数理解析研究所講究録
第 76 巻 1969 年 12-18

O (4)対称性と相対論的複合模型

近大 理工　伊藤仁之

複合模型を構成する基本粒子間の力学についてはほとんどなにもわかっていない。場の量子論（Bethe-Salpeter 方程式）でこれを取り扱うにしても固有値の性質など不明な点が多い。以下では，複合模型の力学へのアプローチの一歩として，同種の Dirac 粒子と反粒子の束縛状態に対するB・S方程式の解の性質を結合エネルギーが構成粒子の質量の２倍に等しい極限の場合についてしらべる。

§1．状態の O(4) family への分類[1)]

静止質量ゼロの束縛状態の amplitude $f(p)$ は構成粒子の重心系でB・S方程式

$$f(p)=\lambda\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}G(p,q)\frac{f(q)}{(\gamma q-m)(-\gamma' q-m)} \qquad (1)$$

をみたす。Wick 変換を行い q_0 の積分路を虚軸に移すと（１）は O(4) の対称性をもち，したがって $f(p)$ は O(4)

の既約表現に分解される. generator を $\vec{m}$, $\vec{n}$ とし Casimir operator の固有値を次のように量子数 n, M であらわす.

$$(\vec{m}+\vec{n})^2 = (n+M)(n+M+2)$$

$$(\vec{m}-\vec{n})^2 = (n-M)(n-M+2)$$

Spin 1/2 粒子2つの合成であるから $M = 1,\ 0,$ or -1 であり, 3次元角運動量 $\vec{m}$ の量子数を j, m とすると j は $n \geq j \geq |M|$ なる範囲の値をとる.

方程式(1)は空間反転(P)と Charge conjugation (C)に対しても不変になっているからこれらの変換の固有値と $|M|$ で分類すると状態は次の 8 family に分けられる.

P	C	$\|M\|$		$n-j=$ even	odd
$(-1)^j$	$-(-1)^n$	1	(i)	○	unphysical
		0	(ii)	○	unphysical
	$(-1)^n$	1	(iii)	unphysical	×
		0	(iv)	unphysical	×
$-(-1)^j$	$-(-1)^n$	1	(v)	○	○
		0	(vi)	×	×
	$(-1)^n$	1	(vii)	×	×
		0	(viii)	○	○

この表の右半に unphysical とあるのは relative energy をゼロにした時2粒子が共に正のエネルギー状態に存在する component を持たない状態であり，いわゆる abnormal meson に対応している．On shell 散乱振巾の pole に対する同様の分類が Freedman and Wang[2] によって行われているが，それとの対応が O，X で示されている．彼等の family はこの表のO印だけから成る．Off-shell 振巾の分析より得られたわれわれの family が On-shell にないもの（X印）を含む理由は中間状態に負エネルギー状態が許されるためであるが，これらの family が物理的 reality をもつか否かは大変興味ある問題である．

次節でこの（X印の）4 family に対して ladder 近似の B・S kernel を求め，交換する meson の mass μ がゼロの場合について固有値問題を解く．kernel は 4 family に共通であり且つ連続固有値の解しかないことが示される．

§2. $\mu=0$ の時の固有値問題

軌道運動の $O(4)$ 固有函数を量子数 $n=n_0$，$M=0$，$j=l$ であらわす．Spinor 部分は $n'=1, 0$，$n'\geq|M'|\geq 0$ $n'\geq l'\geq|M'|$ なる n', M', l' であらわされる．全角運動

量の固有状態を

$$\Upsilon(n_0 n' M'; l l') \quad ; \quad \begin{array}{ll} l' = 0 & \textit{for singlet state} \\ l' = 1 & \textit{for triplet state} \end{array}$$

であらわすことにすると，（ total の n, M, j は添記を省略する），family (iii), (iv), (vi), (vii) の $O(4)$ 固有函数は各々

$$|iii\rangle = C(n1; n10; j0)\Upsilon(n10; j0)^{(2)} + \sum_{l=j\pm1} C(n1; n10; l1)\Upsilon(n10; l1)^{(2)}$$

$$|iv\rangle = C(n0; n11; j1)\frac{1}{\sqrt{2}}\{\Upsilon(n11; j1) - \Upsilon(n1-1; j1)\} + \sum_{l=j\pm1} C(n0; n11; l1)\frac{1}{\sqrt{2}}\{\Upsilon(n11; l1) + \Upsilon(n1-1; l1)\}$$

$$|vi\rangle = \Upsilon(n00; j0)^{(1)}$$

$$|vii\rangle = \Upsilon(n10; j1)^{(2)}$$

で与えられる．変換係数 $C(nM; n_0 n' M'; l l')$ の値は文献1）を参照されたい．又，肩の添字（1），（2）は parity の相違をあらわしている[1]．

