

Khuri 振幅の解析性と MacDowell 対称性について

阪大教養 神吉 健

§1. 序

MacDowell 対称性は比較的古くから知られている⁽¹⁾ 対称性であるが、これが最近 Regge trajectory の研究と関係して新しい観点から取上げられ、その本質が一層明らかになされてきたように思われる。そこでここでは最近発表された論文^{(2),(3)} をもとにして、此の向の事情の概略とのおけることにする。なお詳細の真については原論文を御参照頂きたい。

§2. MacDowell 対称性

例として πN 散乱を考える。iso-spin の自由度は問題の本質に無関係であるのでこれを無視する。
よく知られた如く⁽⁴⁾、この散乱は \Rightarrow の ^{ローレンツ} invariant な振幅 $A(s, t)$, $B(s, t)$ で記述される。[S は CM 系の全エネルギーの自乗、 t は momentum transfer の自乗である。]

2のA, B振幅を用いて、いわゆる Helicity-nonflip, flip 振幅 $G(s, t)$, $H(s, t)$ が次のように定義される。即ち

$$(1) \begin{cases} G(s, t) = 2MA(s, t) + (W^2 - M^2 - \mu^2)B(s, t) \\ W^{-1}H(s, t) = W^{-1}[(W^2 + M^2 - \mu^2)A(s, t) + (W^2 - M^2 + \mu^2)MB(s, t)] \end{cases}$$

(但し, $S = W^2$; W は CM 系の全エネルギー)

部分波振幅は $J = L \pm \frac{1}{2}$ [J は全角運動量, L は軌道角運動量] に対応して $f_J^\pm(w)$ の \Rightarrow が存在する。± は従ってパリティのちがいを表わしている。 G, H はこの部分波振幅を用いて次の如く展開される。

$$(2) \begin{cases} G(s, t) = \sum_{J=\frac{1}{2}}^{\infty} [f_J^+(w) + f_J^-(w)] [P'_{J+\frac{1}{2}}(z) - P'_{J-\frac{1}{2}}(z)] \\ W^{-1}H(s, t) = \sum_{J=\frac{1}{2}}^{\infty} [f_J^+(w) - f_J^-(w)] [P'_{J+\frac{1}{2}}(z) + P'_{J-\frac{1}{2}}(z)] \end{cases}$$

$A(s, t)$, $B(s, t)$ は Mandelstam の解析性をもつ関数であるから、その Branch point は可 \wedge て Dynamical 子 \wedge の \wedge で $S=0$ という Branch point は \wedge つて \wedge ない。今 $(W \rightarrow -W)$ を \wedge る \wedge 変換を \wedge 考 \wedge え \wedge ると、上述の性質から $A(s, t)$, $B(s, t)$ は invariant である。同様に $G(s, t)$, $H(s, t)$ もこの変換に対して invariant である。一方部分波振幅は (2) 式から次の変換則を満 \wedge す \wedge ことがわかる。即ち

$$(3) \quad f_J^\pm(-w) = f_J^\mp(w)$$

此の関係がいわゆる MacDowell 対称性といわれているのである。

さてこゝで注意すべきは、 $A(s,t), B(s,t)$ [或は G, H] にしる、 f_J^\pm にせよ、 $s=0$ という真は Dynamical cut の上にあるといふことである。従つて A, B, G, H 及び f_J^\pm を W 平面の上で定義した時、 $\text{Re} W > 0$ に於ける関数と $\text{Re} W < 0$ に於ける関数は互に解析的に接続されているわけでは無い。[Fig. 1 参照]。それ故 (3) 式はその式を見ただけでは、物理的に意味のある部分波振幅 ($\text{Re} W > 0$) の間のどんな直接の関係を示してはいない。 $\text{Re} W$ が正の領域の f_J^+ と f_J^- とは原理的には (3) 式を見ただけでは、互に独立な関数であつていふわけである。

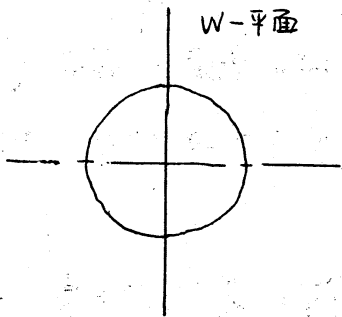


Fig. 1 $f_J^\pm(w)$ の定義される cut-平面

ある。

所で最近、Baryon の Regge Trajectory について、 \oplus パリティのもの、 \ominus パリティのものが存在して、それらがほとんど重なつていふらしいという事実がわかつてきた。⁽⁵⁾ ところで此の事実は「Regge trajectory $\alpha^\pm(w)$ が (3) 式に類似な関係

