここで G_n^{reg} は G_n の正則な点の全体。故に $S^{reg}(y;d) \equiv S_d^* \neq \phi$ である。ここで Hunt [5], Theorem 20.1 に注意すれば $P_y[\sigma_{S_d^*} < \infty] > 0$ である。故に S_d^* の定義と併せると強マルコフ性より，

$$P_y[\exists t_m ; t_m \downarrow 0, x_{t_m + \sigma_{S_d^*}}(\omega) \in S_d^*] = 1 \tag{3.1}$$

が成りたつ。一方 $N_d(T \wedge S, \omega) = \#\{t ; 0 \leq t \leq T \wedge S, \varphi_t^{[u]} = d\}$ とおけば Banach の定理と Fubini の定理を併せて殆んどすべての d に対して $E_y[N_d(T \wedge S, \omega)] < \infty$ となる。故にある d，$0 \leq d \leq c$ ~~なる~~，に対して上の式が成りたち，これは

(3.1) に矛盾する。故に任意の $c \neq 0$ に対して $P_y[\tau_c(\omega)<\infty] = 0$ である。すなわち $P_y[\ u(x_S) = u(x_t)\ ;\ 0 \leq t < S\ ] = 1,\ y \in S$, となり結論を得る。

この結果より Hunt の条件 [H] が正則性にとって重要なことがわかるが条件 [H] の充分条件は Hunt [5] にいくつかあげられている。例えばいくつかの附帯条件の下で、Green 関数が対称ならば X は条件 [H] をみたす。また時空 Brown 運動に対しては条件 [H] は成りたゝないが、それのみならず任意の $x \in S \equiv \mathbb{R}^n$ が特異であることは定義より明らか。

§4. 調和座標。 S が稠分の場合、S 上の点がすべて正則であれば（たゞし Feller の意味）、S の尺度として調和関数がとれることが良く知られている。（伊藤 [8]）。それの一般化として Skorohod [15] は調和座標の概念を導入した。n 個の連續関数の組 $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ が S の座標を与え、しかも $A_t^{(i)} = u_i(x_t(\omega)) - u_i(x_0(\omega))$, $t < S$, $i = 1, 2, \dots, n$, が $\mathfrak{M}$ に屬する時、組 $(u_1, \dots, u_n)$ は調和座標と呼ばれる。概念は導入されたが、$\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, の場合ですら一般にどのような時に調和座標が存在するか、また存在するとすればどのようにして構成されるかはあまり知られていない。たとえば、$v_j \in C^{(2)}(S)$ で、$\det\left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j(x)\right) \neq 0$, $x \in S$ なるもの

が存在したとする。その時

$$\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} v_1(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} v_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_n(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} v_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v_1(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v_n(x) \end{pmatrix}$$

として，

$$A = \frac{1}{2}\Delta + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

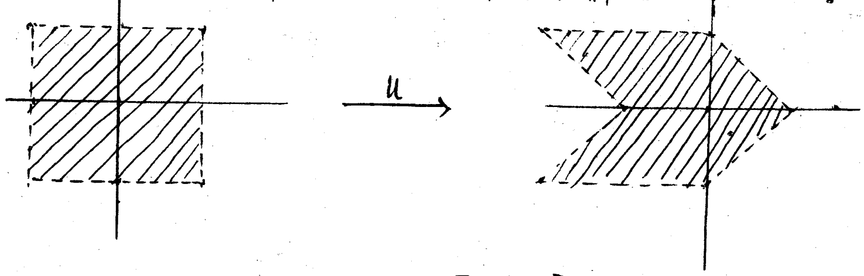
を考えれば A は S 上の拡散過程の局所生成作用素の $C^{(2)}(S)$ への制限になる。明らかに $A v_j(x) = 0$, $j=1,2,\cdots,n$ であるので確率積分の変換公式に注意すれば $(v_1, \cdots, v_n)$ は A に対応する拡散過程の調和座標になる。ところが X を先に与えてその調和座標を求めることはなめらかな係数の時ですら容易でない。もちろん一次元拡散過程の直積として作られる拡散過程では各々の調和座標の組が求めるものになっている。このように本質的には一次元に帰着出来るもの以外で，かつなめらかでもない調和座標を持つ例をつぎにのべよう。

