数理解析研究所講究録
第74巻1969年48-65

Fine topology を同じにする連続な Markov 過程についての 2,3 の問題

名古屋大 教養 神田 護

§0. 序

極端ないい方をすれば Markov 過程(*)の研究は，一般の Markov 過程 $-\alpha$ の class について調べるか，Brown 運動 $+\alpha$ の class（たとえば滑かな係数を持った2階の楕円形微分作用素を generator とする diffusion）について調べるかの2つに分れるといってもよいのではないかと思います。しかし具体的に解析する場合前者は広すぎる場合があるし，後者は解析的（定量的といった方がよいか？）前提と，Markov 過程の定性的前提とがいりまじっていて原理がはっきり摑めないという事もあって，Markov 過程論が数学の一分野として自立する事を望むとしたら，何か物足りない感じがしないでもありません。この事は“Markov 過程の局所構造の決定”あるいは“Markov 過

(*) ここで Markov 過程という時は，適当に正則な条件をみたす強 Markov 過程を示すことにします。例えば Hunt process, etc.

程の分類”とかいった大問題につながりますが，ここではそういう事に直接触れないで，自分の研究途上にでてきた正則点の問題に関連してかいてみました。これは fine topology と密接に関連し，ある意味では Brown 運動を含む特殊な class をきめるのに役立つと思うからです。図式でかけば

強 Markov 性 $\supset\!\!\supset$ 定性？ $\supset$ Brown 運動

なる定性？をみつけるのが目的といってもよいかも知れません。残念ながらここでは何の解決も与える事ができませんでした。自分が興味をもった事についての予想とか未解決の問題について書きならべただけに終ってしまって，靴の上からかゆい所をかいている感じがしてなりません。

以下で考察の対象とするのは d-次元ユークリッド空間 R^d，あるいはそこでの領域 Ω での Markov 過程です。定理を述べ，それをキチンと証明するといった形式でないので細かな条件，その他は一切省略します。

なお，点 x がある compact set K の正則点であるというのは $P_x(\sigma_K=0)=1$，σ_K；Kへの first hitting time，という事です。2つの Markov 過程が与えられた時，~~両過程~~どの compact set の正則点も process によってかわらない時，正則点が到る所で同じといった表現を便宜上します。

§1. 2階楕円形微分作用素と正則点

ユークリッド空間 R^d の領域 Ω での次の微分作用素を考えよう。

$$\mathcal{D} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\mathcal{D}_A = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

ここで，a_{ij}, b_i は有界可測，$a_{ij}=a_{ji}$ かつ強楕円型 即ち $\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2 \neq 0$ となる $\{\xi_i\}_{i=1,\cdots,d}$ に対して $\lambda\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2 \geqq \sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2$ とする。一般にこのような作用素を generator とする Markov 過程の存在は知られていない。特に $\mathcal{D}$ の type で係数を有界可測とした場合の Markov 過程の存在証明あるいは反例を与える事は興味深い事である。今の所存在を示す方法として半群の理論にもちこむ方法と確率微分方程式を解く方法があるが，前者は $\mathcal{D}$ の性質がよく分っていないことにより，又後者は強楕円性が反映しない事等より，今のところ未解決である。従って，ここでは連続な Markov 過程の存在が分っている場合について正則点がどうなるか調べてみよう。まず，存在について。

$\boxed{1.1}$ 連続な Markov 過程の存在については，$\mathcal{D}$ の type については，H. Tanaka [16] によって a_{ij} が有界連続の場合に示された。$\mathcal{D}_A$ については ある意味では 係数が

有界可測の場合にでも連続なMarkov過程が対応する事が分っているが（M. Kanda [5] 参照），確率過程論的な意味づけが不完全である。後でも述べるように $\mathcal{D}_A$ については Markov 過程の randomness を反映している additive functional と generator の関連がつかない。又，$\mathcal{D}_A$ という作用素についても，定義の仕方によって Dirichlet 問題の解の一意性がこわれる場合もあって（J. Serrin [14] 参照），問題が多く残っているように思われる。たとえば M. Itô [3] が試みているように Stampaccia [17] 等の結果をできるだけ抽象化して Dirichlet space の概念を広げていく方向も興味深いがまだ注目すべき結果はでていないようである。例えば Markov 過程が与えられた時 Dirichlet space を構成し，Dirichlet 内積の表現を与えた時，特に C^2 を domain に含む場合に一種の base として表われてくる量がとれるなら，それが additive functional の base と同じ役割を果し，正則点の問題についても役立つだろうと思うのだが筆者にはまだよく分らない。

