数理解析研究所講究録
第74巻 1969年 103-105

Wiener過程に絶対連続なGaussian processの表現

名古屋工大　櫃田倍之

平均0のGaussian process Y_t がBrown運動 B_t に関して可測な表現ができるか？という問題がMartingale theoryの応用として解決できる．tの動く区間が[0, T]に固定されているときの表現としては，Shepp及びH. Satoによって既に与えられているが，[0, T]のwhite noiseに関する確率積分を使うために，各t毎に $\mathbb{B}_t = [\sigma(B_s\,;\,s\le t)$ のcompletion$]$ 可測に表現できるかどうかは，未解決であった．

正確には，次のように定式化される：

「確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ 上に平均0でBrown運動(Wiener過程)と絶対連続なGaussian process Y_t があったときに，Brown運動 B_t を構成して，

$$Y_t = B_t + \int_0^t \left(\int_0^s k(s,u)\, dB_u \right) ds$$

と表現できる．但し，$k(s,u) \in L^2([0,T]^2)$.」

ただし，

Def. $(Y_t, \mathbb{B}, P)$ がBrown運動に絶対連続 $\Longleftrightarrow$

$\exists\, \psi(\omega)$ such that $E(\psi) = 1$, $\psi \geq 0$ and $(Y_t, \mathbb{B}, \psi(\omega)P(d\omega))$

がBrown運動になる．

証明の概略をのべると， $\mathbb{Y}_t = [\sigma\{Y_s\,;\,s\le t\}$ のPに関するcompletion$]$

とし， $E(\psi(\omega) \mid \mathbb{Y}_T) = \bar{\psi}(\omega)$ とおけば，

$(Y_t,\ \mathbb{Y}_T,\ \bar{\psi}(\omega)\, P(d\omega))$

もやはり Brown 運動である．以後 $\bar{\Psi}(\omega) P(d\omega) = \tilde{P}(d\omega)$ とかくことにする．(Y_t, P), $(Y_t, \tilde{P})$ がいずれも gaussian process であるから，$\bar{\Psi}(\omega) > 0$ (a.e P)．これは $\underbrace{}_{2つの}$gaussian process は，互に絶対連続か(別名 equivalent) か singular かのどちらかであると$\underbrace{す}_{主張}$する Hajék-Feldman の定理による．

$$M_t \equiv \tilde{E}(\bar{\Psi}(\omega)^{-1} \mid Y_t)$$

とすれば，$(M_t, Y_t, \tilde{P})$ は martingale をなす。一方 $(Y_t, \tilde{P})$ という Brown 運動に関する martingale は dY_t による確率積分で決定される (Kunita-S.Watanabe) ことと，Itô の変換公式を使えば，

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t f(s,\omega)\, dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)\, ds\right\}$$

とかける．但し $f(s,\omega)$ は各 s に対し Y_s 可測で，$\int_0^T f^2(s,\omega)\,ds < \infty$ となるものである．$\tilde{E}(M_t) = 1$, $0 \le {}^\forall t \le T$ であることから，Girsanov の定理により，

$$B_t = Y_t + \int_0^t f(s,\omega)\, ds$$

とおけば，(B_t, Y_t, P) は Brown 運動になる．さきの Hajék-Feldman の定理の証明の経過から，

$$E\left(\int_0^T f^2(s,\omega)\, ds\right) < \infty$$

が導びかれるが，これによって B_t, Y_t は 'jointly' に Gaussian system をなすことがわかる (この議論の詳細はめんどうであるが，基本的には，Meyer の regular potential の分解と同じやり方

である). 従って, B_t は Y_t の linear functional となることがわかり, f の形が決定されて, $l \in L^2([0,T]^2)$ とし,

$$B_t = Y_t + \int_0^t \left(\int_0^s l(s,u)\, dY_u \right) ds$$

とかける. (右辺 $\int l(s,u)\, dY_u$ の意味は, $\tilde{P}$ における Wiener 積分と考えればよい). $l(s,u)$ の解核を $k(s,u)$ とすれば, 求める表現がえられる. なお解核 k の存在は, $l(s,u) = 0$, $s < u$ と考えて l を Volterra 型の核と見ればよい.