<u>例 4.1</u> $S = \mathbb{R}^2$ とする。$\{B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}),\ t \geq 0;\ P_x, x \in S\}$ を2次元 Brown 運動とする。$\underline{t}(t,\omega)$ は y-軸方向の成分の 0 における local time とする。そのとき $x_t^{(1)}(\omega) = B_t^{(1)}(\omega) + \underline{t}(t,\omega)$, $x_t^{(2)}(\omega) = B_t^{(2)}(\omega)$ とおくとき，random function の族 $\{(x_t^{(1)}, x_t^{(2)});\ t \geq 0\}$ は拡散過程 X を決める。(Dynkin [2], Ikeda [6])。この X に対しては $u_1(x) \equiv u_1(a,b) = a - |b|$, $u_2(x) \equiv u_2(a,b) = b$

とおけば (u_1, u_2) が調和座標になっている。というのは、$A_t^{[v]} = v(B_t^{(2)}) - v(B_0^{(2)}) - \underline{\underline{t}}(t)$, $t<\zeta$, $(v(x)=|b|)$, が $\mathfrak{A}$ に属し

$$\begin{cases} u_1(x_t(\omega)) - u_1(x_0(\omega)) = B_t^{(1)}(\omega) - B_0^{(1)}(\omega) + A_t^{[v]} \\ u_2(x_t(\omega)) - u_2(x_0(\omega)) = B_t^{(2)}(\omega) - B_0^{(2)}(\omega) \end{cases}$$

となる。この u_1, u_2 は連続であるが、u_1 は微分可能ではない。いま $u: x \longrightarrow (u_1(x), u_2(x))$ なる写像によって下図の左の斜線の部分は右の斜線の部分にうつる。



このようななめらかでない調和座標があらわれる場合でも、半群は自然なものであることを示すために X の推移確率を計算してみよう。そのためには Ito-McKean [7], p.45, Problem 3 の結果を用いるとつぎのことが言える。

$$P_{(0,0)}[B_t^{(2)} \in da,\ \underline{\underline{t}}(t) \in d\xi] = \frac{|a|+\xi}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(|a|+\xi)^2}{2t}} \, da\, d\xi, \quad a \in \mathbb{R}^1,\ \xi \geq 0.$$

これから

$$E_{(a,0)}[f(x_t^{(1)})g(x_t^{(2)})] = E_{(a,0)}[f(B_t^{(1)}+\underline{\underline{t}}(t))g(B_t^{(2)})]$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(a')\, g(b) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(a-a'+|\xi|-|b|)^2}{2t}} \frac{\xi}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\xi^2}{2t}} d\xi.$$

したがって X の $dx = da\,db$ に関する推移密度関数 $p(t,(a,b),(a',b'))$ はつぎの形になる。

$$p(t,(a,b),(a',b')) = c(b,b')\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(a-a')^2}{2t}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(b-b')^2}{2t}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(b+b')^2}{2t}}\right\}$$

$$+\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(a-a'-|b|-|b'|+\xi)^2}{2t}}\frac{\xi}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{\xi^2}{2t}}d\xi$$

ただし

$$c(b,b') = \begin{cases} 1, & b,b'>0 \text{ あるいは } b,b'<0, \\ 0, & \text{他の場合.} \end{cases}$$

このことから X に関する半群は Feller 型であることがわかる。（池田[6], 佐藤一上野[17], 本尾一渡辺[13]）。

また Skorohod [16] が取扱っている生成作用素の定義域の関数, さらに一般に excessive な関数を drift の変換を X にほどこして調和関数にする問題もこの調和座標のことに密接に関連している。Skorohod の結果は修正を要する点を含んでいるが興味深い。修正すべき点が新たな方法の提起につながると思える面もある。（小林[9]）。

