数理解析研究所講究録
第 74 巻 1969 年 106-116

収束定理

阪大理　渡辺毅

（篠原昌彦記）

1. Ergodic theorems

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を probability space とする。

Birkhoff の Ergodic theorem とは

φ を $\Omega \to \Omega$ の measure preserving transformation とし

$f \in L^1(\Omega)$ に対して　$Tf(\omega) = T^{\varphi} f(\omega) \equiv f(\varphi(\omega))$ なる

$L^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ の写像 T を定義する。

この時　$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(\omega)$ が殆んど確実に存在して有限である。

Chacon - Ornstein の Ergodic theorem とは更に一般に

T を $L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ なる positive contraction operator

とする時　$g, f \in L^1(\Omega)$　$g \geq 0$　に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} T^k f}{\sum_{k=0}^{n-1} T^k g}$$ が $\left\{ \omega \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} T^k g > 0 \right\}$ の上で殆んど確実に存在して有限である。

上記の定理を証明するには maximal lemma を用いる。

Birkhoff の theorem の証明に用いられる maximal lemma は

$\Omega_f \equiv \bigcup_n \{ \sum_{k=0}^{n} T^k f > 0 \}$ と置く時 $\int_{\Omega_f} f \, dP \geqq 0$ が成立つ。

この lemma を仮定して Birkhoff の Ergodic theorem を証明する。

(証明)

$A \in \mathcal{F}$ が $T \cdot I_A = I_A$ (i.e. $\varphi^{-1} A = A$) の時に A を invariant set と呼ぶことにする。

A が invariant set であると明らかに.

$T(I_A \cdot f) = I_A \cdot Tf$ が成立つ。従って上の maximal lemma は更に強めて、A が invariant set の時 $\int_{\Omega_f \cap A} f \, dP \geqq 0$ が成立つ という形にすることができる。以下この形で lemma を使う。

(これを strong form of maximal lemma と呼ぶことにする。)

$b > a$ なる二つの実数 a, b を与えた時

$$A_b \equiv \{ \omega ; \quad b < \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f \}$$

$$A^a \equiv \{ \omega ; \quad a > \liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f \}$$

$A_b^a = A^a \cap A_b$ と定義する。

容易に分る様に A_b^a は invariant set で且つ

$$A_b^a \subset A_b \subset \Omega_{f-b}$$ が成立つ。

$$\therefore \int_{A_b^a} (f - b)\, dP \geqq 0$$

又同様に $A_b^a \subset A_a \subset \Omega_{a-f}$ より

$$\int_{A_b^a} (a - f)\, dP \geqq 0$$

従って両不等式を加えて.

$$(a - b) \int_{A_b^a} dP \geqq 0$$

又 $a - b < 0$ $\quad \therefore \quad P(A_b^a) = 0$

a, b を有理数全体を動かすことに依って lim sup と lim inf が一致することがわかる。

finiteness の証明は.

$$A_\infty \equiv \bigcap_b A_b = \left\{ \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f = +\infty \right\}$$ と置くと.

A_b が Ω_{f-b} に含まれる invariant set だから、上と同様にして

$$\int_{A_b} (f - b)\, dP \geqq 0$$

$$\therefore \int |f|\, dP \geqq \int_{A_b} f\, dP \geqq b P(A_b) \geqq b P(A_\infty)$$

b は任意に大きくとれる故 $P(A_\infty) = 0$ $\quad \therefore$ lim sup = lim inf $< +\infty$

lim sup = lim inf $> -\infty$ も同様. $\quad$ q. e. d.

(Chacon Ornstein については4節を見よ。)

2 Martingales with negative index

$\{x_n, \mathcal{F}_n, n \leqq 0\}$ が martingale であるとは. $\mu_n(A)=\int_A |x_n| dP$ なる measure μ を $\mathcal{F}_k$ の上で考えた時 σ－finite であれば $k \leqq n$ に関して x_n の $\mathcal{F}_k$ に対する conditional expectation が定義できるが、その意味で $E\{x_0 \mid \mathcal{F}_n\} = x_n$ と表わされることと定義する。

今ある N を固定した時

$A \in \mathcal{F}_N$ 且つ $\int_A |x_0| dP < +\infty$ が成立てば

$$\int_{A \cap \{\sup_{n > N} x_n > 0\}} x_0 \, dP = \sum_{N \leqq n \leqq 0} \int_{A \cap \{x_n > 0,\ x_m \leqq 0 \text{ for } N \leqq m < n\}} x_n \, dP \geqq 0$$

これを拡張して martingale に於ける次の maximal lemma が成立する。即ち.

