数理解析研究所講究録
第77巻 1969年 1-34

On the algebra of measurable operators for a general AW*-algebra

東北大 理　斎藤知之

§0. まえがき

非可換積分論に於いて「可測作用素」を非有界作用素の理論を用いずに構成することは，興味のある問題である。1957年にS.K.Berberianは彼の論文"The Regular ring of a finite AW*-algebra"の中で有限型のAW*-環に対して「閉作用素」を代数的に定義しそれら「閉作用素」のつくる*-環の構造を研究した。[1] 我々は，最初に述べた観点から，S.K.Berberianの結果を一般のAW*-環に拡張してみよう。[8]

§1. 準備

まずAW*-環の定義から始めよう。

定義1.1. C*-環 M がAW*環であるというのは，次の2つの条件を満すときである。

(1)射影元全体の集合の中で，直交する射影元のかってな集ま

りはその中に上極限（l.u.b.）をもつ。

(2) かってな極大可換自己共役部分環は，その射影元により誘導される。

以下特にことわらぬ限りMはAW^*-環とし，Mの自己共役元，射影元，部分的等距離元，ユニタリ元全体をそれぞれ，M_{sa}，M_p, M_{pi}，M_uで表わすことにする。

定義 1.2. $\mathfrak{m}$ をMの中のすべての有限型射影元により，代数的に誘導された両側イデアルとする。すると$\mathfrak{m}_p$は有限型の射影元だけから成ることがわかる。

定義 1.3. $\{e_n\}$ なる射影元の列に対して $e_n \leqq e_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の時，$e_n\uparrow$ と表わしさらに $l.u.b.\{e_n, n\geqq 1\} = e$ の時，$e_n \uparrow e$ と書く。$e_n\downarrow$，$e_n\downarrow e$は，それと双対的な意味を表わすものとする。

定義 1.4. Mの元 xの右射影元（記号で $RP(x)$）というのは，xの右側から掛けると0になるような最大の射影元の直交補射影元であり左射影元（記号で $LP(x)$）は x^*の右射影元のことである。又 $LP(x) \sim RP(x)$ $(\forall x \in M)$ が成立する。[3]

定義 1.5. Mの部分集合Sに対して，S'はSの各々の元と可換なMの元全体である。もしもSが自己共役な部分集合ならば，S'はMのAW^*-部分環（すなわちS'自身AW^*-環であり，S'の射影元のかってな集合の$l.u.b.$がS'で計算したものとM

で計算したものが等しい）である。もしもSがただ一つのユニタリ元から成る場合は，S'はMのAW^*-部分環であり，S''はMの可換AW^*-部分環である。

§2.「強密な定義域」と可測元。

ここで定義域といったが本来の意味は失なわれただ便宜的に使用するだけである。

定義2.1. $\{e_n\}(\subset M_p)$が「強密な定義域」(SDD)であるというのは，$e_n \uparrow 1$ 且つ $1-e_n \in \mathfrak{M}$ $(n=1,2,3,\cdots)$の時である。列対$\{x_n, e_n\}$が本質的に可測な元(EMO)であるというのは，$x_n \in M$，$\{e_n\}$がSDDで，$m<n$ならば，

$$x_n e_m = x_m e_m$$

$$x_n^* e_m = x_m^* e_m$$

の時である。
たとえば $x \in M$ に対して，$x_n = x$，$e_n = 1$ $(n=1,2,3,\cdots)$とすると$\{x_n, e_n\}$はEMOであり我々は簡単に$\{x, 1\}$で表わす。次にEMOの間に代数的演算を導入するために我々は，次の定義と補題を必要とする。

定義2.2. $x \in M$, $e \in M_p$ に対して，$(1-e)x$に右から掛けると0になる最大の射影元（実際に存在する！）を$x^{-1}[e]$と表わす。すなわち$1-x^{-1}[e]$が$(1-e)x$の右射影元である。

補題 2.1. $\{e_n\},\{f_n\},\cdots\{g_n\}$ を SDD とし，x を M の任意の元とすると，$\{e_n\wedge f_n\wedge\cdots\wedge g_n\}$，$\{x^{-1}[e_n]\}$ も又 SDD である。