$\boxed{1.2}$ $\mathcal{D}$ については係数が Dini-連続(*) の場合，$\mathcal{D}_A$ については有界可測の場合に，Brown 運動と正則点が到る所

(*) ここでは，係数が Dini-連続とは，Ω 内の任意の compact set K に対して $\omega(x,h)=\sup_{i,j,\,|y|<h}|a_{ij}(x+y)-a_{ij}(x)|$，$\limsup_{\varepsilon\to 0,\,x\in K}\int_0^{\varepsilon}h^{-1}\omega(x,h)\,dh=0$ となる事を意味することにする。

同じである事が分っている。(例えば, M. Kanda [5], [6] 参照, $\mathcal{D}$ について Hölder 連続の場合に, $\mathcal{D}_\Lambda$ については有界可測の場合にそれぞれポテンシャル論，微分方程式論の立場から既に示されている。文献については [5] 参照，[6] の結果については，後の § で少しのべる。)

その事の証明では 対角線を除いて連続な Green 函数 $G(x,y)$ が存在して compact set 上で

$$(\star)\qquad \begin{aligned} &C_1 \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \geqq G(x,y) \geqq C_2 \frac{1}{|x-y|^{d-2}}, \quad C_1, C_2 > 0, \quad d \geqq 3 \\ &\left(C_1 \log \frac{1}{|x-y|} \geqq G(x,y) \geqq C_2 \log \frac{1}{|x-y|} \right), \quad d = 2 \end{aligned}$$

となる事が基本的である。そこで $G(x,y)$ がどうなるか，$\mathcal{D}$ の場合について結果をならべてみよう。まず

Krylov [7]; a_{ij} が Dini 連続ならば $(\star)$ がなりたつことが分っているが a_{ij} を有界連続とした時には，以上で の滑かささえ要求しなければ $G(x,y)$ の存在は分るのだが (例えば Krylov [7], 又 Levy operator のついている場合も含めて, M. Bony の結果がある; その singularity については一般には最早 $(\star)$ はなりたたない。 連続係数の場合に, $d=2$ の時，J. Serrin [13] の例を用いて 1 点がそれ自身に対して正則点となる事を示した (M. Kanda [5] 参照). $d \geqq 3$ の場合, $\mathcal{D}$ の形の微分作用素に対応する process について Brown 運動と異なる例を示すことができないが，例えば J. Serrin [13] があげた次の例がそうな

るだろう事はほぼ確実だろう。 $d \geq 3$ の時

$$u(r) = -\int^r \left[\exp\left(\int^r \frac{1-d}{1+g(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}\right)\right] dr$$

$$g(\rho) = \frac{-1}{1+(d-1)\log\rho}, \quad \rho>0, \quad g(0)=0$$

とおいた時，$u(|x|)$ が，強楕円形作用素

$$\mathcal{D} = \sum_{i,j=1}^{d} \left(\delta_{ij} + g(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

の $\Omega - \{0\}$ （但し，$\Omega = \{x\,;\, 0 \leq |x| \leq e^{-1}\}$ ）での解がある事が示せて

$$u(|x|) = \frac{|x|^{2-d}}{\log\frac{1}{|x|}}(1+\varepsilon(|x|)), \quad \varepsilon(|x|) \to 0, \ |x| \to 0$$

が分る．更に不連続係数の場合は，奇妙な状態になる事が分っている。ここで注意しておきたい事は，ある点で発散する singularity をもつ正の local solution があったとしても，Green 函数のそこでの singularity の発散の程度が同じかどうかは例えば Hölder 連続の（係数に関する）仮定が無いと一般には分らない事 ~~xxxxxx~~ である。それも問題の一つである。

次の予想がとければよい。Brown 運動と到る所で正則点が同じ，~~の~~ Markov 過程では適当に正則な条件の下で (☆) がなりたつ。この事は，$G(x,y) = C(x,y)\,\varphi(|x-y|)$ （ φ は $\varphi(0)=+\infty$ となるある函数の class，くわしい事は §3 参照）なる Green 函数を持つ class

