数理解析研究所講究録
第 76 巻 1969 年 56-66

特殊関数 $P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ および $Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ について

京大 工　萱間篤一

§1. 序

昔からよく知られているように，物理学およびその周辺分野でひんぱんに現われる特殊関数の大多数は，適当な homographic 変換をほどこせば，

$$(1.1)\qquad P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ a & b & c & z \\ -a & -b & -c & \end{Bmatrix}$$

の型になる。　多くの研究者は，このままでは一般的過ぎて扱いにくいという理由から，個々の場合に応じて扱い易いようにこれを特殊化することによって，種々の特殊関数を定義し，その性質の詳しい研究を行っている。

その最も顕著な例は，ルジャンドル陪関数であろう。　これは，3 次元回転群 $O(3)$ に対する球関数に関連しているため，近年特に，その重要性が再認識されている（[8] 参照）。また，この研究会でも度々論議されたように，群 $O(4)$ に対

する球関数の用途も今後その必要度が増すことが予想される。

さて，$O(3)$，$O(4)$，$\cdots$ と深い関係にあるユニタリ群$U(2)$，$U(3)$，$\cdots$に対する球関数について考察してみよう。この一般化された球関数の群の表現論の立場からの研究は，池田，瀬藤および著者等によってなされた[1]～[7]。このうち特に[2]～[4]から分ることは，この場合に必要とする特殊関数が，

$$(1.2) \qquad P\left\{\begin{matrix} 1 & -1 & \infty & \\ \alpha/2 & (\beta-n)/2 & -\gamma & z \\ -\alpha/2 & -(\beta+n)/2 & \gamma+n+1 & \end{matrix}\right\}$$

の型をしていることである。ここで，nは，考えているユニタリ群の次元に関係した零または正の整数であり，α，βおよびγは独立なパラメータである。これらから明らかなように，(1.2)は，決っして(1.1)の特殊化になっていないら。従って，(1.2)の独立な二つの特殊関数を定義し，その性質を詳しく調べ上げておくことは，将来の研究にとって有意義であると考えられる。

そこで著者は，[9]において2種類の関数$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$および$Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$を定義し，そのパラメータに関する対称的性質と漸化式とを調べた。[10]では，関数の直交関係と各特異点附近での振舞とについて研究される予定である。

この講究録では，［9］および［10］の主な結果だけを書くことにする。証明等は，当該論文を参照されたい。

目　次

§2.　$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ および $Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ の定義

これ以後，特にことわらない限り，n は，零または正の整数，α，β，および γ は，複素パラメータ，そして z は，実軸上 $[1, -\infty)$ に切断を持つ複素平面上の点を表すものとする。

定義 2.1　　$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ および $Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ を次式によって定義する。

$$(2.1)\qquad P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(z-1)^{-\alpha/2}(z+1)^{(\beta-n)/2}$$

$$\times F\{-\gamma-(\alpha-\beta+n)/2, \gamma+(-\alpha+\beta+n+2)/2; 1-\alpha; (1-z)/2\}$$

$$(|1-z|<2),$$

$$(2.2)\quad Q^{\alpha\beta}_{n\gamma}(z) \equiv e^{i\alpha\pi}\frac{\Gamma\{\gamma+(\alpha-\beta+n+2)/2\}\Gamma\{\gamma+(\alpha+\beta+n+2)/2\}}{2^{-\gamma-(-\alpha+\beta+n)/2}\,\Gamma(2\gamma+n+2)}$$

$$\times(z-1)^{-\gamma-(\beta+n+2)/2}(z+1)^{(\beta-n)/2}$$

$$\times F\{\gamma+(-\alpha+\beta+n+2)/2,\ \gamma+(\alpha+\beta+n+2)/2;\ 2\gamma+n+2;\ 2/(1-z)\}$$

$$(|1-z|>2).$$

<u>定理2.1</u>　z_0を$|1-z_0|<2$に固定したとき，$P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(z_0)$は，複素変数$\alpha$，$\beta$，および$\gamma$の整関数である。