$A \in \mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \leqq 0} \mathcal{F}_n$ で且つ $\int_A |x_0| dP < +\infty$ とすると

$$\int_{\Omega_{x_0} \cap A} x_0 \, dP \geqq 0 \qquad \text{但し} \quad \Omega_{x_0} = \left\{ \sup_{n \leqq 0} E\{x_0 \mid \mathcal{F}_n\} > 0 \right\}$$

これから Doob に依る次の収束定理を得る。即ち.

$\int_A |x_0| dP$ が $\mathcal{F}_{-\infty}$ の上で σ－finite であれば $\lim_{n \to -\infty} E\{x_0 / \mathcal{F}_n\}$ が a. e. で存在して有限。P は probability measure でなくても σ－finite であればよい。

3. M. Jerison's formulation ([6])

$(N, \mathcal{N}, \nu)$ を $N=\{0,1,2,\cdots\}$, $\mathcal{N}=$ all subsets of N, $\nu=$(element の個数) なる measure space とし，$\mathcal{G}_n$ を σ-algebra generated by $\{0,1,\cdots,n-1\}, n, n+1, \cdots$ と定義する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ なる probability space に対して $T;\ L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$ なる写像が与えられているとする。

$(U, \mathcal{U}, \mu) = (\Omega\times N,\ \mathcal{F}\times\mathcal{N},\ P\times\nu)$ とし，$n\geq 0$ に対して $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{F}\times\mathcal{G}_n$ と定義する。

又 $f\in L^1(\Omega)$ に対して $x_0(k,\omega) = T^k f(\omega)$ と置く。

この時 $x_{-n} \equiv E\{x_0 \mid \mathcal{F}_{-n}\}(k,\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} T^i f(\omega) & k<n \\ T^k f(\omega) & k\geq n \end{cases}$

従って $\lim\limits_{n\to\infty} x_{-n}$ が a.e.$-(k,\omega)$ に対して存在して有限なることと $\lim \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} T^i f(\omega)$ が a.e.$-\omega$ に対して有限なることとは同値である。

まて $\mathcal{F}_{-\infty} = \mathcal{F}\times 2$ (2 は trivial field on N) なる故 $A\in\mathcal{F}_{-\infty}$ は $A = A_0\times N$（但し $A_0\in\mathcal{F}$）の形に表わされる。

$$\therefore \int_A |x_0|\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_0} |T^k f(\omega)|\, dP$$

従って前の martingale の収束定理を直接にこの formulation に

適用して Ergodic theorem を導くことは、Ergodic theorem に普通に登場する T に関しては失敗する。

Ergodic theorem が成立する例としては、

① (Dunford Schwartz) $T: L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ が positive contraction で且つ $\|T\|_\infty \leq 1$ の場合。

② $\|T\|_1 < 1$ の場合　　等がある。

（注意）

有限なところでの maximal lemma から Ergodic theorem での maximal lemma を導くことは、出来るのではなかろうか。この結果自体は Ergodic theorem が正しいことが分っているから正しい。すなわちこの場合は $\int_A |x_0|\, dp$ が $\mathcal{F}_{-\infty}$ の上の measure として σ-finite でなくても convergence theorem の成立っている例となっている。

最後に Chacon-Ornstein 型の Ergodic theorem と同値な martingale の収束定理の formulation は、

$0 \leq g \in L^1$ に対して　$P_k(d\omega) = T^k g(\omega) \cdot P(d\omega)$ と置き

$(U, \mathcal{U}, \nu) = (\Omega \times N, \mathcal{F} \times \mathcal{N}, (P_k) \times \nu)$ と置く。

