

数式処理の例題

常微分方程式の解法 (1)

京大 数研 渡辺隼郎

§ 1. 序

常微分方程式を非数值的に計算機で解かせることは、実用上からいって極めて大切である。しかし非数值的に解くといっても、求積法もあれば中級数解を求めることもあり、目的も様々である。またこれを実現するためのプログラミング言語がどの程度のもので、どの様な機能を有すればよいかもよく分らない。そこでこれらの疑問を調べるために有理関数係数をもつ線形常微分方程式の確定特異点における対数項出現の判定を数式処理を行うことを試みてみた。対数項は特異点における解の特異性をあらわすものであるから、もしこれが出ないのであればその特異点は見かけ上のものにすぎない。従ってこれがより簡単な或はよく性質の知られた微分方程式に帰着されれば、ある意味でその方程式が解けたことになる。

この問題を解くためのアルゴリズムを作る上で問題となることは、オ1にその微分方程式の決定方程式と呼ばれる代数方程式の根の中に整数差を持つものがあるかどうかを近似的にはではなく求めることであり、オ2にその微分方程式の確定特異点のまわりの巾級数解の係数が一般には有理数とはならないがこれをどう取扱えばよいかということである。

プログラミングの立場から云えば、リストプロセスで動かす多項式や有理式の演算のうちどれだけのものがあるか十分であるのか、或はこれだけでは出来ないのか、また出来るとしたそのプログラムほどの様な形で記述されるのかということに興味の対象となる。

この報告において、上の問題が生ずる理由と、その問題に対する解答を与える。すなわち有理数係数の代数方程式が整数差を持つ根の組を有するかどうかは、この代数方程式を有理数の範囲で因数分解すればすぐに分る。また確定特異点のまわりの巾級数解の係数はこの代数方程式の根を入(これは一般には有理数ではない)としたとき入の有理円数としてあらわされる。これを実現するプログラムは有理数係数の一変数有理円数を係数とする多変数多項式の加減乗除と代入、微分、因数分解が出来ればよく、一般的な単純化ルーチンは必要でないことが分る。以下にこれを詳述しよう。

§ 2. フロベニウスの方法

この節では線形常微分方程式の確定特異点における巾級数解を求めるアルゴリズムの概要をフロベニウスの方法に従って説明する。線形常微分方程式

$$(1) \quad L(y) \equiv \sum_{i=0}^m (x-a)^{m-i} P_i(x) y^{(m-i)} = 0 \quad P_0(x) = 1$$

は $P_i(x)$ $i=1, \dots, m$ が $x=a$ で正則なとき $x=a$ を確定特異点に持つとのい、 $x=a$ において (1) に対応する決定方程式

$$(2) \quad \sum_{i=0}^m P_{m-i}(a) \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1) = 0$$

の m 個の根 $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ に対応する m 個の独立な解

$$(3) \quad \psi(x) = (x-a)^\lambda \left\{ \sum_{i=0}^h \psi_i(x) (\log(x-a))^i \right\}$$

をもつ。こゝに

$$(4) \quad \psi_i(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{h}{i} g_m^{(h-i)}(\lambda) (x-a)^m \quad i=0, 1, \dots, h$$

は $x=a$ で正則で $\psi_i(a)$ の中には 0 でないものがある。また

は、(2) の根のうち整数差で移り得る一群を $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ その

重複度を ν_1, \dots, ν_μ としたとき $\xi_{\mu+1} = 0$, $\xi_j = \nu_j + \nu_{j+1} + \dots + \nu_\mu$,

$j=1, 2, \dots, \mu$ と定めた ξ_j を用いて $\lambda = \lambda_j$ に対応する解を

(3) (4) で $h = \xi_{j+1}, \xi_{j+1} + 1, \dots, \xi_j - 1$ とおいて得るものである。

ゆえに $g_m(\lambda)$ を求めることが分ればよい。(1) の解として

$$(5) \quad y(x, \lambda) = (x-a)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x-a)^m \quad g_0 \neq 0$$