<u>定理2.2</u>　z_0を$|1-z_0|>2$に固定したとき，α，βおよびγの関数$Q^{\alpha\beta}_{n\gamma}(z_0)$は，$\gamma+(\alpha\pm\beta+n+2)/2$が零または負の整数となる点を除いた任意の有界領域で，一価正則である。

<u>定理2.3</u>　関数$P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(z)$および$Q^{\alpha\beta}_{n\gamma}(z)$は，(1.2)の関数であり，実軸上$[1,-\infty)$に切断を持つ$z$-平面上で，一価正則である。

§3.　切断上の関数$P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x)$および$Q^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x)$

これ以後，xは，開区間$(-1,\ 1)$の点を表わすとする。

<u>定義3.1</u>　$P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x)$および$Q^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x)$を次のように定義する。

$$(3.1)\quad P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x) \equiv e^{i\alpha\pi/2}P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x+i0) = e^{-i\alpha\pi/2}P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x-i0),$$

$$(3.2)\quad Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)\equiv\frac{e^{-i\alpha\pi}}{2}\left\{e^{-i\alpha\pi/2}Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x+i0)+e^{i\alpha\pi/2}Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x-i0)\right\}.$$

<u>定理 3.1</u>　　$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$ および $Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$ は，α，β および γ が実数のとき，実数値関数である．

§4.　対称性

以後，次の記法を用いる．

$$(4.1)\quad A_n(\alpha,\beta,\gamma)\equiv 2^{-\alpha}\frac{\Gamma\{\gamma+(\alpha-\beta+n+2)/2\}\Gamma\{\gamma+(\alpha+\beta+n+2)/2\}}{\Gamma\{\gamma+(-\alpha+\beta+n+2)/2\}\Gamma\{\gamma-(\alpha+\beta-n-2)/2\}}$$

<u>定理 4.1</u>　　$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ は，次の対称的性質を満たす。

$$(4.2)\qquad P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)=P_{n,-\gamma-n-1}^{\alpha\beta}(z),$$

$$(4.3)\qquad P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)=2^{\beta}P_{n\gamma}^{\alpha,-\beta}(z),$$

および α が正整数のとき，

$$(4.4)\qquad P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)=A_n(\alpha,\beta,\gamma)P_{n\gamma}^{-\alpha,\beta}(z).$$

<u>定理 4.2</u>　　$Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$ は，次の対称的性質を満たす。

$$(4.5)\qquad e^{-i\alpha\pi}Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)=A_n(\alpha,\beta,\gamma)e^{i\alpha\pi}Q_{n\gamma}^{-\alpha,\beta}(z),$$

$$(4.6)\qquad Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)=2^{\beta}Q_{n\gamma}^{\alpha,-\beta}(z).$$

定理4.3　$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$は，次の対称的性質を満たす。

(4.7)　$$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x) = P_{n,-\gamma-n-1}^{\alpha\beta}(x),$$

(4.8)　$$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x) = 2^{\beta} P_{n\gamma}^{\alpha,-\beta}(x),$$

およびαが正整数のとき，

(4.9)　$$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x) = (-1)^{\alpha} A_n(\alpha,\beta,\gamma) P_{n\gamma}^{-\alpha,\beta}(x).$$

定理4.4　$Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$は，次の対称的性質を満たす。

(4.10)　$$Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x) = 2^{\beta} Q_{n\gamma}^{\alpha,-\beta}(x),$$

およびαが正整数のとき，

(4.11)　$$Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x) = (-1)^{\alpha} A_n(\alpha,\beta,\gamma) Q_{n\gamma}^{-\alpha,\beta}(x).$$

§5.　漸化式

特殊関数の漸化式は，Lie群の無限小変換と密接に関係するので，重要である。我々の関数は，3個の独立なパラメータを持っている。従って，6種類の基本的な漸化式を与えておけば十分である。他の無数の漸化式は，これらと関数の型が(1.2)であるという事実とから，導びくことができる。