γ_μ, g_μ 等の表現をつくってみると[4] $g(\gamma - \gamma')$, $(g\gamma)(g\gamma')$ がこれら4 family に共通であることが容易に判明する．すなわち，

$$q(\gamma-\gamma')|\rangle = 0 \ , \quad (q\gamma)(q\gamma')|\rangle = -q^2|\rangle \ .$$

したがって（１）式のGreen函数部分の表現も４ family に共通,

$$\frac{1}{(\gamma q-m)(-\gamma' q-m)}|\rangle = \frac{1}{q^2+m^2}|\rangle \ ,$$

であり（１）はGoldsteinが扱った方程式[3]と同じ形になる。（Goldsteinはある仮定をして family (vii) を選び出しわれわれと同じ形の方程式を導いた，但し，ps(ps) coupling の ladder 近似で family (iv) 及び (vi) に対するわれわれの方程式は Goldstein のそれと符号だけ異る）．

相互作用 kernel $G(p,q)$ として ps(ps) 又は s(s) coupling の ladder 近似

$$G(p,q) = \frac{\gamma_5\gamma_5',\ 1}{(p-q)^2+\mu^2}$$

をとると方程式（１）は結局次の一変数積分方程式に還元される。

$$f_n(p) = \frac{\lambda'}{8(n+1)p}\int dq\,\frac{q^2}{q^2+m^2}\,g_n(z)\,f_n(q)\ , \qquad (2)$$

こゝに，$g_n(z) = 2\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1}$, $z = \frac{1}{2pq}(p^2+q^2+\mu^2)$

であり，family (iv) と (vi) の ps(ps) coupling

に対して $\lambda' = -\lambda$，それ以外では $\lambda' = \lambda$ である．

$\mu = 0$ の時には

$$z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{q}{p} \quad ; \quad p > q$$

$$= \frac{p}{q} \quad ; \quad p < q$$

であるから $K(p, q) \equiv \frac{1}{2} p^{n+1} q^{n+1} g_n(z)$ は Green 函数の性質

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(p^{-2n-1} \frac{\partial K}{\partial p}\right) = -2(n+1)\,\delta(p-q)$$

をみたし，したがって（2）は2階の常微分方程式

$$\frac{d}{dp}\left\{p^{-2n-1} \frac{d}{dp}\left(p^{n+2} f_n(p)\right)\right\} = -\frac{\lambda'}{2} \frac{p^{-n+1}}{p^2+m^2} f_n(p) \qquad (3)$$

に変換されうる．これは Goldstein[3)]の一般化であり $n=0$ の時 Goldstein に一致する．

（3）を（2）に再代入すると f_n に対する次の境界条件が得られる．

$$\lim_{p\to 0} p^{n+2}\left(n f_n - p \frac{df_n}{dp}\right) = 0 \qquad (4)$$

$$\lim_{p\to\infty} p^{-n}\left(p \frac{df_n}{dp} + (n+2) f_n\right) = 0 \qquad (5)$$

方程式（3）の原点での境界条件（4）をみたす解は

$$f_n(p) = p^n F(\alpha_1+n+1, \alpha_2+n+1, n+2; -(\frac{p}{m})^2),$$

但し，$\alpha_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(n+1 \mp \sqrt{(n+1)^2 - \lambda'/2})$，

であるが，これはpが大きい時

$$f_n(p) \longrightarrow p^{-1+\sqrt{(n+1)^2-\lambda'/2}}$$

の漸近形をもつから $\lambda' > 0$ なら無限遠での境界条件（5）はみたされている。よって，off-shell に特有な family (iii)，(iv)，(vi)，(vii) はいずれも連続固有値の束縛状態をもつことが示された。

文献

1). H. Ito, Prog. Theor. Phys. 41 NO 4, in press.

2) D. Z. Freedman and J. M. Wang, Phys. Rev. 160 (1967), 1560.

3) J. S. Goldstein, Phys. Rev. 91 (1953), 1516.

4) H. Ito, to be published elsewhere.