数理解析研究所講究録
第74巻 1969年 117-123

マルチンゲールへのポテンシャル論的アプローチ

東大理　篠原昌彦

§1　P. A. Meyer は[1]の中でマルチンゲールをポテンシアル論的に扱う次の方法を与えている。即ち、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、$\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を $\mathcal{F}$ の n に関して単調増加な sub-σ-field とする。但し $\mathbb{N}^+=\{1,2,3\cdots\}$ は time parameter である。$S=\Omega\times\mathbb{N}^+$ なる直積空間を考え、S 上の σ-field として、S の部分集合の中で $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\times\{n\}$ なる形の部分集合（但し $A_n\in\mathcal{F}_n$）全体を考える。各 $\mathcal{F}_n$ が σ-field である故、この形の部分集合全体が σ-field を成す。この σ-field を $\mathcal{F}$ と置く。S の上で定義されて実数値（$\pm\infty$ をも許す）をとる $\mathcal{F}$-可測関数 $X(\omega, n)$ に対して、n を固定してこれを Ω の上の関数と考えると、$\mathcal{F}_n$-可測関数となる。逆に $\{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ なる Ω 上の実数値可測関数列が与えられて、各 X_n は $\mathcal{F}_n$-可測であるとすると、これを直積空間 S の上の関数と考えれば $\mathcal{F}$-可測となる。従って、状態空間を $[-\infty, +\infty]$ とした $\{\mathcal{F}_n\}$ に関する確率過程と、S から $[-\infty, +\infty]$ への $\mathcal{F}$-可測関数と

の間に一対一の対応がつき、両者は同一視できる。（以下Ω, $\mathcal{F}$, P, $\mathcal{F}_n$を固定し、確率過程と言えば$\{\mathcal{F}_n\}$に関するものを意味するものとする。） 今、各$\mathcal{F}_n$に関しての条件付確率が意味をもつような確率過程$X=\{X_n\}_{n\in N^+}$に対して、新しい確率過程$\{(N\cdot X)_n\}$を$(N\cdot X)_n \equiv E(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)$で定義すると確率過程から確率過程への写像$N$は各$n$に対してその値を$P$-a.e で定める。言い換えれば $\mathfrak{N}$を$\mathcal{F}$のsub-familyで$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\times\{n\}$ （但し $A_n\in\mathcal{F}_n$, $P(A_n)=0$）なる形の集合全体とすれば、S上の$\mathcal{F}$-可測関数は写像Nに依って$\mathfrak{N}$の集合の上での値の不正確さを除いて、別の$\mathcal{F}$-可測関数に写される。このNに関してのポテンシアル論を考えると、excessive function（又は invariant function）には supermartingale（又は martingale）が対応する。

§2. 上のNを一般化して、次のformulationを行う。即ち、Sをある抽象空間、$\mathcal{F}$をその上のσ-fieldとする。$\mathfrak{N}$を$\mathcal{F}$のsub-familyで、可算無限個の和集合をとる操作に関して閉じているものとする。$\mathcal{P}^0$をSから$[0,+\infty]$への$\mathcal{F}$-可測関数の全体とする。$\mathcal{P}^0$の元に次の同値関係を入れる。

$$f\sim g \overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}A\in\mathfrak{N},\ f(s)=g(s) \text{ on } S-A$$

この同値関係に依って $\mathcal{P}=\mathcal{P}^0/\sim$ と定義する。$\mathfrak{N}$が測度空間の測度零の集合全体である場合に、その測度空間上の関数空

間に対して行う様に、$\mathfrak{N}$が可算無限個の和で閉じている故に、$\mathcal{P}$の上の加法、乗法、可算極限操作等が自然に定義される。以下では関数空間の場合と同じく、$\mathcal{P}^0$の元とその元が属する同値類を区別しない。又$\mathfrak{F}$の集合に関しても、その定義関数が同値になる様なクラスと、それに属する集合は同一視することとする。この formulation での potential 論的な定理を述べる。

（定義1）　$\mathcal{P}$から$\mathcal{P}$への写像Nは次の条件(1), (2)を同時に満たす時 sub-markov pseudo kernel（以下単に kernel）と呼ぶ。

(1)　$\lambda_i \geqq 0$　$i=1,2,3,\cdots$　に対して　$N\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i N f_i$

