数理解析研究所講究録
第 74 巻 1969 年 66-80

Markov過程の multiplicative functional による変換と generator の関係

名古屋大 理　国田 寛　述
東工大 理　土谷 正明　記

§0 Introduction

S ; locally compact Hausdorff space.

$(X_t, \zeta, \mathbb{B}_t, P_x)$, $(X_t, \zeta, \mathbb{B}_t, P'_x)$; S を state space にもつ２つの standard process.

ここで，$\mathbb{B}_t$ は X_s, $s \leq t$ を可測にする最小の σ-algebra

。 $\mathbb{B}_t[t\wedge\zeta]$ の上で $P_x \succ P'_x$　$\forall t$, $\forall x \in S$

$\Rightarrow$ density $\dfrac{dP'}{dP}(\mathbb{B}_t[t\wedge\zeta])$ の version として

$M_t(\omega) \geqq 0$; multiplicative functional (M.F.) をとることが出来る。

$$(M_t(\omega)\ \theta_t M_s(\omega) = M_{t+s})$$

。 逆に，$M_t(\omega) \geqq 0$, right continuous

$$M_t(\omega)\,\theta_t\, M_s(\omega) = M_{t+s}(\omega)$$

$$E_x(M_t) = 1$$

$$\Rightarrow\quad P'_x(B) \equiv P^M_x(B) \equiv E_x(M_t\,;B) \qquad B \in \mathbb{B}_t$$

とおくと $P_x^{\eta} \prec P_x$。

◎ $P_x \succ P_x'$ となる条件を解析的な量（generator）で特徴づけたい。

例1. (x_t, P_x) ; R^d − Brown 運動とする。

$(x_t, P_x') \prec (x_t, P_x)$ の十分条件は，丸山，本尾，Dynkin により得られた。

(x_t, P_x') の generator が，（f^i の正則条件を仮定して）

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\Delta + \sum_{i=1}^{d} f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (\text{Drift の変換})$$

であればよい。

必要条件を Hille-Yosida あるいは Dynkin generator で特徴づけることは，おそらく不可能であるが，generator の定義域を拡張すれば，上記の表現が必要十分であることが，Wentzell の結果により知られている。

例2. (x_t, P_x) ; Markov chain $\quad \mathcal{G} = g_x\,(\pi(x,y) - \delta(x,y))$

(x_t, P_x') ; Markov chain $\quad \mathcal{G}' = g_x'\,(\pi'(x,y) - \delta(x,y))$

"$(x_t, P_x) \succsim (x_t, P_x')$" $\Longleftrightarrow$ "$g_x\,\pi(x,y) = 0 \Longleftrightarrow g_x'\,\pi'(x,y) = 0$"

chain の場合は，M.F の変換は Lévy measure の変換であり，その特殊な場合として，time change を含んでいる。

例3.　$\mathcal{G} = -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta$

このときは、t 方向の drift の変換は、M.F. による変換に含まれない。即ち、

$$\mathcal{G}' = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta} + \left(\sum f' \frac{\partial}{\partial x} + f' \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

とはならない。

二階の elliptic の項は t 方向に degenerate.

これらの例から

(a) diffusion の場合は、M.F. の変換は、いわゆる drift の変換であるが、drift の変換をすべて含むのではない。

M.F. の変換で移れる class は generator の二階の項の ellipticity に関連することが予想される。

(b) 一般の Markov 過程（必ずしも diffusion でないとき）では、M.F. による変換は、ある種の drift の変換と、Lévy-measure の変換の結合されたものであることが予想される。

しかし、上記の予想を、Hille-Yosida の意味の generator の言葉で実現することは出来ないので、generator の定義域を拡張し、その上で議論したい。尚、diffusion の境界条件が、M.F. の変換で、どう変るかについても議論したい。

§1. Generator の拡張.

$(x_t, \zeta, \mathcal{F}_t, P_x)$; standard process とする。

仮定 ;

(i) Meyer の (L)

(ii) ζ が accessible. 即ち,

$\exists T_n$; quasi-hitting time (Q.H.T)

$T_n \uparrow \zeta$, & $T_n < \zeta$.

∘ $\mathcal{M}_{loc} \ni X_t \overset{def}{\Longleftrightarrow} X_t$; additive functional (A.F.)

$\exists T_n$; Q.H.T. $T_n \uparrow \zeta$;

$X_{t \wedge T_n}$; 平均 0, 2乗可積分。

∘ $\mathcal{M}_{loc} \ni X_t, Y_t \Rightarrow \exists \langle X, Y \rangle_t$; continuous additive functional (C.A.F) ;

bounded variation

$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t$ = local martingale.