§5. <u>エネルギー測度</u>。これまでのことから拡散の局所構造と $\mathfrak{A}_2$ の構造が密接に関連することがわかった。ところが $\mathfrak{A}_2$ の構造をしらべる手段はあまり開発されていない。任意の $A\in\mathfrak{A}_2$ に対して $u(x)=E_x[A_\zeta^2]$ とおけば $\mathcal{D}_1 \ni \varphi$ で

$u(x) = E_x[\varphi_\zeta]$ と書ける。この φ を記号として $[A]$ と書く。また $A \in \mathfrak{A}_2$ に対する確率積分になる $\mathfrak{A}_2$ の元全体を $\mathfrak{M}(A)$ と書けば，$\exists\ A^{(i)},\ i=1,2,\cdots, \in \mathfrak{A}_2$: $[A^{(1)}] \gg [A^{(2)}] \gg \cdots \cdots \gg [A^{(n)}] \gg \cdots$ で $\mathfrak{A}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}(A^{(k)})$ となる。$U(x)$ を充分小さくとれば $X|U(x)$ に対する上の直和分解の和が丁度 S の次元数 n またはそれ以下になるかというのは興味あることだが現在の所満足すべき結果は得られていない。（本尾一渡辺 [13], §14, Example 4）。いま必要に応じて S を充分小さくとっておいて，$\mathfrak{A}_2$ の直和分解が丁度 n で終っていたとしよう。その時も次の２つの場合が考えられる：第１の場合；$[A^{(1)}] \ll [\dot{A}^{(n)}]$，第２の場合；$[A^{(1)}] \not\ll [A^{(k)}]$ なる番号 k が存在する。第１の例は $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動でおきているが第２の場合もつぎの例で実際おきている。

<u>例 5.1.</u> $\mathbb{R}^3$ における Brown 運動 $\{B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)});\ t \geq 0;\ P_x,\ x \in \mathbb{R}^3\}$ を考える。$x_t^{(1)} = B_t^{(1)} + B^{(3)}_{\underline{t}(t)}$，$x_t^{(2)} = B_t^{(2)}$，（$\underline{t}(t)$ は第２成分の 0 における local time）とおけば random function の族 $\{x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}),\ t \geq 0,\ P_{(a,b,0)}\}$ は２次元の拡散過程 X を導く。$x = (a,b)$ に対し $u_1(x) = a$，$u_2(x) = b$ とおけば (u_1, u_2) は X の調和座標である。そこで $A^{(1)} = A^{[u_1]}$，$A^{(2)} = A^{[u_2]}$ とおけば $[A^{(1)}]_t = t \wedge \zeta + \underline{t}(t \wedge \zeta)$，$[A^{(2)}]_t = t \wedge \zeta$ となるので $x \in S$ をとくに x−軸にとればそ

のどんな小さな近傍をとっても $[A^{(1)}] \not\ll [A^{(2)}]$ になっている。この事実の解析的な表現を得るために X の推移確率を計算しておこう。§4で用いた関係式より

$$E_{(a,0,0)}\left[f(x_t^{(1)})g(x_t^{(2)})\right] = E_{(a,0,0)}\left[f(B_t^{(1)}+B^{(3)}_{\underline{t}(t)})g(B_t^{(2)})\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(a')f(b')\left\{\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}}e^{-\frac{(a-a')^2}{2(t+s)}}\frac{|b'|+s}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(|b'|+s)^2}{2t}}ds\right\}da'db'$$

となる。したがって X の推移確率は $dx = da\,db$ に関して密度が存在しそれを $p(t,(a,b),(a',b'))$ とおけば

$$p(t,(a,b),(a',b')) = c(b,b')\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(a-a')^2}{2t}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(b-b')^2}{2t}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(b+b')^2}{2t}}\right)$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}}e^{-\frac{(a-a')^2}{2(t+s)}}\frac{|b|+|b'|+s}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(|b'|+|b|+s)^2}{2t}}ds$$

となる。したがって X の半群は Feller 型で、しかも X は dx に関し対称で、$\alpha>0$ に対して

$$g_\alpha((a,b),(a',b')) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}p(t,(a,b),(a',b'))dt$$