(2)　$N\mathbf{1} \leqq \mathbf{1}$　，但し$\mathbf{1}$は値が1の定数値関数。

（定義2）　$\mathcal{P} \ni f$は$f<+\infty$で且つ$Nf \leqq f$の時(Nに関して) excessive であると言う。不等号が等号の時 invariant と呼ばれる。又条件$f<+\infty$を除いた時には広義に excessive（又は広義に invariant）と呼ばれる。

（定義3）　写像$G=\sum_{n=0}^{\infty}N^n$　（但し$N^0=I$：恒等写像）はNの potential kernel と呼ばれる。$f \in \mathcal{P}$に対してGfをfの potential と呼ぶ。

（定理１）　$f\in\mathcal{P}$ の時 f の potential Gf は広義に excessive である。又 f が excessive であって、且つ $N^{\infty}f=0$ が成立する時 f は $h=f-Nf$ の potential として表わされる。

（定理２）excessive な f は次様に分解される。即ち $f=g+h$ で g は excessive で且つ $N^{\infty}g=0$ を満たし h は invariant。

定理１に依れば g はある $\mathcal{P}$ の元の potential として表わされる。（Riesz の分解定理）

（定理３）$f\in\mathcal{P}$ に対して $A=\{s;f(s)>0\}$ と置く。a を非負な定数として、広義に excessive な g に対して、集合 A の上で　$a+g\geqq Gf$　が成立すれば、この不等式は S 全体の上で成立する。

（系）　f は excessive で $N^{\infty}f=0$ とする。又 g は広義に excessive とする。　$A=\{s;\ f(s)>(Nf)(s)\}$ と置く時 集合 A の上で $a+g\geqq f$ が成立すればこの不等式は S 全体の上で成立する。但し a は $a\geqq 0$ なる定数である。

（定義４）　$A\in\mathcal{F}$ に対して I_A は A の定義関数を掛ける演算子を表わす。又 $N_A\equiv N\cdot I_A$ とし　$H_A\equiv I_A+I_{A'}\cdot(\sum_{p=0}^{\infty}(N_{A'})^p)\cdot N_A$ と定義する。但し A' で A の余集合を表わす。

（定理４）　f を広義に excessive であるとする。$A\in\mathcal{F}$ に対して　$f_A\equiv H_A\cdot f$ は A の上で $g\geqq f$ なる広義に excessive な g の中で最小なものである。

(定理5) a, b を $0 \leqq a < b$ なる定数とする。広義に excessive な f に対して $A=\{s;\, f(s) \leqq a\}$　$B=\{s;\, f(s) \geqq b\}$ と置くと、次の不等式が成立する。

(1) $\mathbb{1}_B \leqq \dfrac{f}{b}$

(2) $\mathbb{1}_{AB} + \mathbb{1}_{ABAB} + \mathbb{1}_{ABABAB} + \cdots \leqq \dfrac{\min[f, b]}{b-a}$

(3) $\mathbb{1}_{BA} + \mathbb{1}_{BABA} + \mathbb{1}_{BABABA} + \cdots \leqq \dfrac{\min[f, a]}{b-a}$

但し $\mathbb{1}$ は値1をとる定数値関数で、$\mathbb{1}_A$ は定理4に於ける f_A と同じ定義で、又 $\mathbb{1}_{AB} = (\mathbb{1}_A)_B$ 等々とする。

以上定理1〜4迄は Meyer[1] と同じであり、定理5は Doob[2] と同じ様にして証明される。

§3. 上に得られた potential 論の形での定理を martingale の言葉に書き替えてみる。この§での定理の番号は前の§でのそれに対応する。

(補題1) $f \in \mathcal{P}$ はこれを§2の意味で考えて excessive であることと、確率過程と考えて、有限値 supermartingale となることとは同値である。excessive を invariant とすれば supermartingale は martingale と書き替えればよい。又広義の excessive 又は広義の invariant とすれば「有限値」が除かれる。但し $\mathcal{P}$ は状態空間を $[0\ +\infty]$ とする $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in N^+}$ に関する process 全体を考え、S, $\mathcal{F}$, Ω, N は§1で述べたものとする。

（定理1）$\{X_n\}$ を有限非負値 supermartingale とし，任意の n に対して $\lim_{m\to\infty} E(X_m \mid \mathbb{F}_n)=0$ とする。この時 $Y_n = X_n - E(X_{n+1} \mid \mathbb{F}_n)$ とおくと，$X_n = \sum_{m=0}^{\infty} E(Y_{n+m} \mid \mathbb{F}_n)$ と表わせる。