証明）$\{e_n\},\{f_n\}$ と 2つの場合を示せば充分。今 $g_n=e_n\wedge f_n$ とし，$g=\mathrm{l.u.b.}\{g_n,\ n\geqq 1\}$，$h_n=x^{-1}[e_n]$ で，$h=\mathrm{l.u.b.}\{h_n,\ n\geqq 1\}$ とする。まず $g_n\uparrow g$ は明らかである。又 $1-g\leqq 1-g_n=(1-e_n)\vee(1-f_n)\in\mathfrak{M}$（[3], 定理 6.2.）であるから $1-g,\ 1-g_n\in\mathfrak{M}$ である。又定義 2.2. から $(1-e_k)xh_k=0$ で，h_k はかかる射影元の中で，最大のものであるから $m<n$ とすると，$(1-e_n)xh_m=(1-e_n)(1-e_m)xh_m=0$，故に $h_m\leqq h_n$ である。又 $1-h_n=1-x^{-1}[e_n]=RP((1-e_n)x)\sim LP((1-e_n)x)\leqq 1-e_n$ より $1-h_n=1-x^{-1}[e_n]\in\mathfrak{M}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である。又 $\{1-e_n,\ 1-f_n,\ 1-g_n,\ 1-h_n,\ 1-g,\ 1-h\}_{n=1,2,3,\ldots}\subset((1-e_1)\vee(1-f_1)\vee(1-h_1))M((1-e_1)\vee(1-f_1)\vee(1-h_1))$（これは，有限型の AW*-環であることに注意 $\equiv N$）に注意して（[3], p.248）により N には，一意に正規化された次元函数 D(·) が存在するから

$$D(1-h_n)\leqq D(1-e_n),$$

且つ

$$D(1-g)\leqq D(1-g_n)\leqq D(1-e_n)+D(1-f_n);$$

又 $D(1-e_n)\downarrow 0$，$D(1-f_n)\downarrow 0$ により $D(1-h_n)=D(1-g)=0$ すなわち $1-h=1-g=0$ がでてくる。　　証明終り。

次に Segal [11] の意味の本質的に可測な作用素が強密な定義域で一致すれば，それらの閉包が一致するという事に注意して，我々は EMO の間に次のやうな，同値関係を導入する。

定義 2.3. 2つの EMO $\{x_n, e_n\}$, $\{y_n, f_n\}$ が同値であるというのは，（記号で $\{x_n, e_n\} \equiv \{y_n, f_n\}$）$x_n g_n = y_n g_n$, $x_n^* g_n = y_n^* g_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ なる如き SDD $\{g_n\}$ が存在することである。

実際，上に定義した関係が同値関係を満すことがわかる。次の注意は，しばしば使用される。

注意 2.1. $\{x_n, e_n\}$ が EMO で $\{f_n\}$ が SDD の時，$\{x_n, e_n \wedge f_n\}$ も EMO で，$\{x_n, e_n\} \equiv \{x_n, e_n \wedge f_n\}$ となる。今 $\{x_n, e_n\} \equiv \{y_n, f_n\}$ ならば，この同値関係を与える SDD を $\{g_n\}$ とすれば，$h_n = e_n \wedge f_n \wedge g_n$ と置くことにより補題 2.1. から $\{h_n\}$ は SDD であり $\{x_n, h_n\}$, $\{y_n, h_n\}$ は EMO でさらに $\{x_n, h_n\} \equiv \{y_n, h_n\}$ である。

定義 2.4. $\{x_n, e_n\}$ を EMO とし $[x_n, e_n]$ をその同値類とする。$[x_n, e_n]$ を可測元（MO）と呼び，それら全体を C と表わす。我々は C の元を $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \cdots$. で表わすことにする。