定理５．１　$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$は，次の漸化式を満たす。

$$(5.1)\quad \left\{D-\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}-\frac{\beta-n}{2}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)=P_{n\gamma}^{\alpha+1,\beta+1}(z),$$

$$(5.2)\quad \left\{D+\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}+\frac{\beta+n}{2}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$$

$$=\{\gamma-(\alpha+\beta-n-2)/2\}\{\gamma+(\alpha+\beta+n)/2\}P_{n\gamma}^{\alpha-1,\beta-1}(z),$$

$$(5.3)\quad \sqrt{z-1}\left\{D+\frac{2\gamma+\beta+n+2}{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}-\frac{\beta-n}{2}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$$

$$=\{\gamma+(-\alpha+\beta+n+2)/2\}P_{n,\gamma+1/2}^{\alpha,\beta+1}(z),$$

$$(5.4)\quad \sqrt{z-1}\left\{D-\frac{2\gamma+\beta+n}{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}+\frac{\beta+n}{2}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$$

$$=-2\{\gamma+(\alpha+\beta+n)/2\}P_{n,\gamma-1/2}^{\alpha,\beta-1}(z),$$

$$(5.5)\quad \sqrt{z-1}\left\{D-\frac{2\gamma-\beta+n}{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}-\frac{\beta-n}{2}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$$

$$=-\{\gamma+(\alpha-\beta+n)/2\}P_{n,\gamma-1/2}^{\alpha,\beta+1}(z),$$

$$(5.6)\quad \sqrt{z-1}\left\{D+\frac{2\gamma-\beta+n+2}{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}+\frac{\beta+n}{2}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$$

$$=2\{\gamma-(\alpha+\beta-n-2)/2\}P_{n,\gamma+1/2}^{\alpha,\beta-1}(z),$$

$$(D\equiv\sqrt{z^2-1}\,d/dz).$$

定理５．２　$Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(z)$は，(5.1)～(5.6)と同じ漸化式を満たす。

定理5.3　$P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$ は，次の漸化式を満たす。

(5.7)　$$\left\{D+\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\beta-n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)=-P_{n\gamma}^{\alpha+1,\beta+1}(x),$$

(5.8)　$$\left\{D-\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\beta+n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$$
$$=\{\gamma-(\alpha+\beta-n-2)/2\}\{\gamma+(\alpha+\beta+n)/2\}P_{n\gamma}^{\alpha-1,\beta-1}(x),$$

(5.9)　$$\sqrt{1-x}\left\{D-\frac{2\gamma+\beta+n+2}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\beta-n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$$
$$=-\{\gamma+(-\alpha+\beta+n+2)/2\}P_{n,\gamma+1/2}^{\alpha,\beta+1}(x),$$

(5.10)　$$\sqrt{1-x}\left\{D+\frac{2\gamma+\beta+n}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\beta+n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$$
$$=2\{\gamma+(\alpha+\beta+n)/2\}P_{n,\gamma-1/2}^{\alpha,\beta-1}(x),$$

(5.11)　$$\sqrt{1-x}\left\{D+\frac{2\gamma-\beta+n}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\beta-n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$$
$$=\{\gamma+(\alpha-\beta+n)/2\}P_{n,\gamma-1/2}^{\alpha,\beta+1}(x),$$

(5.12)　$$\sqrt{1-x}\left\{D-\frac{2\gamma-\beta+n+2}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\beta+n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}P_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$$
$$=-2\{\gamma-(\alpha+\beta-n-2)/2\}P_{n,\gamma+1/2}^{\alpha,\beta-1}(x),$$
$$\left(D\equiv\sqrt{1-x^2}\,d/dx\right).$$

定理5.4　$Q_{n\gamma}^{\alpha\beta}(x)$ は，(5.7)〜(5.12) と同じ漸化式を満たす．

§6.　直交関係

<u>定理 6.1</u>　　α を $\mathrm{Re}\,\alpha<1$ または正整数に固定し，β を任意な複素数に固定したとき，γ は，$\gamma+(\pm\alpha\pm\beta+n)/2$ または $-\gamma+(\pm\alpha\pm\beta-n-2)/2$ のどちらか一方だけが非負整数となる値をとるとする．　ここに，α の前の複号の $+$ および $-$ は，それぞれ $\mathrm{Re}\,\alpha<1$ および $\alpha=1,2,\cdots$ に従って採られ，同様に，β の前の $+$ および $-$ は，それぞれ $\mathrm{Re}\,\beta<1$ および $\mathrm{Re}\,\beta>-1$ に従って選ばれる。　このとき，関数系 $\{P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x)\}$ は，次の直交関係を満たす。