（定理2）$\{X_n\}$ を有限$\underset{\text{非負}}{\text{値}}$ supermartingale とすると $\{X_n\}$ は $X_n = Y_n + Z_n$ と分解される。ここで $\{Y_n\}$ は $\lim_{m\to\infty} E(Y_m \mid \mathbb{F}_n)=0$ なる supermartingale であり Z_n は martingale である。

（定理3）$\{X_n\}_{n\in N^+}$ を非負値確率過程とする。又 a を非負実数とする。$A_n = \{\omega;\ X_n(\omega) > 0\}$ と置きある$\underset{\text{非負値}}{\text{supermartingale}}$ $\{Y_n\}_{n\in N^+}$ が 各 n に対して A_n の上で

$$a + Y_n \geqq \sum_{m=0}^{\infty} E(X_{n+m} \mid \mathbb{F}_n)$$

が成立てばこの不等式は P-a.e. で Ω 全体の上で成立つ。

（系）$\{X_n\}$ は非負有限値 supermartingale で $\lim_{m\to\infty} E(X_m \mid \mathbb{F}_n)=0$ とする。$\{Y_n\}$ は supermartingale で $A_n = \{\omega;\ X_n > E(X_{n+1} \mid \mathbb{F}_n)\}$ と置く時，$a + Y_n \geqq X_n$ が A_n の上で成立すれば，この不等式は Ω 全体で P-a.e. で成立する。

（定理4）$\{X_n\}$ を非負値 supermartingale とし $\{A_n\}_{n\in N^+}$ を $A_n \in \mathbb{F}_n$ なる集合の族とする。各 A_n の上で $Z_n \geqq X_n$ となる様な supermartingale $\{Z_n\}$ の集合の中に最小のものが存在して，それは $X_n^A \equiv E\left(\sum_{m=n}^{\infty} I_{nm}^A X_m \mid \mathbb{F}_n\right)$ と表わされる。但し I_{nn}^A は A_n の定義関数，$I_{nm}^A\ (m>n)$ は $A_m \cap \left(\bigcup_{i=n}^{m-1} A_i\right)'$ の定義関数を掛ける演算子を表わすものとする。

（補題２）$\{X_n\}$ を非負値 supermartingale とする。a, b を $0 \leqq a < b$ なる定数として $A_n = \{\omega ; X_n(\omega) \leqq a\}$, $B_n = \{\omega ; X_n(\omega) \geqq b\}$ とおくと次の三つの等式が成立する。

(1) $\mathbf{1}^B_n = P(\{\omega ; \exists m \geqq n,\ X_m(\omega) \geqq b\} \mid \mathcal{F}_n)$

(2) $\mathbf{1}^{AB}_n + \mathbf{1}^{ABAB}_n + \mathbf{1}^{ABABAB}_n + \cdots = E(D_n \mid \mathcal{F}_n)$

(3) $\mathbf{1}^{BA}_n + \mathbf{1}^{BABA}_n + \mathbf{1}^{BABABA}_n + \cdots = E(U_n \mid \mathcal{F}_n)$

但し D_n, U_n はそれぞれ時刻 n 以後での $\{X_m\}$ の区間 $[a\ b]$ に対する down-crossing number 及び up-crossing number である。又 $\mathbf{1}$ は値が 1 の定数値 process で $\mathbf{1}^A{}_n$ は定理４に於ける X^A_n と同じ意味とし $\mathbf{1}^{AB}_n = (\mathbf{1}^A)^B_n$ 等とする。

（定理５）$\{X_n\}$ を非負 supermartingale とする時次の三つの不等式が成立する。

(1) $P(\{\omega ; \exists m \geqq n,\ X_n(\omega) \geqq b\} \mid \mathcal{F}_n) \leqq \dfrac{X_n}{b}$

(2) $E(D_n \mid \mathcal{F}_n) \leqq \dfrac{\min[X_n, b]}{b-a}$

(3) $E(U_n \mid \mathcal{F}_n) \leqq \dfrac{\min[X_n, a]}{b-a}$

〔文献〕

[1] P. A. Meyer. Probabilités et Potentiel

[2] J. L. Doob. Proc. 4-th Berkeley Symp. vol 2. 1961 95-102.