という形のものを考える。これを (1) に代入する。このとき

$$L((x-a)^\lambda) = (x-a)^\lambda f(x, \lambda)$$

$$(6) \quad f(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m P_{m-i}(x) \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1) = \sum_{r=0}^m f_r(\lambda) (x-a)^r$$

$$f_r(\lambda) = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial x^r} f(x, \lambda) \Big|_{x=a}$$

に注意して

$$L(g(x, \lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m L((x-a)^{m+\lambda}) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m (x-a)^{m+\lambda} f(x, \lambda+m)$$

$$= (x-a)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^m f_i(\lambda+m-i) g_{m-i} \right\} (x-a)^m$$

より (5) が (1) の解と存在するための必要条件として次の関係式

$$(7) \quad \sum_{i=0}^m f_i(\lambda+m-i) g_{m-i} = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

をうる。逆に (7) をみたす g_m を係数とする中級数 (5) は収束して (1) の解と存在することが知られてゐるから g_m を決めることが出来ればよい。仮定より $g_0 \neq 0$ 故から λ は $f_0(\lambda) = 0$ の根でなければならぬ。ところがこれが決定方程式 (2) に等しい。さて $f_0(\lambda) = 0$ の根を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とするとき

1) λ_i の中に整数差を持つものも等しいものも存在するとき。

$\lambda = \lambda_i$ $i = 1, \dots, m$ に對して $f_0(\lambda+m)$ $m = 1, 2, \dots$ は 0 に存在しないから g_m $m = 1, 2, \dots$ を (7) により順に, $g_1 = -f_0(\lambda+1)^{-1} \{ f_1(\lambda) g_0 \}$, ... 一般に g_1, \dots, g_{m-1} まで求めておいたとき,

$$g_m = -f_0(\lambda+m)^{-1} \sum_{i=1}^m g_{m-i} f_i(\lambda+m-i)$$

として求めることが出来る。 $f_0(\lambda) = 0$ より g_m は高々 $m-1$ 次の λ の有理係数の多項式を分子分母に持つ有理関数とすることが出来る。このときは解は (5) の形となり $\log(x-a)$ 存在対数項は出現しない。

ii) λ_i の中に整数差をもつものか等しいものがあるとき

(7) において g_0 は λ の関数と考へ $m=1, 2, \dots$ の式がみたされるようにすると

$$L(g(x, \lambda)) = f_0(\lambda) g_0(\lambda) (x-a)^\lambda$$

$$g_1 = -\frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda+1)} g_0(\lambda), \dots, g_m = \frac{\lambda \text{ の多項式}}{f_0(\lambda+1) \dots f_0(\lambda+m)} g_0(\lambda)$$

なることはすぐにわかる。ゆゑに整数差の最大のものを q と

$$\text{して } g_0(\lambda) = C f_0(\lambda+1) \dots f_0(\lambda+q) \quad \text{とあくと, } m \leq q \text{ のとき}$$

g_m は λ の多項式となり, $m > q$ のときは $g_m(\lambda) = \frac{\lambda \text{ の多項式}}{f_0(\lambda+q+1) \dots f_0(\lambda+m)}$

なり形をもつ。この分母は全ての λ_i に對して 0 とならない。

このように $g_m(\lambda)$ を定めるとき $f_0(\lambda) g_0(\lambda)$ が $\lambda - \lambda_j$ を含む個数を

調べると $\sum_j \nu_j$ 個であり, $g_0(\lambda)$ は $\sum_{j=1}^n \nu_j$ 個であることが分る。これと

$$L\left(\frac{\partial^h}{\partial \lambda^h} g(x, \lambda)\right) = \frac{\partial^h}{\partial \lambda^h} (f_0(\lambda) g_0(\lambda) (x-a)^\lambda) \quad \text{なることから}$$

$$(8) \quad \frac{\partial^h}{\partial \lambda^h} g(x, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_j} = (x-a)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} (x-a)^m \left\{ \sum_{i=0}^h g_m^{(h-i)}(\lambda) \binom{h}{i} (\log(x-a))^i \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_j}$$