さて次に C の中に代数的演算を入れよう。補題 2.1. に注意して $\{x_n, e_n\}$, $\{y_n, f_n\}$ を EMO, λ を複素数とするとき，
$\lambda\{x_n, e_n\} = \{\lambda x_n, e_n\}$, $\{x_n, e_n\} + \{y_n, f_n\} = \{x_n + y_n, e_n \wedge f_n\}$,
$\{x_n, e_n\}^* = \{x_n^*, e_n\}$ と定義する。これらの定義式の右辺は

EMOであることは，計算から明らかである。$g_n = e_n \wedge f_n \wedge ((g_n^*)^{-1}[e_n])/((x_n^*)^{-1}[f_n])$ と置けば，$\{g_n\}$ は補題2.1からSDDであり又 $\{x_n y_n, g_n\}$ がEMOなので，$\{x_n, e_n\}\{y_n, f_n\} = \{x_n y_n, g_n\}$ と定義する。さらにこれらの定義は，同値関係を保存するので，$\lambda\mathbf{X} = [\lambda x_n, e_n]$ $\mathbf{X}+\mathbf{Y} = [x_n + y_n, e_n \wedge f_n]$，$\mathbf{X}^* = [x_n^*, e_n]$，$\mathbf{XY} = [x_n y_n, g_n]$ と定義すれば，自然である。これらの定義により C は複素数体上の $*$-環になる。さらにもしも $x, y \in M$，λ を複素数とすると，$\{x, 1\} + \{y, 1\} = \{x+y, 1\}$，$\lambda\{x, 1\} = \{\lambda x, 1\}$，$\{x, 1\}^* = \{x^*, 1\}$，且つ，$\{x, 1\}\{y, 1\} = \{xy, 1\}$ となるから $[x, 1] + [y, 1] = [x+y, 1]$ $\lambda[x, 1] = [\lambda x, 1]$，$[x, 1]^* = [x^*, 1]$ 且つ $[x, 1][y, 1] = [xy, 1]$ となり $x \longrightarrow [x, 1]$ $(x \in M)$ なる写像は M から C の中への $*$-同型写像である。何故ならば，$\{x, 1\} \equiv \{y, 1\}$ ならば，$(x-y)e_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が適当なSDD $\{e_n\}$ に対して成立し[3]，補題2.2. から $x = y$ である。

以上の結果をまとめて，

定理2.1. C は上の定義による演算により複素数体上の $*$-環になる。さらに写像 $x\ (x \in M) \to [x, 1]$ は M から C の中への $*$-同型写像であり $[1, 1]$ は C の単位元となる。(簡単のため今後 $[1, 1] = 1$ と書く。)

注意2.2. $\mathbf{X} \in C$ が，$= [x_n, e_n]$ と表現されれば，$\mathbf{X}[e_m, 1] = [x_m e_m, 1]$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ が成立する。すなわちこのこと

から $[x_n, e_n] = [y_n, f_n]$ ならば，$x_m(e_m \wedge f_m) = y_m(e_m \wedge f_m)$ ($m=1, 2, 3, \cdots$) が成立する。すなわち大ざっぱにいうと，同値な線形作用素 $\{x_n, e_n\}$, $\{y_n, f_n\}$ は，それらの最大の共通な定義域上で一致する。何故ならば，$e_m^{-1}[e_n]$ は，$(1-e_n)e_m$ を右から掛けると0にする最大の射影元である。そして $(1-e_n)e_me_n = (1-e_n)e_ne_m = 0$ より $e_m^{-1}[e_n] \geq e_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) である。従って $\{x_n, e_n\}\{e_m, 1\} \equiv \{x_ne_m, e_n\}$ となる。一方定義2.1.により $n > m$ ならば，

$$x_ne_me_n = x_me_me_n,$$

$$e_mx_n^*e_n = (x_ne_m)^*e_n = (x_me_m)^*e_n = e_m(x_m)^*e_n,$$

$n \leqq m$ ならば，

$$x_ne_me_n = x_ne_n = x_me_n = x_me_me_n$$

$$e_m(x_n)^*e_n = e_m(x_m)^*e_n 。$$

この事は $\{e_n\}$ が $\{x_n, e_n\}\{e_m, 1\} \equiv \{x_me_m, 1\}$ の同値性を与えるSDDであることがわかる。