の間では正しい。

後でものべるように Green 函数の singularity に条件を与えて，そこから出発する方向もあるが，Green 函数の singularity は，一般にそれぞれの場合に具体的に計算する事によって求められるので，当面の目標；定性？つ Brown 運動 となる 定性？ を捕えることからみれば，あまりよいとはいえない。そこで Green 函数の singularity ~~と Brown~~ について，(A) がなりたつ場合にその背後にあるものを眺めてみると，Harnack の不等式が大きな役割を果している事が分る。それポテンシャル論でも harmonic space の公理の1つとしていれてあって，少しずつ形が異なっているが，ここでは，J. Serrin によって得られた，$\mathfrak{D}$ の場合の結果を，2次元についてのべよう。

<u>定理</u> [12]. $u(x)$ を $\mathfrak{D}u=0$ の domain $\Omega \subset R^2$ での正の C_2-解とせよ. $\tilde{\Omega}$ を Ω の closed subdomain とする。その時，$\lambda, M, \Omega, \tilde{\Omega}$ （λ; ellipticity constant, $|a_{ij}|<M$, $|b_i|<M$）のみに depend する定数 $K>0$ が存在して，任意の $x, y \in \tilde{\Omega}$ に対して

$$u(x) \geq K\, u(y)$$

がなりたつ。

ここで注意することは，係数が有界可測のみでよい事である。$d \geq 3$ の時は一般になりたたない。さて，Harnack の不等式と Green 函数の singularity について考えてみよう。

上の定理がなりたつ場合；ある正の函数 $\varphi_y(r)$ $(r>0)$ が存在して

$$C_2\varphi_y(|x-y|) \leq G(x,y) \leqq C_1\varphi_y(|x-y|) \qquad C_1, C_2>0$$

となる事が分る。その事を，簡単のため，$b_i=0$ で $y=0$ の時に示そう。 $G(x,0)=u(x)$ とおくと $u(x)$ は $x\neq 0$ で $\mathcal{D}u=0$ だから，$|x|=1$ を定理の $\tilde{\Omega}$ とすれば，ある $K>0$ があって

$$\max_{|x|=1} u(x) \leqq K \inf_{|x|=1} u(x)$$

となる。$|x|=r$ なる点 x に対して，$\tilde{a}_{ij}(x)\equiv a_{ij}(r x)$，$\tilde{u}(x)=u(rx)$ とおけば $\tilde{u}(x)$ は $\tilde{\mathcal{D}}=\sum \tilde{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$ とした時の，$|x|=1$ での解だから

$$\max_{|x|=1} \tilde{u}(x) \leqq K \inf_{|x|=1} \tilde{u}(x)$$

即ち

$$\max_{|x|=r} u(x) \leqq K \inf_{|x|=r} u(x)$$

このことから，たとえば $\varphi(r)=\max_{|x|=r} u(x)$ とおくことによって

$$C_2\varphi(|x|) \leqq G(x,0) \leqq C_1\varphi(|x|)$$

が示せる。次に $\varphi_y(|x-y|)$ が y に independent に $\varphi(|x-y|)$ ととれるための条件は何だろうか，例えば係数が連続の時はどうか。又，各点が trap でないならば，$\varphi(|x-y|)=\log\frac{1}{|x-y|}$ となるのではないか？ もしそうでないとしたら，強楕円形の微分作用素に対応する process で Brown 運動と到る所で正則点が異なる

process があることになって興味深い。又連続係数の場合に予想が正しいとすれば2次元の場合はある点が trap となる場合か，Brown運動と到る所で正則点が同じ場合かいずれかになる。そのような事はないと思うが証明はできない。3次元以上の場合に，$\varphi(|x-y|)$ がとれたとして，$\varphi(|x-y|)=\dfrac{1}{|x-y|^{d-2}}$ となる事を示そうと試みたが（M. Kanda [6]）荒い結果しか得られなかった。（§3参照）