をうる。そこで $h = \sum_{j=1}^n \nu_j, \sum_{j=1}^n \nu_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^n \nu_j - 1$ とおくことにし λ_j

を指数とする解を μ_j 個うる。これは (3), (4) を示している。

iii) 上で $\mu_j = 1$ ならば $h = \sum_{j=1}^n \nu_j$ とおいた解が唯一個得られることが

このとき対数項の出ないことがあふ。これは (7) において

$$\sum_{i=0}^m f_i(\lambda+m-i) g_{m-i} = 0 \quad m=1, 2, \dots, q$$

が $f_0(\lambda+r) = 0 \quad 1 \leq r \leq q$ とするものがあるにちがひなく

す成立つ場合である。この判定については § 4 で示れる。

§ 3. 代数方程式の根が整数差をもつ事の判定

ここで数式処理により微分方程式を解くときの条件をほきりさせよう。(1)において $P_i(x) \quad i=0,1,\dots,m$ は $P_0(x)=1$ で $i \geq 1$ のとき $x=a$ (有理数) で正則な有理数係数をもつ有理関数とする。すると $x=a$ における決定方程式(2)は有理数係数の λ の m 次多項式となる。必要ならば(2)の両辺に定数をかけて(2)を整数係数の代数方程式とみなすことが出来る。この節では整数係数の代数方程式 $f_0(\lambda)=0$ の根を整数差で移り得るものの組に分割するアルゴリズムを与える。

その為には既約な多項式 $=0$ とおいた代数方程式の中には重根も整数差を持つ根もないこと及び整数差 q を持つ根があることと $f_0(\lambda)=f_0(\lambda+q)=0$ が同値であることに注意すれば、

$$(9) \quad f_0(\lambda) = \varphi_1(\lambda)^{u_1} \cdots \varphi_r(\lambda)^{u_r}$$

と有理数係数の範囲で因数分解したとき

$$(10) \quad \varphi_i(\lambda) = \varphi_i(\lambda - q) \quad i \neq j$$

をみたす (i, j) の組と q をすべて求めればよいことが分る。

$\varphi_i(\lambda)=0$ の根は一意に同じ性質を持つから、 $\varphi_i(\lambda)$ のまゝで扱うのである。まず φ_i と φ_j が同じ次数であることを分る。

$$\varphi_i(\lambda) = \sum_{k=0}^k a_k \lambda^k, \quad \varphi_j(\lambda) = \sum_{k=0}^k b_k \lambda^k$$

より $\varphi_i(\lambda) = \varphi_j(\lambda - q)$ として λ^k と λ^{k-1} の係数を調べて

$$(11) \quad a_k = b_k, \quad q = (-a_{k-1} + b_{k-1}) / (k \cdot b_k)$$

をうる。これから (10) をみたす (i, j) と q を全て求めるには、まず $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_k(\lambda)$ を同じ次数のものに類別して、一つの類の中で $a_k = b_k$ となる $\varphi_i(\lambda)$ と $\varphi_j(\lambda)$ に対して (11) の q を求めて、これが実際に $\varphi_i(\lambda - q) = \varphi_j(\lambda)$ をみたしていることを判定すればよい。それには $\varphi_j(\lambda)$ に $\lambda - q$ を代入することから出来る。以上の手続を $f_0(\lambda)$ を有限回で因数分解することから出来る全体として有限回で行うことが出来ることを示されたわけである。ところで $f_0(\lambda)$ を有限回で因数分解するにはいわゆるクリネッカーの方法を用いなければならない。(文献 2 参照, その他の因数分解の方法については文献 5 参照のこと。)

§ 4. 決定方程式は重根を持たないが整数差を有する根の組を持つとき

決定方程式に対して § 3 の判定を行って標題の場合が生じた時には一般にフリエーウスの方法から分子様に解に対する数項が出る。しかし § 2 iii) の場合すなわち整数差の最大値 q に対して、また

$$f_0(\lambda + k_i) = 0 \quad 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_l \leq q \quad \text{でも}$$

$$(12) \quad \sum_{i=0}^m f_i(\lambda + m - i) g_{m-i} = 0 \quad m = 1, 2, \dots, q$$