$x_0(k, \omega) \equiv \dfrac{T^k f(\omega)}{T^k g(\omega)}$ に対して

$$E\{x_0 \mid \mathcal{F}_{-n}\}(k, \omega) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} T^i f}{\sum_{i=0}^{n-1} T^i g} & k < n \\[2ex] \dfrac{T^k f(\omega)}{T^k g(\omega)} & k \geq n \end{cases}$$

となることを使えばよい。

4. Brunnel's maximal lemma ([2], [9] 参照)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は probability space. とし. T を $L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$ なる positive contraction operator とする。

S を $L^\infty(\Omega)\longrightarrow L^\infty(\Omega)$ なる T の dual operator とする。

S は又、positive contraction である。

$Sf(\omega)=\int S(\omega, d\omega')f(\omega')$ と書ける場合 $S(\omega, d\omega')$ を S の transition function on Ω. と呼ぶ。Doob [5] に依れば常にこの場合に reduce できる。

Ω を state space として $S(\omega, d\omega')$ を transition function とする Markov chain $\{y_n\}_{n\geq 0}$ を考える。

$E\subset\Omega$ に対して $\psi_E(\omega)=H_E 1(\omega)=P_\omega\left\{\alpha \,\middle|\, \begin{array}{l} y_n(\alpha)\in E \\ \text{for some } n\geq 0\end{array}\right\}$

と置くと次の Brunnel の maximal lemma が成立する。即ち、

$f\in L^1(\Omega)$ に対し. $\widetilde{\Omega}_f=\bigcap_{k\geq 0}\bigcup_{n\geq k}\left(\sum_{k\leq m\leq n}T^m f>0\right)$

と置く時 $\forall E\subset\widetilde{\Omega}_f$ に対して. $\int f\cdot\psi_E\,dP\geq 0$ が成立つ。

この maximal lemma を仮定して Chacon Ornstein の定理を証明する。

(証明) $f\geq 0$ と仮定しても一般性を失わない。

$A'=\left\{\omega \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty}T^k g(\omega)>0 \text{ 且つ } \lim\frac{\sum T^k f(\omega)}{\sum T^k g(\omega)} \text{ が存在しない}\right\}$

と置き $P(A')>0$ として矛盾を導く。

仮定より　$a<b$ なる二実数 a, b があって．

$$E=\left\{\sum_{k=0}^{\infty} T^k g(\omega)>0 \text{ 且つ } \liminf \frac{\sum T^k f}{\sum T^k g}<a<b<\limsup \frac{\sum T^k f}{\sum T^k g}\right\}$$

と置くと，$P(E)>0$．

もし $\omega \in E$ とすると明らかに $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k f=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k g=+\infty$

なる故　$$\limsup \frac{\sum_{i=0}^{n-1} T^i f(\omega)}{\sum_{i=0}^{n-1} T^i g(\omega)}=\limsup \frac{\sum_{i=k}^{n-1} T^i f(\omega)}{\sum_{i=k}^{n-1} T^i g(\omega)}$$

が $\forall k$ に対して成立する。

$\therefore\ \omega \in E$ より　$\omega \in \tilde{\Omega}(f-bg)$ が出る。

従って　maximal lemma より　$\int (f-bg)\psi_E dP \geqq 0$

同様に　$\int (ag-f)\psi_E\, dp \geqq 0$

両を相加えて　$(a-b)\int g\cdot\psi_E\, dp \geqq 0$

$$\therefore \int g\cdot \psi_E\, dp \leqq 0 \qquad \therefore \int g\cdot\psi_E\, dp=0$$

又 $\tilde{\Omega}(f-bg) \subset \tilde{\Omega}_{T^k(f-bg)}$　　$\therefore\ E \subset \tilde{\Omega}_{T^k(f-bg)}$

$\therefore$ maximal lemma より　$\int T^k(f-bg)\psi_E dP \geqq 0$

同様にして $\int T^k(ag-f)\psi_E\, dp \geqq 0$

両を相加えて　$(a-b)\int T^k g\,\psi_E\, dp \geqq 0$　　$\therefore \int T^k g\cdot\psi_E\, dP=0$

$\therefore \int\left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i g\right)\psi_E dP=0$　　　又　$\psi_E \geqq I_E$

$\therefore \int\left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i g\right) I_E\, dp=0$

又 $E \subset A'$　又 A' の上では $\sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0$

$\therefore P(E) = 0$　これは矛盾である。

極限が finite であることの証明も同様にして出来る。q.e.d.