Cの構成の仕方からCは次のやうな意味で一意に決まってしまうことがわかる。これは，小笠原，吉永 [7] の定理のAW*-環への拡張である。

定理2.2. M, N を AW*-環とし，C_M, C_N を上に構成した可測元全体とする。C_M から C_N 上への *-同型写像 Φ と，M から N 上への *-同型写像 ϕ との間には，一対一の対応がありこの

対応は，ΦのMへの制限がϕであるということにより与えられる。[1]，[7]。

証明）我々は，定理2.1からM(N)をC_M(C_N)の自己共役部分環と考えることができる。補題5.2.によってΦを$C_M \to C_N$の*-同型写像とするとMをNの中に写すことがわかる。他方ϕは，射影元の有限型性を保存するからΦを$[x_n, e_n] \to [\phi(x_n), \phi(e_n)]$と定義すると，まずこの$\Phi$は一意である．何故ならば，$X \in C_M$に対して，$Xe_n \in M$ $(n=1,2,3,\cdots)$なる如きSDD$\{e_n\}$をMの中からみつけることができる。すると$\Phi(Xe_n) = \Phi(X)\Phi(e_n)$，すなわち$\phi(Xe_n) = \Phi(X)\phi(e_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$，又補題3.5.によって，ΦがM上のその値によって決まってしまうことがわかる。　　　　　　　　　　　　　　　証明終り。

注意2.3.もしもMがW^*-環（[10]，あるバナッハ空間の共役空間になっているC^*-環）ならば，Mをフォンノイマン環として，忠実に表現した場合CはSegal [11]の構成した可測作用素のつくる*-環と*-同型になることがわかる。

§3 Cの予備的代数的性質について。

補題3.1. Mの任意の可逆元Sと$e \in M_p$に対して，

$$((S^*)^{-1})^{-1}[1-e] = 1 - S^{-1}[e]$$

でありもしも$1-e \in \mathfrak{M}$ならば，$S^{-1}[1-e] \in \mathfrak{M}$が成立する。

さらに $X=[x_n, e_n]$ に対して $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$x_n \in M$ が M で可逆ならば，実は，X は C で可逆であり，ある適当な SDD $\{f_n\}$ に対して $X^{-1}=[x_n^{-1}, f_n]$ とかける。

証明）定義2.2.により $e(S^*)^{-1}$ の右-annihilator $(\equiv RA(e(S^*)^{-1}))$ $=(((S^*)^{-1})^{-1}[1-e])M$ であり $(1-e)S$ の右-annihilator $(\equiv RA((1-e)S))$ $=(S^{-1}[e])M$ である。又 $(1-e)S\cdot S^{-1}e=0$ であるから

$$S^{-1}e \in RA((1-e)S),$$

$$eS^{*-1}(1-S^{-1}[e])=0,$$

従って，

$$1-S^{-1}[e] \leqq ((S^*)^{-1})^{-1}[1-e]。$$

他方，

$$(1-e)S(S^{-1}[e])=0$$

$$S(S^{-1}[e])=eS(S^{-1}[e]),$$

$$S^{-1}[e]=S^{-1}eS(S^{-1}[e]),$$

$$S^{-1}[e]=S^{-1}[e]\cdot S^*eS^{*-1}。$$

従って，我々は，

$$S^{-1}[e]((S^*)^{-1})^{-1}[e]$$

$$=S^{-1}[e]\cdot S^*e\cdot eS^{*-1}(((S^*)^{-1})^{-1}[1-e])$$

$$=0.$$

より $((S^*)^{-1})^{-1}[1-e] \leqq 1-S^{-1}[e]$。従って前半の証明ができた。

次に f_n を $x_n e_n$ の左射影元とし，$\{f_n\}$ が SDD であることを示す。

そう。もしも $m < n$ とすれば，$f_m(x_m e_m) = f_n(x_n e_n \cdot e_m)$ $= x_n e_n e_m = x_m e_m$ であるから $1 - f_n \leqq 1 - f_m$ すなわち，$f_m \leqq f_n$ である。すべての n に対して x_n は可逆であったから前半により $1 - f_n = 1 - RP(e_n(x_n^*)) = ((x_n)^*)^{-1}[1 - e_n] = 1 - ((x_n)^{-1})^{-1}[e_n$ $\geqq 1 - e_n$。従って補題 2.1. の証明で使ったのと同じ方法で，$1 - f_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 且 $f_n \uparrow 1$ が証明でき $\{f_n\}$ は SDD である。$y_n = x_n^{-1}$ とすると $m < n$ ならば，