いずれにしても Harnack の不等式を Markov 過程の言葉で捕える事は重要であると思う。これはまだ分っていない。§2で少し触れる。

§2. 連続な Markov 過程の generator について

§1とは逆に，連続な Markov 過程が与えられた時，どのような条件の下で，その generator が強楕円形微分作用素になるのかみてみよう。

まず，generator A が C_0^2（compact support をもつ C^2 函数）を B（有界可測函数）にうつす (local) operator で最大値原理(*)をみたすものとしよう，その時 A は

$$A=\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c$$

(*) $f\in C^2$ に対して f が正の relative maximum をとる点で常に $Af(x)\leqq 0$ となる時 A は最大値の原理をみたすという。この時 A は local になる。

の形で表現される。更に C（連続函数の空間）へ写す時は，係数が連続になる事が分る。しかし 擬楕円性（i.e. $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$）は容易に導かれるが，強楕円性を導くには最大値原理を強めねばならない。 A の domain に C^2 が入るという事は Markov 過程の立場からは余り好ましくないと思うし，前にのべた意味での最大値原理は Markov 過程の generator なら必然的にみたすが，それを強める事は，A を制限する事になって面白くない。今の場合，harmonic function に，Harnack の不等式に相当する Brelot の公理をみたすという条件を加えても，例えば係数が連続ならば 2次元の時は強楕円性が導かれるが，3次元以上になると最早分らない。しかし（強）楕円性は，微分方程式の立場から便宜上導入されたともいえるので，それに代る Markov 過程の特性をつかめばよい，即ち Markov 過程における（強）楕円性に相当する概念は何か？という問題が生じる。1つの方向は Harnack の不等式に類似の特性をみつけることである。（Harnack の不等式にこだわりすぎるきらいがあるが，$\mathfrak{D}$ にも $\mathfrak{D}_0$ にも共通に成立する性質（正則点に関連して）は，これ以外あまりないからである）。もう一つは $\mathfrak{D}_0$ との関連がまだつかないことはふせておいて，additive functional の base に関する Skorohod の rank [5] の概念を明確にし，精密にすることである。たとえば 前者については Girsanov が [2] で導入した狭義の強 Feller 性が，弱い形での Harnack

の不等式?, —Bauer の公理— と関連する。一般に Harnack の不等式およびそれを弱めた種々のポテンシャル論における公理は harmonic function の subclass の同等連続性の主張におきかえる事ができる。例えば Bauer の公理は subclass として一様有界な harmonic function をとったものである。Girsanov のいう狭義強 Feller 性とは, $\underset{y\to x}{\mathrm{Var}} |P(t,x,\Gamma) - P(t,y,\Gamma)| \to 0$ という事であるから $\{T_t f, |f|<M\}$ なる class は同等連続となる事は明らかである。従ってある場合は Bauer の公理を意味することになる。後者の方向については harmonic coordinate とも関連し, Markov 過程の局所構造をしらべるという立場から N. Ikeda [4], M. Motoo - S. Watanabe [10], H. Kunita - S. Watanabe [8] 等により調べられたが, 前途に困難が多くならんでいる様である。この線にそって筆者が考えている事を §3 でのべよう。作用素論的な興味として $\mathcal{D}_A$ を含んでとり扱うには次の設定も考えられる。generator A は C_K^∞ を $\mathcal{D}'$ (distribution の空間) にうつす local linear operator とする。それが最大値の原理をみたすものとする。最大値原理をみたすとは, 例えば次の性質をもつこととしてよいだろう。"$u \in C_K^\infty$ が $u \geq 0$ かつ $u(x)=0$ ならば $\forall \varepsilon>0$ に対して x の近傍 U があって U 内に support をもつ任意の正の函数 $f \in C_K^\infty$ に対して

$$(Au)f \leq \varepsilon \int_\Omega f(x)\,dx$$"

その時のAの表現をみつける事(AがC^2をCにうつした時と同じように最大値の原理をみたすならAは連続となるか),又逆operator A^{-1}の存在,強楕円性に類似の事がなりたつための条件等 問題はあるがまだ誰にもなされていないようである。

§3. Green函数のsingularityについて.