が成立するように g_{m-i} を定めることが出来る対数項は出現しない。この判定は次のように行えばよい。

$f_0 = c$ として § 2 i) の方法で g_1, \dots, g_{k-1} を入の有理数係数

の有理関数として求めることが出来る。次にこれから

$$(13) \quad g_{k_1} f_0(\lambda + k_1) + A_{k_1}(\lambda) = 0$$

ここに $A_{k_1}(\lambda)$ は λ の有理数係数の有理関数, とする事が出来る。 $f_0(\lambda + k_1) = 0$ なるのであるから $A_{k_1}(\lambda) \neq 0$ なる時は (12) をみたす g_i はないし, $A_{k_1}(\lambda) = 0$ なる g_{k_1} は任意である。前者なる時は対数項が出現する。後者なる時は g_{k_1} を自由項として, $g_{k_1+1}, \dots, g_{k_2-1}$ を求めると $g_{k_1+i} = B_{k_1+i}(\lambda) g_{k_1} + A_{k_1+i}(\lambda)$ $i=1, 2, \dots, k_2-k_1$ なる事が分る。前と同様にしてこれから

$$(14) \quad g_{k_2} f_0(\lambda + k_2) + B_{k_2}(\lambda) g_{k_1} + A_{k_2}(\lambda) = 0$$

ここに $B_{k_2}(\lambda), A_{k_2}(\lambda)$ は λ の有理数係数の有理関数, とする事が出来る。 $f_0(\lambda + k_2) = 0$ なるのであるから $A_{k_2}(\lambda) \neq 0, B_{k_2}(\lambda) = 0$ なる時は (12) をみたす g_i はないし, $A_{k_2}(\lambda) \neq 0, B_{k_2}(\lambda) \neq 0$ なる時は

$$(15) \quad g_{k_1} = -A_{k_2}(\lambda) / B_{k_2}(\lambda)$$

として g_{k_2} を自由項とみなし, $A_{k_2}(\lambda) = 0, B_{k_2}(\lambda) = 0$ なる時は g_{k_2}, g_{k_1} を自由項とみなして次へ進む。このことを g_{k_2} までくり返せば対数項出現の判定が有限回で, λ の有理数係数の有理関数を係数とする自由項 g_{k_i} の一次結合を扱うことによつて得られる。対数項が出現しない場合, 巾級数解の係数は一般に自由項を係つか持っていない事に注意しておこう。

上における $A_{k_i}(\lambda) = 0$ などの判定はその分子多項式を今考えている既約多項式が割り切れるかどうかで分る。

§ 5. 確定特異点が代数的数の場合

今まで確定特異点が有理数である場合を考えてきた。この節では確定特異点が有理数係数の代数方程式 $r(x)=0$ の根であるとき、すなわち ω_i を $r(\omega_i)=0$ の根とした時、次の形の微分方程式の $x=\omega_i$ のまわりの解を考える。

$$(16) \quad \sum_{\lambda=0}^m (r(x))^{m-\lambda} P_{\lambda}(x) y^{(\lambda)} = 0 \quad P_0(x)=1$$

この方程式の $x=\omega_i$ における決定方程式は $r(x)$ と ω を (17) の様に考えた時 (18) で与えられる。

$$(17) \quad r(x) = r \prod_{i=1}^s (x - \omega_i) \quad \omega = r \prod_{i=2}^s (\omega_1 - \omega_i)$$

$$(18) \quad \sum_{\lambda=0}^m \omega^{m-\lambda} P_{\lambda}(\omega_1) \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+\lambda+1) = 0$$