(4)

$$\alpha^\pm(-w) = \alpha^\mp(w)$$

を満たす。ことの反映であろうと考えられるように、⁽⁶⁾
 即ち、仮りに直線の trajectory を仮定すれば (4) 式は直線
 に

$$\alpha^+(w) \equiv aw^2 + b = \alpha^-(w)$$

を導くからである。一般に $\alpha^\pm(w)$ は $w=0$ で解析的である
 と信じられている。E とすると (4) 式は $\alpha^+(w)$ と $\alpha^-(w)$
 とが最早や独立であることを意味する。これは先の β の
 $f_{\pm}(w)$ の事情 (つまり (3) 式の内容) とは全く異ったものであ
 り、従って (3) 式と (4) 式は 1 つとして同じ内容を含む式で
 はなく、新たに (4) 式は直接証明されるべきものであります。

§3. Khuri 振幅

そこで (4) 式の証明にとりかゝる前に先づ次の事に注
 目することになります。 $G(s,t)$, $H(s,t)$ は Mandelstam の解
 析性を満たすということと念頭において、 G, H の s, t -
 4チャンネル及び u -4チャンネルの absorptive part $G_t(s,t)$,
 $G_u(s,u)$ 及び $H_t(s,t)$, $H_u(s,u)$ を考えます。これは
 $s=0$ で解析的であることがわかります。この事は外線粒子
 の質量と関係があり、 πN 散乱では上記事実が成り立ち、^(註)
 [Fig. 2 参照]。従って G_t, G_u, H_t, H_u はそれぞれ w の
解析的な even function です。所で此の性質は

(註) $\pi\pi$ 散乱ではこの事は成立しません。この時は $\Sigma\pi$ 4チャンネル
 を考えるべきです。

(3) 式の中に充分反映されていません。この欠点を補正する
 又 Regge pole と比較的簡単な関係式をつつものとして12次の振幅
 を考えます。

$$g_1(s, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt t^{-\nu-\frac{1}{2}} G_t(s, t)$$

$$g_2(s, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} du u^{-\nu-\frac{1}{2}} G_u(s, u)$$

(5)

$$h_1(s, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt t^{-\nu-\frac{1}{2}} H_t(s, t)$$

$$h_2(s, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} du u^{-\nu-\frac{1}{2}} H_u(s, u)$$

(但し $t_0 = 4\mu^2$, $u_0 = M$ (crossed pole λu_0))

これはいわゆる Khuri 振幅と呼ばれるものである。 $\text{Re } \nu$ の充
 分大い領域で右辺の積分は収斂し得るからそこで g_i, h_i は
 (5) によって与えられる $\text{Re } \nu$ の小さい領域では解析接続に
 よって定義するものとします。右辺の absorptive part が
 $s=0$ で解析的であり W の解析的な even function であること
 から Khuri 振幅 g_i, h_i ($i=1,2$) も $s=0$ で解析的であり
 W の関数と考えれば "解析的 even function" であることがわ
 かります。

Khuri 振幅と Regge pole の関係を導くには absorptive
 part G_t, G_u, H_t, H_u の Regge 表示⁽²⁾, 即ち今
 部分波振幅 $f_J^{P(\tau)}(W)$ [但し P は前出の \pm sign, τ は
 signature] の Regge pole 項を

$$\sum_n \frac{\beta_n^{PZ}}{J - \alpha_n^{PZ}(w)}$$

とかりて、

$$G_t(st) = \frac{\pi}{2} \sum_{npz} \beta_n^{PZ}(w) [P'_{\alpha+\frac{1}{2}}(z) - P'_{\alpha-\frac{1}{2}}(z)] + (B.G)$$

$$(6) \quad G_u(st) = \frac{\pi}{2} \sum_{npz} \tau \beta_n^{PZ}(w) [P'_{\alpha+\frac{1}{2}}(z) - P'_{\alpha-\frac{1}{2}}(z)] + (B.G)$$

$$W^{-1}H_t(st) = \frac{\pi}{2} \sum_{npz} P \beta_n^{PZ}(w) [P'_{\alpha+\frac{1}{2}}(z) + P'_{\alpha-\frac{1}{2}}(z)] + (B.G)$$

$$W^{-1}H_u(su) = \frac{\pi}{2} \sum_{npz} P \tau \beta_n^{PZ}(w) [P'_{\alpha+\frac{1}{2}}(-z) + P'_{\alpha-\frac{1}{2}}(-z)] + (B.G)$$