5. Ergodic theorem への他の approach に関する論文を紹介する。

Neveu [7] の方法は

G を Ergodic theorem が成立つ f の class と置く。この時

1) G は $L^1(\Omega)$ の中で dense である。

2) G は $L^1(\Omega)$ の中で closed である。

の二段階で証明する。1)の証明は容易であるが、2) には maximal lemma を用いる。

この方法は Chacon–Ornstein 型, martingale の収束, vector valued martingale, vector valued ergodic theorem に対しても適用できる。

Tulcea [11] では

$\{T_p\}_{n \le p \le 0}$ を L^1 上の contraction の family とする。(p は整数)

T_p が条件 $T_p \cdot T_{p+1} = T_p$ を満たす時

$\Omega_f = \bigcup_p \bigcup_n \{\sum_{m \le n} T_p^m f > 0\}$ と置くと $\int_{\Omega_f} f \ge 0$ である。

$n = -1$ で $T_{-1} = T$, $T_0 = I$ と置けば これは Ergodic maximal lemma になり, $T_p = E(\cdot \mid \mathcal{F}_p)$ とすれば martingale maximal lemma である。

Rota [10] の方法では、

φ_t を semi-group of measure preserving transformation on Ω

とする。

$T_t f(\omega) \equiv f(\varphi_t(\omega))$ on $L^\infty(\Omega)$ と定義する。

T_t の generator を D とすると、D は derivation である。即ち、

$D(u \cdot v) = uDv + vDu$

1 が D の spectre でないとする。

$R = (I - D)^{-1}$ と置くと、

(*) $R(u \cdot v) = Ru \cdot Rv + R((u - Ru)(v - Rv))$

を満足する。一般に (*) を満足する operator を Reynolds operator と呼ぶ。(Kampé de Fériet)

R_t を contraction (即ち $u \geq 0$ で $0 \leq \int R_t u \leq \int u$)

且つ Reynolds operator とする。

$\{R_t\}_{0 \leq t < +\infty}$ が更に $(sR_t - tR_s) = (\cancel{s} - t) R_t R_s$ を満たす時 generalized martingale と呼ぶ。この時次の定理が成立する。

(定理) generalized martingale $\{R_t\}_{t \geq 0}$ が与えられた時 $u \in L^p$ $(p > 1)$ に対して $\lim_{t \downarrow 0} R_t u$ が a.e. で存在する。

これは

$R_t = E\{\cdot \mid \mathcal{F}_t\}$ とおくと decreasing field の martingale の収束定理になっている。

Ergodic theorem への翻訳は

$$G_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\lambda d\lambda = (t-D)^{-1}$$

$$R_t = t G_t \quad \text{とすると} \quad G_t - G_s = (s-t) G_t G_s$$

で R_t は generalized martingale になることがわかる。

これと $\lim_{t \downarrow 0} t \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\lambda u d\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\int_0^\lambda T_u u du}{\lambda}$ を見ればよい。

問題点は、このままの形では Chacon − Ornstein 型でない。

又 $P>1$ の場合しか言えてないが $p=1$ の時にはどんなむづかしさがあるか。

文献

1. P. Billingsley, Ergodic theory and information, Wiley, 1965
2. A. Brunel, C.R. Acad. Sci., Paris 256 (1963) 5481−84
3. R.V. Chacon & D. Ornstein, Ill. J. Math. 4 (1960) 153−160
4. J.L. Doob, Proc. 4-th Berkeley Symp. vol. 2 95−102
5. —— , Z. Wahr. 1 (1963) 288−94
6 M. Jerison, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 531−39
7. J. Neveu, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 15 (1965) 31−42
8 —— , Mathematical foundations of the calculus of prob. Holden Day, 1965
9 P.A. Meyer, Ann. Inst. Fourier Grenoble 15 (1965) 89−96, 97−102
10 G.C. Rota, C.R. Acad. Sci. Paris 252 (1961) 2064−66
11 A & C. Ionescu Tulcea, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963) 107−24