そこで § 3, § 4 と同じように解の対数項出現の判定を行ってみる。決定方程式はやはり (9) の形に因数分解できる。但し多変数多項式の因数分解を行う。(文献 4 参照) このとき $f_0(\lambda) = \varphi_1(\lambda)^{a_1} \cdots \varphi_r(\lambda)^{a_r}$ における $\varphi_i(\lambda)$ の λ の係数は、一般に $\omega_1, \dots, \omega_s$ の有理数係数の有理関数である。さて § 3 と同じく (11) の判定を行うには、例えば $a_h = b_h$ を考えると、 $\omega_1, \dots, \omega_s$ の整数係数の多項式が 0 に因子かどうかを判定すればよい。それには $\omega_1, \dots, \omega_s$ と $r(x)$ の係数と s 個の関係式を用いて、判定すべき多項式を ω_1 だけであるようにすることが出来る。これを $r(\omega_1)$ で割って割り切れかどうかを見ればよい。他の判定も § 4 の方法も同様に考えることができる。

§ 6. 例題

$$(14) \quad \sum_{i=0}^4 \alpha^{4-i} P_i(\alpha) \eta^{(4-i)} = 0$$

$$P_0(\alpha) = 1, P_1(\alpha) = 10, P_2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 25, P_3(\alpha) = 5(\alpha^2 + \alpha + 3), P_4(\alpha) = 5(\alpha^2 + \alpha + 1)$$

の $\alpha = 0$ における解を考へる。 $\alpha = 0$ は確定特異点である。

$$f(\alpha, \lambda) = \sum_{i=0}^4 P_{4-i}(\alpha) \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-i+1)$$

$$f_0(\lambda) = f(0, \lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 5$$

$$= (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5)$$

$\lambda^2 + 1$ と $\lambda^2 + 4\lambda + 5$ が整数差 q で移り得るものとすればよい。

$$q = (-0 + 4) / (2 \cdot 1) = 2, \text{ 実際 } (\lambda + 2)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

i) $\lambda^2 + 1 = 0$ の根を指数とする解を考へる。このとき、

$$f_0(\lambda + m) \neq 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad \text{よかゝり整数項は出現しない。}$$

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5, f_2(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5, f_i(\lambda) = 0 \quad i = 3, 4, \dots$$

これと関係式 (7) より g_1, g_2, \dots が λ の一次の有理関数として求められる。例えは $g_1 f_0(\lambda + 1) + g_0 f_1(\lambda) = 0$ より $g_1 = -(4\lambda + 4) / (4\lambda + 3) g_0$ を得る。

ii) $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ の根を指数とする解を考へる。このとき、

$$f_0(\lambda + 2) = 0, f_0(\lambda + i) \neq 0 \quad i = 1, 3, 4, 5, \dots \quad \text{よかゝり整数項出現の判定}$$

$$\text{は } g_1 f_0(\lambda + 1) + g_0 f_1(\lambda) = 0, g_2 f_0(\lambda + 2) + g_1 f_1(\lambda + 1) + g_0 f_2(\lambda) = 0 \text{ であり}$$

す g_0, g_1, g_2 が定められる。このとき $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = 0$ である

よかゝり、式 (7) より $g_1 = 0$ を得る。これと式 (7) より

$$g_2 = 0 \text{ を得る。一般に } g_i = 0 \quad i \neq 0 \quad \text{故に } y = c\alpha^\lambda \text{ が解となる。}$$

§ 7. 有理数係数有理関数体 (多変数)

今まで述べて来たことにより, 線形常微分方程式の確定特異点における対数項の出現を判定する為には標題のものを扱うことが出来る数式処理用プログラムがあれば十分である。これは一変数の有理関数体を組合わせることにより実現することが出来るのであるが, この有理関数体においては加減乗除の他に変数への有理関数の代入, 微分, 多項式の因数分解が出来ることがある。これは一変数多項式環における加減乗除と代入, 微分, 因数分解に帰着することが出来る。

所で有理数係数ということとは整数の対を係数に持つことであり, 取扱いが複雑になるので, 有理数係数の多項式を

$$(20) \quad \frac{P}{Q} (a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) \quad P, Q, a_i \quad i=0, \dots, m \text{ 整数}$$

の形であるとする。この方式の利点は (a_m, \dots, a_0) の最大公約数を括弧の外に出すことにより, 小さな整数をおぼえなければ済むことである。この時, 多項式の加減乗及び多項式の代入, 微分については, 整数だけを取扱って行うアルゴリズムはすぐにはわかる。因数分解はクローネッカーの方法であれば多項式の加減乗除に帰着される。残った割り算については次のアルゴリズムを用いなければならない。

$$(21) \quad f(\lambda) = a_m \lambda^m + \dots + a_0, \quad g(\lambda) = b_m \lambda^m + \dots + b_0 \quad m \geq n$$