∘ A_t ; C.A.F. ; non-negative

$\Rightarrow \exists \nu$; S 上の measure such that

" $\int_0^t I_E(x_s)\, dA_s = 0 \quad \forall t$, a.e. $P_x \quad \forall x$

$\Leftrightarrow \nu(E) = 0$ " ($I_E(x)$; E の定義函数)

ν を A_t の <u>canonical measure</u> という

Def A_t ; non-negative C.A.F. が canonical

$\Longleftrightarrow$ (i) $A_t = t\wedge\zeta + B_t$ (B_t は $t\wedge\zeta$ に関して singular な non-negative C.A.F.)

(ii) $\langle X\rangle_t \equiv \langle X, X\rangle_t \prec A_t$ for $\forall_t \in \mathcal{M}_{loc}$.

◎ canonical な A_t は存在する。

Def (A_t, ν) ; canonical system という。

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_A) = \left\{ u \in \mathbb{B}(S) \middle/ \begin{array}{l} \exists f ;\ X_t^u \equiv u(x_t) - u(x_0) - \int_0^t f(x_s)\,dA_s \in \mathcal{M}_{loc} \\ f \text{ は locally } A\text{-integrable} \end{array} \right\}$$

(f が locally A-integrable $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists T_m$; Q.H.T. $T_m \uparrow \zeta$ $\int_0^{t\wedge T_m} f(x_s)\,dA_s$; integrable

$\mathbb{B}(S)$; S 上の bounded Borel function の全体.)

$u \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$ に対し,

$$\mathcal{G}_A u = f$$

とおく。

f は ν-measure 0 を除いて, unique に定まる.

$\mathcal{G}$, $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ を Ito's generator とする。即ち.

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) \equiv \mathcal{R}\,(G_\alpha f \ ;\ f \in \mathbb{B}(S))$$

$$\mathcal{G} u \equiv (\alpha - G_\alpha^{-1})\, u \qquad u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

Prop 1

$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{ u \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$; $\mathcal{G}_A u$ は有界かつ, $\mathcal{G}_A u = 0$, a.e. $\mu \}$

但し, μ ; B_t の canonical measure

$\{\eta_i\}$; $\mathbb{B}(S)$ の可算集合で，S の点を分離するもの．

$C^2(\{\eta_i\}) \ni u \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \mho \in C^2(R^n)$ $(n=1,2,\cdots)$

$$u(x) = \mho(\eta_1(x), \cdots, \eta_n(x))$$

$$D_{\eta_i} u(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial \mho}{\partial \eta_i}(\eta(x)) & i = 1,2,\cdots,n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

Theorem

$\{\eta_i\}$, $\{\eta_i^2\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$ と仮定する．

$\Rightarrow$ $C^2(\{\eta_i\}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$ かつ，$u \in C^2(\{\eta_i\})$ に対し，

$$\mathcal{G}_A u(x) = \frac{1}{2}\sum a^{ij}(x) D_{\eta_i} D_{\eta_j} u(x) + \sum b^i D_{\eta_i} u(x)$$

$$+ \int [u(y) - u(x) - \sum D_{\eta_i} u(x)(\eta_i(y) - \eta_i(x))]\, \nu(x, dy)$$

ここで，a^{ij} ; non-negative definite symmetric locally A-integrable measurable functions

b^i ; locally A-integrable functions

$\nu(x, dy)$; kernel.

$(\nu(x, dy), A)$; Lévy system となる．

$\mathcal{G}_A(C^2(\{\eta_i\}))$ が A_t に関し，局所可積分な函数族の中で dense であれば，上の a^{ij}, b^i, ν は process を一意にきめる。

Remark

D : N-dimensional C^∞-manifold

∂D : $N-1$-dimensional hyper surface C^3-class

$$A = \sum a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

a^{ij} : positive definite symmetric C^2-class

b^i : C^1-class.

このとき．

Def. $T_t : \mathbb{C}(\bar{D}) \to \mathbb{C}(\bar{D})$: 強連続

T_tの infinitesimal operator が A の closed extension となるとき，T_tに対応する Markov process を A の diffusion という．

T_t の Hille-Yosida の generator の domain を $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ とかく。

Assumption

I $(\alpha - A)u = f$ が dense な f について解をもつ，

II $\forall x_0 \in \bar{D}$, $\exists (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$: local coordinate

η_iは continuous excessive function の差とかける。

III $P_t(x, \partial D) = 0$ $\forall t > 0$, $\forall x \in \bar{D}$ 但し，P_t は推移確率。

（上野－佐藤の場合は上の条件を満たしている。）

このとき，

$A_t = t \wedge \zeta + B_t$ なる canonical A.F. は、次の様にとれる。

$$B_t = \int I_{\partial D} \, dA_s$$

a_{ij}, b_i の境界への制限を α_{ij}, β_i と書き、$\mathfrak{G}_A u$ の境界への制限を Lu とかくと、

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int \Big[u(y) - u(x) - \sum \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \big(\eta_i(y) - \eta_i(x) \big) \Big] \nu(x, dy)$$