今までみてきたように,正則点が到る所同じclassを決定するには強楕円性に相当する特性及び$\mathfrak{D}$のtypeに対応する過程の時は係数が滑らかでないものを除外し,更に$\mathfrak{D}_0$及び$\mathfrak{D}$の係数が滑らか場合を共に含むような特性を捕えねばならない。そのためにHarnackの不等式に($\mathfrak{D}_0$に対応するharmonic functionに対してもP7と同じ形での定理がなりたつことは(不連続係数の時でも)知られている。例えば Moser [9]参照)注目してきたがはかばかしい結果がでない。そこで"正則点が到る所同じ"という事を出発点として与える事も考えられる。だがこの事からどのような結果がでるのか,あるいはでているのか筆者には分らない。

この§では,正則点の事に捕われずに,Green函数のsingularityに関連した問題を少しのべてみよう。

1) Skorohodは[15]でrankの概念を導入したがprocessを解析するには弱すぎるし,又harmonic coordinate

[例えば Dynkin [1]) は，そこから出発すべき条件というより，それが存在するための条件をみつけるのが問題となる性質だろう。それは非常に困難である。筆者は，中途的ではあるが次の設定の下で考えている。(まだ結果が全然でないので簡単にのべる) "n 個の harmonic function の組 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ があって，$\Psi_K = \{ y ; y = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)), x \in K, \text{compact} \subset \Omega \underset{R^d}{\cap} \}$ とすれば，$\tilde{\Omega} \subset \bar{\tilde{\Omega}} \subset \Omega$ なる domain $\tilde{\Omega}$ での harmonic function u は常に $\Psi_{\bar{\tilde{\Omega}}}$ を含む open set $\subset R^n$ 上の C^2-function $\tilde{u}$ によって $u(x) = \tilde{u}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\cdots, \varphi_n(x))$ と表現される。"

考えている process には，十分正則な条件，例えば，harmonic function を連続にするような強 Feller 性とか，対角線を除いて連続な Green 函数の存在とか harmonic function の全体は Ω の 2 点を分離する(☆)とかいった条件，をつけておく。問題は，base として選んだ $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の性質から，process を規定したいのである。この時，条件(☆)等を使うと $\tilde{u}$ は

$$(\text{☆☆}) \quad A u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{b}_{ij}(\varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial y_j}(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) = 0$$

をみたす事になり，i) $n > d$ ii) $n = d$ (iii) $n < d$ の場合にわけ，それぞれ又 $\tilde{b}_{ij}$ が強楕円形の時とそうでない時とに分けていく。たとえば 強楕円形かつ $n > d$ はありえないだろうという予想ができる。それは Green 函数は R^d での process のそれであることから (従って R^d で完全最大値の原理

をみたす）から singularity の order に制限がつき（この事は予想であって今の所後でのべるように非常に強い制限の下で弱い結果しか得られていない），又（☆☆）の微分作用素の一点を除いた所での解とも関連するからやはり singularity に制限がつき（この事もまだ証明ができない。たとえば3次元以上の時 $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ の $\Omega-\{0\}$ の発散する positive solution $u(x)$ は係数が連続の場合 $u(x)=O(|x|^{2-n+\delta})$ as $|x|\to 0$, ∀$\delta>0$ とならない事は示せるが（J. Serrin [13]），$u(x)=O(|x|^{2-n-\delta})$ となるかどうかは分らないのである。），結局は，$n>d$ かつ強楕円性となる事はないと思う。又，$n=d$ の時は Brown 運動と正則点が到る所で同じになる class もでてくるはずで，それは普通の2階の微分作用素とは違うものもあるから面白いと思う。$n<d$ の時は，Harnack の不等式に関連した事柄がなりたたなくはずである。例えば適当な正則条件の下で $d=2$ の時はなりたたない事が示せる。

2）1）に少し関連するが，harmonic function の base についての次の結果がある。domain Ω での $\mathfrak{D}_A u=0$ の解 u の全体は nuclear 空間（次の semi-norm に由して；$g_K(u)=\sup\{|u(x)|, x\in K$, K compact $\subset\Omega$）となる事が知られている。（A. Pietsch [11]）従って，Ω での解 u は，任意の compact set K 上，

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle u, a_i\rangle u_i(x)$$

（ここで a_i は linear form，u_i は K で $\mathcal{D}_\delta u_i=0$ となる．）とかける。又，Brelot の harmonic function の（について）公理系をみたすものも（ここでの公理(iii)が，Harnack の不等式のポテンシャル論的な表現）nuclear space となる事が Grothendieck の定理より分る。従って harmonic function が nuclear space となるという事は，何か深い事の反映だと思うのだが筆者にはよく分らない。誰か御存知の方があったら教えて下さい。