として $f(\lambda) / g(\lambda)$ の商と余りを求めるものとする。このとき

$(b_m^{m-n+1} f(\lambda))/g(\lambda)$ では途中で分数が出て来ることはない, また $m-n+1$ はこれを満たす最小の数である。商は (22) 余りは (23)

$$(22) \quad (1/b_m^{m-n+1})(b_m^{m-n} a_m \lambda^{m-n} + b_m^{m-n-1} a_{m-1}^{(1)} \lambda^{m-n-1} + \dots + b_m^0 a_n^{(m-n)} \lambda^0)$$

$$(23) \quad (1/b_m^{m-n+1})(a_{m-1}^{(m-n+1)} \lambda^{m-1} + \dots + a_0^{(m-n+1)})$$

アルゴリズム

$$(24) \quad \begin{cases} b_m^{m-n+1} (a_m \lambda^m + \dots + a_0) = b_m^{m-n} a_m \lambda^{m-n} (b_m \lambda^n + \dots + b_0) + b_m^{m-n} (a_{m-1}^{(1)} \lambda^{m-1} + \dots + a_0^{(1)}) \\ b_m^{m-n} (a_{m-1}^{(1)} \lambda^{m-1} + \dots + a_0^{(1)}) = b_m^{m-n-1} a_{m-1}^{(1)} \lambda^{m-n-1} (b_m \lambda^n + \dots + b_0) + b_m^{m-n-1} (a_{m-2}^{(2)} \lambda^{m-2} + \dots + a_0^{(2)}) \\ \dots \\ b_m^1 (a_m^{(m-n)} \lambda^m + \dots + a_0^{(m-n)}) = b_m^0 a_m^{(m-n)} \lambda^0 (b_m \lambda^n + \dots + b_0) + b_m^0 (a_{m-1}^{(m-n+1)} \lambda^{m-1} + \dots + a_0^{(m-n+1)}) \end{cases}$$

いま $f(\lambda), g(\lambda)$ と $P=Q=1$ のときを示したが, そうでない場合にこのアルゴリズムはもはや明白である。

有理数係数の有理関数は次の形である。

$$(25) \quad (P/Q)(a_m \lambda^m + \dots + a_0)/(b_m \lambda^n + \dots + b_0)$$

多変数の場合には (20); (25) における $a_i, b_j \in A_i(\mu), B_j(\mu)$: μ の多項式という様にある。変数が 3 以上の場合も同様である。但し変数に対する優先順位のつけ方はプログラムあるいはプログラムが意識したものでなければならぬ。

§ 8. 有理関数用の教式処理プログラム (文献を参照)

教式処理用のプログラムは, 一般には教式をある特定の記号を全て記憶しておいて, これを式変形の規則に従って取扱

てゆくという形式をとっている。ここでは有理関数をできただけ係数とそのリスト構造だけに近い形である方法を考える。例えば (20), (25) を次の (26), (27) のようにあらわす。

$$(26) \quad (\lambda, p, q, a_0, a_1, \dots, a_m)$$

$$(27) \quad (\lambda, p, q, (a_0, a_1, \dots, a_m), (b_0, b_1, \dots, b_m))$$

この記号は LISP のそれと同じものとし、 p, q, a_i, b_j は整数とする。また $\lambda^2 + 1$ は $1\lambda^2 + 0\lambda + 1$ としてあらわす。すると有理関数に対する四則、代入、微分等は係数 a_i, b_j から新しい係数 c_k を作るための簡単なアルゴリズムとして考えることが出来る。従って有理関数用のプログラムは、大きくわけて3つのサブルーチン群: B, P, R と R を使う主プログラムとになる。ここに B はリスト構造を扱う基本的なサブルーチン群、入出力、多倍長四則サブルーチン群をあわせたものである。P は B を用いた多項式を扱うサブルーチン群であり、R は P を用いた有理関数を扱うサブルーチン群である。この方式では LISP の様に解釈ルーチンではなく、実行時サブルーチンへの呼び出し列からなるので実行時の時間が早くなる。またより高位の教式処理用言語を翻訳するプログラムも簡単になるものと思われる。