とおけば

$$g_\alpha((a,b),(a',0)) \leqq g_\alpha((a,0),(a',0)) \leqq g_\alpha((a',0),(a',0)) < \infty$$

となる。したがって g_α は対称な関数で $g_\alpha((a,b),(a',0))$ は $x=(a,b)$ の関数として有界である。このことから x-軸

の点 x_0 は $\{x_0\}$ に関し正則である。(Blumenthal - Getoor [7])。また X は §3 の条件 [H] をみたしている。また Hunt の結果より class (D) の excessive な関数に対する Riesz の表現定理が成りたち，任意の $\alpha>0$ に対して，

$$E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, d\,[A^{(i)}]_t\right]=\int_{\mathbb{R}^2} g_\alpha(x,y)\, S^{(i)}(dy)$$

なる測度 $\{S^{(i)}(dx),\ i=1,2\}$ が定まる。(α に無関係)。この具体的な形は任意の compact な台を持つ連續関数 f に対して

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(1)}(dx)=\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty} f(a,0)\,da,\qquad \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(2)}(dx)=\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx$$

より決まる。

一般に調和座標 $\{u_1,\dots,u_n\}$ が存在し，$A^{(i)}=A^{[u_i]}$ とおいた時，X が対称 (dm に関して) な密度 $g_\alpha(x,y)$ を持ち，かつ Riesz の表現定理が成りたつならば任意の $\alpha>0$ に対して

$$E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, d\,\langle A^{(i)},A^{(j)}\rangle_t\right]=\int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(x,y)\, S^{(i,j)}(dy)$$

$i,j=1,2,$ で定まる α に無関係な測度の系 $\{S^{(i,j)}(dx);\ i,j=1,2,\dots,n\}$ を X の エネルギー測度系 という。これは速度測度に無関係すなわち時間変更に無関係なことが容易に示される。($\langle\ ,\ \rangle$ の定義については本尾－渡辺[13]参照)。この用語を用いると

例5.1 の X についてはエネルギー測度系が

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(1,1)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(a,0)\,da$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(2,2)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(1,2)}(dx) = 0$$

で与えられることになる。これに対して n 次元 Brown 運動の時は

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(1,1)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(2,2)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, S^{(1,2)}(dx) = 0$$

となる。前の分類で第1の場合は $S^{(1,1)}(dx) \ll S^{(n,n)}(dx)$, 第2の場合はある k が存在して $S^{(1,1)}(dx) \not\ll S^{(k,k)}(dx)$ となる。例5.1 の X は後者の例となっている。もう1つ注意すべきことは $\mathbb{R}^n \supset S$, $n \geq 2$, の時は調和座標 $(u_1, \dots, u_n)$ が存在してもその他に速度測度, エネルギー測度系を少くとも指定しないと拡散はきまらない。すなわち $\{(u_1, \dots, u_n);\ m(dx),\ S^{(i,j)}(dx),\ i,j = 1, 2, \dots, n\}$ なる解析的な量を指定しなくてはならない。これにくらべて $n = 1$ の時, すなわち線分の時は, その調和尺度 $S(x)$ が決まればエネルギー測度は $dS(x)$ として一意的に定まる (今は S の各点が Feller の意味で正則とする)。また消滅はないとして今は話を進めているが, それがある時はそれを定める測度も決めねばならない。

上の調和座標と速度測度とエネルギー測度の組を考えることは Dynkin [2] や Skorohod [15] の quasi-infinitesimal operator を考える立場と密接に関連している。そのことは $C^{(2)}(S)$ より定まる $\mathfrak{A}_2$ の元に確率積分の変換公式を用いた表現を与えてみれば明らかである。