$$x_m e_m = x_n e_m,$$

$$y_n x_m e_m = y_n x_n e_m = e_n e_m = y_m x_m e_m,$$

$$(y_n - y_m) x_m e_m = 0$$

$$(y_n - y_m) f_m = 0 \text{。}$$

同様にして $g_n = LP((x_n)^* e_n)$ とすると，$\{g_n\}$ は SDD で $(y_n)^* g_m$ $= (y_m)^* g_m$ $(m < n)$ が成立する。もし $h_n = f_n \wedge g_n$ とすれば，$\{y_n, h_n\}$ は EMO であり $\mathbf{y} = [y_n, h_n]$ は $\mathbf{yx} = \mathbf{xy} = 1$ を満すことがわかる。

補題 3.2. もしも $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* (\in \mathcal{C})$ ならば，$\mathbf{x} = [x_n, e_n]$，$x_n^* = x_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とかける。

証明）明らかである。

上の2つの補題から

系．もしも $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* (\in \mathcal{C})$ ならば，$\mathbf{x} + i1$ は $\mathcal{C}$ において可逆である。

特に,

補題3.3. $\mathbf{u} = [u_n, e_n]$ が($\in \mathcal{C}$) $u_n \in M_u$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) を満せば,あるユニタリ元 $u \in M_u$ が存在して $\mathbf{u} = [u, 1]$ と書くことができる。

証明)証明は,[1]補題3.3.のとまったく同じであるが,完全性のため我々は,それを紹介しよう。$w_n = u_n e_n$ と置けば,$w_n^* w_n = e_n$ より $w_n \in M_{pi}$ である。故に $f_n = w_n w_n^* = u_n e_n u_n^*$ は,w_n の左射影元である。補題3.2.の証明からわかるように $\{f_n\}$ はSDDである。$v_n = w_n - w_{n-1} = u_n e_n - u_{n-1} e_{n-1} = u_n e_n - u_n e_{n-1} = u_n(e_n - e_{n-1})$,但し $u_0 = w_0 = e_0 = 0$ とする。v_n は $e_n - e_{n-1}$ を始射影元とする部分的等距離元であり終射影元は,$u_n(e_n - e_{n-1})u_n^* = u_n e_n u_n^* - u_{n-1} e_{n-1} u_{n-1}^* = f_n - f_{n-1}$,$f_0 = 0$ である。従って[4],補題20により M_{pi} の元 u があって $u^*u = \underset{n \geq 1}{l.u.b.}\{\sum_{i=1}^{n}(e_i - e_{i-1})\} = 1$,$uu^* = 1$ 且,$u(e_n - e_{n-1}) = v_n = u_n(e_n - e_{n-1})$。 数学的帰納法により $ue_n = u_n e_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) である。そこで,$e_n u e_n = e_n u_n e_n$ より $m < n$ に対して $e_m(e_n u e_n) = e_m(e_n u_n e_n)$,$e_m u e_n = e_m u_m e_n$,$(e_m u - e_m u_m) e_n = 0$ ($n > m$),従って,$u^* e_m = u_m^* e_m$,すなわち $\{u, 1\} \equiv \{u_n, e_n\}$。

補題3.4. $\mathcal{C}$ の元 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdots, \mathbf{z}$ に対して,$\mathbf{x}^*\mathbf{x} + \mathbf{y}^*\mathbf{y} + \cdots + \mathbf{z}^*\mathbf{z} = 0$ が成立すれば,$\mathbf{x} = \mathbf{y} = \cdots = \mathbf{z} = 0$ である。