このプログラムの特徴的なことは、P 又は R が扱う対象はそれが1つであれ或はそれ以上であれ、1つのリストの中に

納められる, 従って対象が2以上の時はリストはサブリストを持つ, そしてP又はRのサブルーチンはそのリストをほじから処理してのりて, リストがつかえたところで処理を終了, とこの様な形式をとることである。従ってサブルーチンへのパラメータはリストの最初を納めてある番地ということになる。例えば極く簡単な例でいうと, 多項式(26)の微分はまず a_0 をはずし, 次に a_i を $i \times a_i$ でおきかえそのを作る操作をリストがつかえるまで行って得られる。

次にもっと複雑な決定方程式の根を整数差をもったものの組に類別するという例を考えよう。この時対象は

($f_0(\lambda)$ のリスト)

という形で与えられている。次にこれを因数分解して,

$$(((\varphi_1(\lambda), \nu_1), (\varphi_2(\lambda), \nu_2)), \dots, (\varphi_c(\lambda), \nu_c)))$$

の形にする。これは $f_0(\lambda) = \varphi_1(\lambda)^{\nu_1} \dots \varphi_c(\lambda)^{\nu_c}$ と因数分解され, しかも $\varphi_1(\lambda)$ と $\varphi_2(\lambda)$ は同じ次数の類に属することの意味する。次に対象が $((\varphi_1(\lambda), \nu_1), (\varphi_2(\lambda), \nu_2))$ に移り, 整数差 q があれば $((0, \varphi_1(\lambda), \nu_1), (q, \varphi_2(\lambda), \nu_2))$ なければ $(0, \varphi_1(\lambda), \nu_1)$ と $(0, \varphi_2(\lambda), \nu_2)$ とに別れる。等々である。

この考えを入出力に適用すれば, 入力されるものは1つのリストに納められたものであり, 出力されるものもそうであると考えるのが自然である。

以上は P または R のサブルーチン群の操作を示したのであるが、このことから B は、リストを左から右へ順に上つ見ろサブルーチン、深くなると下へ上つ見ろサブルーチン、リストの見に来た場所を記憶するためのスタック用サブルーチン、連結、切りはなし用サブルーチン等が必要なことが分る。もうこれらのサブルーチン類を記述することは容易であろう。

§ 9. 補遺

§ 3. の決定方程式の根を整数差を持つものに類別するのに因数分解による方法でも、ユークリッドの互除法を用いれば判定できる。これは $f_0(\lambda) = 0$ の根の範囲を M とした時、 $i = -M, -M+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, M$ として $f_0(\lambda)$ と $f_0(\lambda+i)$ が共通因子を持つかどうかをユークリッドの互除法で調べる。 $q_i(\lambda)$ が共通因子なら $q_i(\lambda)$ と $f_0(\lambda)$ の微係数とのユークリッドの互除法で重根を調べればよい。

参考文献

- [1] 福原満洲雄 常微分方程式の解法 II 岩波 1941
- [2] Vander Waerden Modern Algebra, vol I, II Unger Pub. Co. 1953
- [3] Collins, G.E. PM, A System for Polynomial Manipulation
Comm. A.C.M. vol 9 / no. 8 / Aug, 1966

- [4] Jordan, D.E and others *Symbolic Factoring of Polynomials in Several Variables* *Comm. A.C.M.* vol 9, Aug '66
- [5] 渡辺隼郎 数式処理のためのプログラミング技法
第9回プログラミング・シンポジウム報告集
- [6] Stein, M.L. *Divide-and-Correct Methods for Multiple Precision Division* *Comm. A.C.M.* vol 7, Aug, 1964
- [7] Moses, J. *Solution of Systems of Polynomial Equations By Elimination* *Comm. A.C.M.* Aug, 1966