逆に $\{(u_1,\dots,u_n),\ m(dx),\ s^{(i,j)}(dx),\ i,j=1,2,\dots,n\}$ を与えてそれに対応する拡散を構成出来るかということは現在の所，構成可能な条件を具体的に決める所まで研究が進んでいないが，最近福島氏等により系統的にマルコフ過程論に応用され始めた Dirichlet 空間の方法が有益と思われる。一般に拡散 X が $m(dx)$ に対称な時に，そのグリーン作用素 G_α は $L_2(\mathbb{R}^n, m)$ の L_2-resolvent になり，しかも $H_\alpha^\beta(u,v)=\beta(u-\beta G_{\beta+\alpha}u, v)$ $\alpha\geqq 0$, $\beta>0$, ($(\ ,\ )$ は $L_2(\mathbb{R}^n, m)$ の内積) とおけば，$H(u,u)=\lim_{\beta\to 0} H_0^\beta(u,u)$, $H_\alpha(u,u)=\lim_{\beta\to\infty} H_\alpha^\beta(u,u)$ が存在する。しかも $\mathfrak{F}=\{u;\ u\in L_2(\mathbb{R}^n, m),\ H(u,u)<\infty\}$ とすれば任意の $u, v\in\mathfrak{F}$ に対して，$H_\alpha(u,v)=\lim_{\beta\to\infty} H_\alpha^\beta(u,v)$, $H(u,v)=\lim_{\beta\to\infty} H_0^\beta(u,v)$ が有限な値として存在し，

$$H_\alpha(u,v)=H(u,v)+\alpha(u,v)$$

となる。(福島 [3], [4], 志賀一渡辺 [14])。しかも任意の $\alpha>0$ に対して，$^\forall f\in L_2(m, \mathbb{R}^n)$ に対し

$$H_\alpha(G_\alpha f, v)=(f, v),\qquad v\in\mathfrak{F}.$$

こゝで福島氏は m のとり方に無関係に、すなわち時間変更に無関係に $H(u,v)$ が定まることを示している。そこでこの $H(u,v)$ と {調和座標, エネルギー測度} の組がどんな関係にあるかが問題になって来る。Brown運動の時は

$$H(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$$

となる。(この形の正確な意味については満畑[17] または福島[8])。また例ぶ1の X については $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \cap C_0^{(2)}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$H(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}u(a,0)\frac{\partial}{\partial a}v(a,0)\, da$$

となる。いずれの場合も {調和座標, エネルギー測度} の組で $H(u,v)$ が定まっている。たゞこのように具体例では関係がわかっているが一般形およびその関係式を用いた構成の問題はまだ研究が進んでいない。

[1] Blumenthal, R. and R. Getoor: local time for Markov processes. Z. Wahr. verw. Geb, 3 (1964).

[2] Dynkin, E. B.: Markov processes Moscow, 1963.

[3] Fukushima, M.: A construction of reflecting barrier Brownian motions for bounded domains. Osaka J. Math. 4 (1967).

[4] Fukushima, M.: On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities. to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] Hunt, G. A.: Markoff processes and potentials, 1, 2, 3, Illinois J. Math. 1 (1957), 2 (1958).

[6] Ikeda, N.: On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problem. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 33 (1961).

[7] Ito, K. and H. P. McKean: Diffusion processes and their sample paths. Berlin, 1965.

[8] 伊藤 清 : 確率過程論；岩波応用数学講座, 1957

[9] 小林道正 : excessive function の drift による変換. 東京教育大 修士論文, (1968).

[10] Kolmogorov, A. N.: Über die analytishen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsreshnung. Math. Ann. 104 (1931).

[11] 溝畑 茂 : 偏微分方程式論, 岩波, 1965.

[12] 本尾 実 : マルコフ過程の additive functional. Sem. on Prob. Vol. 15 (1965).

[13] Motoo, M. and Watanabe, S.: On a class of additive functionals of Markov processes. J. Math. of Kyoto Univ. 4 (1965).

[14] Shiga, T. and T. Watanabe: On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion. Osaka Jour. Math. 5 (1968).

[15] SKorohod, A. V.: On homogeneous continuous processes that are martingales. Theory of prob. and its App. 8 (1963).

[16] SKorohod, A. V.: On the local structure of continuous Markov processes. Theory of prob. and its App. 11 (1966).

[17] Sato, K. and T. Ueno: Multi-dimensional diffusion and Markov process on the boundary. J. Math. of Kyoto Univ. 4 (1965).

[18] 渡辺信三: 京大確率論セミナー報告.