3) ここで kernel $G(x,y)=C(x,y)\varphi(|x-y|)$ についての結果をのべよう。ここで $G(x,y)$ は $x\neq y$ で連続で，$Gf(x)=\int G(x,y)f(y)dy$ は compact support を持つ有界可測函数を無限遠で vanish する連続函数にうつすものとする。（考えている空間は R^d あるいはそこでの domain Ω である。次元は $d\geqq 3$）．$C(x,y)$ は有界で，$\varphi(t)$ は正の連続単調減少函数で $\lim_{t\downarrow 0}\varphi(t)=+\infty$，$\int_0 t^{d-1}\varphi(t)dt<+\infty$，かつある整数 $0<p<d$ があって $t^p\varphi(t)$ は十分小さい t に対して単調増加で $\lim_{t\to 0}t^p\varphi(t)=0$ とする。

その時

1). $M_1>\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})^{-1}$ となる定数 M_1 があって

$$(\ast)\qquad \varphi(r)>\frac{M_1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\varphi(2r\sin\tfrac{\theta}{2})\sin^{d-2}\theta\, d\theta$$

ならば，$G(x,y)$ は完全最大値原理をみたさない。

但し，$C(x,y)$は連続という仮定の下での結果である。

ロ). $G_1(x,y)=C_1(x,y)\varphi_1(|x-y|)$, $G_2(x,y)=C_2(x,y)\varphi_2(|x-y|)$ とし それらが完全最大値原理をみたすものとする。更に、$\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$ が単調増加とする。その時、G_1 および G_2 をGreen函数とするFeller process X_1, X_2 が存在して、X_1 の正則点は X_2 の正則点でもある。特に $\lim_{t\downarrow 0}\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}=0$ ならば X_2 に対しては正則点だが X_1 に対しては正則点とならない場合が生じる。

ハ). $M_2<\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})^{-1}$ に対して イ)の☆ の不等号を逆にしたものがなりたつなら、もしそれをGreen函数としてもつprocessがあるならば それは連続ではない。(C(x,y)が連続という仮定の下で)

4). Green函数のsingularityが、有限なポテンシャルをきめるmeasureのsupportに関係し、従って正のadditive functionalのsupportにも関係する。逆も真である。従って additive functionalのbaseの構造から、Green函数のsingularityについての結果が導かれないか?

References.

[1] Dynkin. E.B, Markov process, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Girsanov, I.V, Strongly-Feller process. I. Th. of Prob. and Appl. Vol. 5, No 1, (1960)

[3] M. Ito, A note on extended regular functional space. Proc. of Japan Academy, Vol 43, No 6 (1967)

[4]. N. Ikeda, 2次元拡散過程の分類, 1964年4月セミナー準備資料

[5] M. Kanda, Regular points and Green functions in Markov processes, J. Math. Soc. Japan, Vol. 19. No 1, (1967)

[6]. M. Kanda, On the singularity of the Green functions in Markov processes, to appear

[7] Krylov. N. V, On the green function for the Dirichlet problem, Uspehi. Mat. Nauk, Tom 22, No 2 (134) (1967)

[8]. H. Kunita - S. Watanabe, On square-integrable Martingale, Nagoya Math. Journal. Vol 30, 1967

[9] Moser, J. A new proof of de Giorgi's Theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure and Applied Math, Vol. XIII (1960)

[10] M. Motoo - S. Watanabe, On a class of additive functionals of Markov processes, Jor. of Math. Kyoto Univ. Vol. 4, No 3, 1965.

[11] Pietsch, A, Nukleare Funktionenräume,

[12] Serrin, J, On the Harnack inequality for linear elliptic equations. J. Analyse Math, 4 (1954-1955),

[13]. Serrin, J. and Girbarg, D, On isolated singularities of solutions of second order, 同上

[14] Serrin, J. Pathological solutions of elliptic differential equations,

[15] Skorohod, A. V, On the local structure of continuous Markov processes, Th. of Prob. and Appl. vol, No3 (1966).

[16]. H. Tanaka, Existence of diffusion with continuous coefficients, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 18 (1964).

[17]. Stampacchia, G, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, 1. (1965)