(境界での local coordinate $(\eta_1, \cdots, \eta_N)$ を $\eta_N(x) = 0 \quad x \in \partial D$ となる様にとれば $\alpha^{iN}(x) = 0 \quad x \in \partial D$ となることがわかる。)

Prop. 1 により、

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{G}) = \{ u \in C^2 ; \ Lu = 0 \ \ \text{a.e.} \ \mu \}$$

即ち、境界条件も $\mathfrak{G}_A u$ で表現出来る。

§2 Multiplicative functional による変換

M_t ; multiplicative functional (M.F.).

(i) $M_t > 0 \quad t < \zeta$

$\quad\;\; = 0 \quad t \geq \zeta$

(ii) local martingale

○ $P_x^M(B) = E_x(M_t ; B)$

$\Rightarrow$ $(x_t, \zeta, \mathcal{F}_t^M, P_x^M)$; standard process となる。

Theorem

(A_t, ν) ; canonical system of (x_t, P_x)

$\Rightarrow$ (I) (A_t, ν) ; (x_t, P_x^M) の canonical system, かつ,

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_A) = \mathcal{D}(\mathcal{G}_A^M)$$

更に, $u \in C^2(\{\eta_i\})$ とすると,

$$\mathcal{G}_A^M u(x) = \mathcal{G}_A u(x) + Bu(x)$$

ここで,

$$Bu(x) = \sum f^i D_{\eta_i} u(x) + \int (u(y) - u(x))(e^{f(x,y)} - 1)\, \nu(x, dy) \quad \text{—} \circledast$$

但し, f^i, $f(x,y)$ は次の条件を満す。

(a) f^i に対し, $\exists$ locally A-integrable function $h \geq 0$;

$$\left|\sum f^i g_i\right| \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\sum a^{ij} g_i g_j\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for } \forall \{g_i\}$$

(b) $f(x,y)$; $\int \nu(x,dy) |(e^{f(x,y)}-1)|$; locally integrable

(II) 逆に $\mathcal{G}'$ が $\mathcal{D}(\mathcal{G}') \equiv \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$ から ν 局所可積分な函数族への線形作用素で，かつ

$\mathcal{G}' - \mathcal{G}_A$ の $C^2(\{\eta_i\})$ への制限が ⊛ に一致するならば

$(\mathcal{G}', \mathcal{D}(\mathcal{G}')) = (\mathcal{G}_A^M, \mathcal{D}(\mathcal{G}_A^M))$ となる (x_t, P_x) の

M_t - Process が存在する。

Remark

① (a) は下の (a′) と equivalent

(a′) $\exists \{f_i\}$; $\sum a^{ij} f_i f_j$; locally integrable .

$f^i = \sum_j a^{ij} f_j$ とかける.

∵ $(a') \Rightarrow (a)$

$$|\sum f^i g_i| \leqq |\sum_i (\sum_j a^{ij} f_j) g_i| = |\sum a^{ij} f_i g_j|$$

$$\leq (\underbrace{\sum a^{ij} f_i f_j}_{= h})^{\frac{1}{2}} (\sum a^{ij} g_i g_j)^{\frac{1}{2}}$$

② Diffusion case (前述)

(a^{ij}) ; strictly positive definite ならば

(a) と (a″) は同値

(a″) $\sum a_{ij} f^i f^j$ が locally integrable .

但し，(a_{ij}) は (a^{ij}) の inverse matrix。

③ Diffusion の場合に境界条件は，いかに変るか．

変換した process の境界条件；

$$\underbrace{\mathcal{G}_A^M u = 0 \quad \text{on } \partial D \quad \text{a.e } \mu}$$

$\mathcal{G}_A^M u$ の ∂D 上への制限を $L^M u$ とおけば，

$$L^M u = Lu + B'u$$

但し，

$$B'u(x) = \sum_{i=1}^{N-1} f^{i\prime} \frac{\partial u}{\partial \eta_i}(x) + \int (u(y) - u(x))(e^{f(x,y)} - 1)\nu(x, dy)$$

であり，$\{f^{i\prime}\}$ は Theorem の (I)(a) の条件（a^{ij} を α^{ij} におきかえて）をみたし，f は (b) の条件をみたす．

従って，特に，境界条件が二階の微分作用素を含まないとき，（例えば 反射壁）は境界条件は変らない．

定理の証明；

(I) の証明．

$\log M_t$ の jump が有界と仮定しておく．

$$M_t = \exp\{X_t - \tfrac{1}{2}\langle X\rangle_t\} \exp\{Q_t(f) - \int_0^t \nu\cdot(e^f - 1 - f)\, dA_s\}$$