24. 5 (5) の右辺に代入し、

$$P'_{\alpha+\frac{1}{2}}(z) - P'_{\alpha-\frac{1}{2}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_{nr}^{PZ}(\alpha) \cdot \left(\frac{t}{zq}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}-r} \text{ etc.}$$

の展開公式を用いて計算する。但し上記の式中 α と書いたのは α_n^{PZ} の意味である。又 (B.G) は Back Ground 項を意味する。さうして Khuri 振幅は次のようにかける。

$$g_1(s\nu) = \sum_{PZnr} \frac{\Gamma_{nr}^{PZ}(w)}{\nu - \alpha_n^{PZ}(w) + r} + (b.g)$$

$$(7) \quad h_1(s\nu) = \sum_{PZnr} \frac{W P \Gamma_{nr}'^{PZ}(w)}{\nu - \alpha_n^{PZ}(w) + r} + (b.g)$$

$$g_2(s\nu) = \sum_{PZnr} \frac{(-)^r \tau \bar{\Gamma}_{nr}^{PZ}(w)}{\nu - \alpha_n^{PZ}(w) + r} + (b.g)$$

$$h_2(s\nu) = \sum_{PZnr} \frac{W (-)^r \tau P \bar{\Gamma}_{nr}'^{PZ}(w)}{\nu - \alpha_n^{PZ}(w) + r} + (b.g)$$

但し Γ_{nr}^{PZ} は $\Gamma_{nr}^{PZ} = F_{nr}^{PZ} q^{-2(\alpha-\frac{1}{2}-r)} \beta_n^{PZ}$ etc. τ

$\gamma=0$ に対しては

$$(8) \quad \Gamma_{n_0}^{PZ} = \Gamma_{n_0}'^{PZ} = \overline{\Gamma}_{n_0}^{PZ} = \overline{\Gamma}_{n_0}'^{PZ}$$

が得られる。

§4. Khuri 振幅の解析性と MacDowell Symmetric Regge Trajectory

g_i, h_i ($i=1,2$) は $s=0$ における πN 散乱 $S=0$ で解析的である。 W -平面では Fig. 3 の cut 平面で pole との πN 散乱で解析的である。 W_i の値は外線の粒子の質量と関係し πN 散乱では $W_i \cong (1.2\mu)_i$ である。

さて g_i, h_i を pole 項と (b.g) 項に分けた時は、 $W=0$ で解析的であるということも自明ではない。 これを証明するために次の仮定をする。

(仮定) $\alpha(W)$ は $W=0$ で解析的である。

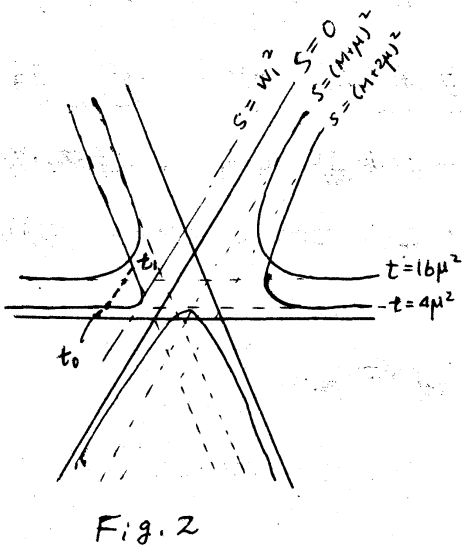


Fig. 2

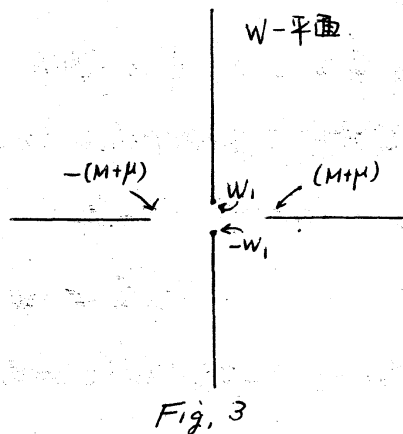


Fig. 3

今 $w=0$ を含むある w 平面の領域 D とし D 中で $\alpha(w)$ は解析的であるとする。 D の中で w の値を動かした時どの Regge pole と (b.g) line と横切らないうよう、あらかじめ (b.g) line を変形しておくこととする。 D 中で $\alpha(w)$ は pole 項と (b.g) 項は夫々 w の解析関数である。 D の中で $g_1(w, \nu)$ は直線の cut をとり、その ν の高は

$$\text{disc}_{(\nu)} g_1(w, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt t^{-\nu-\frac{1}{2}} P_{tu}(t, \alpha(M^2 p^2) - s - t).$$