$$(6.1)\qquad \int_{-1}^{1} P^{\alpha\beta}_{n\gamma}(x)\,P^{\alpha\beta}_{n\gamma'}(x)\,(1+x)^{n}\,dx =$$

$$\begin{cases} =0 & (\gamma\neq\gamma'),\\[2mm] =\dfrac{2^{-\alpha+\beta+1}}{2\gamma+n+1}\,\dfrac{\Gamma\{\gamma+(\alpha-\beta+n+2)/2\}\,\Gamma\{\gamma+(\alpha+\beta+n+2)/2\}}{\Gamma\{\gamma+(-\alpha+\beta+n+2)/2\}\,\Gamma\{\gamma+(-\alpha-\beta+n+2)/2\}} & (\gamma=\gamma). \end{cases}$$

<u>定理 6.2</u>　　α を $\mathrm{Re}\,\alpha<1$ $(\alpha\neq 0,-1,\cdots)$ に固定し，γ を $\mathrm{Re}\,\gamma>-(n+1)/2$ に固定したとき，β は，$-\gamma-(-\alpha-\beta+n+2)/2$ または $-\gamma-(-\alpha+\beta+n+2)/2$ のどちらか一方だけが非負の整数となる値をとるとする。　このとき，関数系 $\{Q^{\alpha\beta}_{n\gamma}(z)\}$ は，次の直交関係を満たす。

$$(6.2)\qquad \int_{1}^{\infty} Q^{\alpha\beta}_{n\gamma}(z)\,Q^{\alpha\beta'}_{n\gamma}(z)\,(1+z)^{n-1}\,dz =$$

$$
\begin{cases}
= 0 & (\beta \neq \beta'), \\
= e^{i2\alpha\pi} \dfrac{2^{-\alpha+\beta+2}\pi}{\beta \sin\alpha\pi} \dfrac{\Gamma\{\gamma+(\alpha-\beta+n+2)/2\}\Gamma\{\gamma+(\alpha+\beta+n+2)/2\}}{[\Gamma\{\gamma+(-\alpha+\beta+n+2)/2\}\Gamma\{\gamma+(-\alpha-\beta+n+2)/2\}]} & (\beta = \beta).
\end{cases}
$$

ここに，角括弧内の Γ-関数は，次の値をとるものとする．

$$
[\Gamma(\zeta)] \begin{cases}
= \Gamma(\zeta) & (\zeta \neq 0, -1, \cdots), \\
= (-1)^{l}/l! & (\zeta = -l = 0, -1, \cdots).
\end{cases}
$$

文　献

[1] M. Ikeda, On spherical functions for the unitary group I — general theory —, Mem. Fac. Eng. Hiroshima Univ. 3 (1967), 17–29.

[2] ———, On spherical functions for the unitary group II — the case of two dimensions —, ibid. 3 (1967), 31–53.

[3] ———, On spherical functions for the unitary group III — the case of three dimensions —, ibid. 3 (1967), 55–75.

[4] M. Ikeda and T. Kayama, On spherical functions for the unitary group IV — the case of higher dimensions —, ibid. 3 (1967), 77–100.

[5] ———, ———, On the generating function of spherical functions for unitary group, Math. Japonicae 12 (1968), 159–175.

[6] T. Kayama, On the normalization of solid harmonics for U(3), Prog. Theor. Phys. 39 (1968), 850-851.

———, On the Clebsch-Gordan coefficients for SU(3), Prog. Theor. Phys. 39 (1968), 851-852.

[7] M. Ikeda and N. Seto, On expansion theorem in terms of spherical functions for unitary group, Math. Japonicae (in press).

[8] N. Seto, An expansion theorem for polynomially bounded functions, Math. Japonicae (in press).

[9] T. Kayama, On a generalization of the spherical functions for the unitary group I, Math. Japonicae (in press).

[10] ———, On a generalization of the spherical functions for the unitary group II, (to be published).