とあらわされる。

従って，確率積分の公式から，

$$M_t - 1 = \int_0^t M_s\, dX_s + \int_0^t M_s\, dQ_s (e^f - 1) \equiv \int_0^t M_s\, dZ_s$$

$$Z_t = X_t + Q_t (e^f - 1)$$

Bu ; $\langle X^u, Z \rangle$ の A_t に関する density とする．

即ち， $\int B\, u(x_s)\, dA_s = \langle X^u, Z \rangle$

今，簡単のため，diffusion の場合に示す．

即ち， $M_t = \exp\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \}$

$Z_t = X_t$ 　　のとき。

$$\langle X^u, Y \rangle = \langle X^u, \int M_s\, dX_s \rangle = \int M_s\, d\langle X^u, X \rangle_s$$

$$= \int M_s\, Bu\, dA_s$$

但し， $Y_t = M_t - 1 = \int_0^t M_s\, dX_s$

$X_t^u Y_t = \text{local martingale} - \langle X^u, Y \rangle$ 　だから

$$\| $$

$$X_t^u (M_t - 1) = \left(u(x_t) - u(x_0) - \int_0^t \sigma_{\partial A} u\, dA_s \right)(M_t - 1)$$

$$= M_t (u(x_t) - u(x_0)) - M_t \int_0^t \sigma_{\partial A} u\, dA_s - X_t^u$$

$$M_t\,(u(X_t)-u(X_0))-M_t\int_0^t \mathfrak{G}_A u\,dA_s-\int_0^t M_s\,Bu\,dA_s$$

$=$ local martingale。

従って、$T_m \uparrow \infty$ が存在して、

$$E_x\left[M_{t\wedge T_m}(u(X_{t\wedge T_m})-u(X_0))\right]-E_x\left(M_{t\wedge T_m}\int_0^{t\wedge T_m}\mathfrak{G}_A u\,dA_s\right)$$

$$-E_x\left(\int_0^{t\wedge T_m} M_s\,Bu\,dA_s\right)=0$$

$$\therefore E_x^M\left(u(X_{t\wedge T_m})\right)-u(x)-E_x^M\left(\int_0^{t\wedge T_m}\mathfrak{G}_A u\,dA_s\right)-E_x^M\left(\int_0^{t\wedge T_m}Bu\,dA_s\right)=0$$

従って、 $u(X_t)-u(X_0)-\int_0^t(\mathfrak{G}_A+B)\,u\,dA_s$

は、(X_t, P_x^M) の local martingale である。

$\therefore\ \mathcal{D}(\mathfrak{G}_A)\subset\mathcal{D}(\mathfrak{G}_A^M)$.

又 $M_t>0$ $(t<\zeta)$ より、2つの process は互に絶対連続

よって、逆の変換をして、

$\mathcal{D}(\mathfrak{G}_A)=\mathcal{D}(\mathfrak{G}_A^M)$。

又、 $$X^u=\sum_{i=1}^n\int\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\,dX^{\eta_i}$$

とかけるから、

$$\langle X^u, Z\rangle=\sum_{i=1}^n\int\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\,d\langle X^{\eta_i}, Z\rangle_s=\int\left(\sum_{i=1}^n f^i\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\right)dA_s$$

但し、$\langle X^{\eta_i}, Z\rangle_t = \int_0^t f^i \, dA_s$, $Bu \equiv \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial u}{\partial \eta_i}$

これより、$\mathcal{G}^M_A$ の表現が得られる.

(II) の証明.

$\mathcal{G}_A + B$.

$$Bu = \frac{d\langle X^u, Z\rangle}{dA}$$

となる Z (Z : local martingale, A.F.) の存在が証明されれば

$$M_t = \exp\{Z_t - \tfrac{1}{2}\langle Z\rangle_t\}$$

で変換すれば求めるものが得られる。

そのためには、一般に、A.F. の場の Riesz の定理;

<u>Theorem</u>

$F : \mathcal{M}_{loc} \longrightarrow$ (locally A_t-integrable)

$\quad \ni X, Y$,

$$F(X+Y) = F(X) + F(Y)$$

$$F\left(\int f \, dX\right) = f \cdot F(X)$$

locally A_t-integrable な $h \geq 0$ が存在して、

$$F(X) \leq t^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\langle X \rangle}{dA} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_{loc}$$

$$\Rightarrow \quad {}^{\exists} Z \in \mathcal{M}_{loc} \ ; \quad F(X) = \frac{d\langle X, Z \rangle}{dA}$$

（証明略）

を使えばよい．

今の場合 $F(X^u) \equiv Bu(\cdot)$

とおけば，F は $\mathcal{M}_{loc}$ 上に，一意に拡張され，Rieszの定理の条件をみたすことが容易に確められる．