[但し P_{tu} はスプレッド関数] 積分は有限区間から $\text{disc}_{(\nu)} g_1$

は ν の entire function である。 一方 D の中で

$\text{disc}_{(\nu)} \Gamma(w) \neq 0$ ならば $\text{disc}_{(\nu)} g_1$ は

$$\text{disc}_{(\nu)} \left(\frac{\Gamma(w)}{\nu - \alpha(w) + \gamma} \right)$$

(この (b.g) 項は有限)

なる項をとり $\nu = \alpha(w) - \gamma$ で pole をとり、これは上記の結果に矛盾する。 従って $\Gamma(w)$ は D の中で cut を持たない。

この事から (7) 式の pole 項は $w=0$ (自身 $w=0$ で解析的) 従って解析的 even function である。 このことから (7) 式の右辺の和の中には夫々

$$(9) \quad \alpha_n^{p'c}(-w) = \alpha_n^{p't'}(w)$$

を満足する Regge pole が存在し、その Residue は \dots として

$$\Gamma_{nr}^{P\tau}(-W) = \Gamma_{n'r'}^{P'\tau'}(W)$$

$$-WP\Gamma_{nr}^{P\tau}(-W) = WP'\Gamma_{n'r'}^{P'\tau'}(W)$$

$$\tau\bar{\Gamma}_{nr}^{P\tau}(-W) = \tau'\bar{\Gamma}_{n'r'}^{P'\tau'}(W)$$

が成り立つのは「左から右」で、ここで $\gamma=0$ とし (8) 式を用いると (9) の = の Regge pole について

$$(10) \quad \begin{aligned} P &= -P' \\ \tau &= \tau' \end{aligned}$$

が得られる。かくして (4) 式が証明された。

§5 Jost 関数と MacDowell 対称性

§4 式々は (4) 式を直接証明することが出来た。これは MacDowell 対称性が (3) 式の外面的性質以上のものとしてあることを意味している。この事を一層よく理解するために Jost 関数の構造を知らなければならない。Jost 関数を求めるためには波動関数が必要になる。そこでモデルとして Dirac 粒子の scalar ポテンシャルによる散乱を取扱う。紙面の都合で詳細は省略する⁽³⁾が、結果だけとるべると次のようになる。Schrödinger 方程式の解の場合は Jost 関数 $f_2(k)$ [k は運動量の大きさ] は k-平面で正の虚軸上に cut をえう関数であるが、Dirac 方程式の場合は $k = \pm M\alpha$ は Branch point をえう。これは波動関数が $W \equiv \sqrt{k^2 + M^2}$ に依存する

ために、Jost 関数は Fig. 4 の如き cut 平面で解析的関数

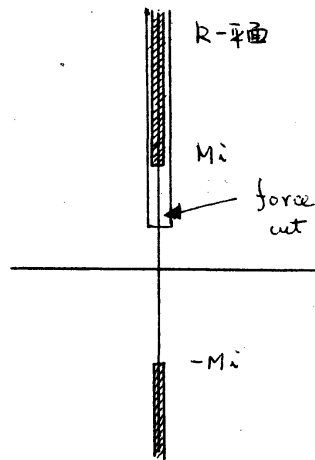


Fig. 4

になる。この場合下半面の cut は純粋に Kinematical 関数のみであるから、この cut をえぐって 2nd sheet の Jost 関数を定義することが出来る。今 $J = l \pm \frac{1}{2}$ の状態の Jost 関数を考えよと、その 2nd Sheet 関数はちょうど $J = l \mp \frac{1}{2}$ の physical

sheet の Jost 関数に一致することが証明出来る。従って (4) 式の性質はこの Jost 関数の性質の反映であり、(3) 式の MacDowell 対称性の真の意味は Jost 関数の性質と通して理解することが出来る。

References

- (1), S.W. MacDowell, Phys. Rev. 116 (1960), 774.
- (2), T. Kanki, G. Konisi and T. Saito, Prog. Theor. Phys. 40 (1968), 394.
- (3), T. Kanki, Prog. Theor. Phys. 40 (1968), 1125.
- (4) G.F. Chew, M.L. Goldberger, F.E. Low and Y. Nambu, Phys. Rev. 106 (1957), 1345.

- (5) V. Barger and D. Cline, *Phys. Letters* 26B
(1967), 85; *Phys. Rev. Letters* 20 (1968), 298.
- (6) I. A. Sakmar, *Phys. Rev.* 135B (1964), 249.