証明)2つの場合を示せば充分である。もしも $\mathbf{x} = [x_n, e_n]$,

$\mathbf{y}=[y_n, f_n]$とすると，仮定によりSDD $\{h_n\}$が存在して，$e_n\wedge f_n \geqq h_n$，且 $\{(x_n)^* x_n + (y_n)^* y_n\} h_n = 0$，$h_n x_n^* x_n h_n + h_n y_n^* y_n h_n = 0$，$x_n h_n = y_n h_n = 0$。$m, n$ $(m<n)$を固定すると，$h_m x_n h_n = h_m x_m h_n = 0$，$h_m x_m = 0$，$(x_m)^* h_m = 0$，同様にして，$y_m^* h_m = 0$，$\mathbf{x}=\mathbf{y}=0$。　　　　証明終り。

補題3.5. $\mathcal{C}$の元 $\mathbf{x}=[x_n, e_n]$に対してあるSDD $\{f_n\}$があって $\mathbf{x}[f_n, 1]=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$が成立すれば，$\mathbf{x}=0$である。

証明）注意2.2.から我々は $\mathbf{x}[e_n\wedge f_n, 1]=[x_n(e_n\wedge f_n), 1]=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 従って，$x_n(e_n\wedge f_n)=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$。又 m, n $(n>m)$を固定すると，$(e_m\wedge f_m)x_n(e_n\wedge f_n)=(e_m\wedge f_m)x_m(e_n\wedge f_n)=0$，且，$(e_m\wedge f_m)x_m=0$，すなわち，$x_m^*(e_m\wedge f_m)=0$。$\mathbf{x}=0$を得る。　　　　証明終り。

§ 4. ケイリー変換と$\mathcal{C}$に対するスペクトル理論.

定理4.1. 公式

$$\mathbf{u} = (\mathbf{x} - i\mathbf{1})(\mathbf{x} + i\mathbf{1})^{-1}$$

$$\mathbf{x} = i(\mathbf{1}+\mathbf{u})(\mathbf{1}-\mathbf{u})^{-1}$$

は$\mathcal{C}$の自己共役元$\mathbf{x}$と$\mathbf{1}-\mathbf{u}$が$\mathcal{C}$で可逆である如き$\mathcal{C}$のユニタリ元$\mathbf{u}$ $(\mathbf{u}^*\mathbf{u}=\mathbf{u}\mathbf{u}^*=\mathbf{1})$の間の一対一互いに逆な対応を定義する。その様なユニタリ元$\mathbf{u}$はあるM_uの元uに対して，$\mathbf{u}=[u, 1]$と書くことができる。さらに$u\in M_u$に対して，

$\{u\}'' = C(\Omega)$ ($C(\Omega)$ はストーン空間 Ω 上の複素数値連続函数全体 [2]) と表現し, Ω_0 を $\{\omega ; \omega \in \Omega ; u(\omega) \neq 1\}$ なる開集合とする。 $1-[u,1]$ が $\mathcal{C}$ で可逆であるための必要充分条件は, Ω_0 が Ω で密でありある開集合(且つ閉)の列 $\{\Omega_n\}$ $(\Omega_n \subset \Omega)$ があって $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \Omega_0$ 且, Ω_n^c の特性函数 ($\{u\}''$ の射影元と考えられる) は, $\mathcal{M}$ の元となることである。($\mathbf{u}$ は $\mathbf{X}$ に対するケイリー変換と呼ばれる。)

証明) もしも $\mathbf{X} = \mathbf{X}^* \in \mathcal{C}$ が $\mathbf{X} = [x_n, e_n]$, $x_n^* = x_n$ と書けていれば, $\mathbf{X}$ のケイリー変換は $\mathbf{u} = [(x_n - i1)(x_n + i1)^{-1}, f_n]$ 但し $\{f_n\}$ は, 適当な SDD と書ける。又 $u_n = (x_n - i1)(x_n + i1)^{-1}$ はユニタリであるから補題 3.3. からある M_u の元 u があって $\mathbf{u} = [u, 1]$ と書くことができる。逆に $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ がユニタリで, $1 - \mathbf{u}$ が可逆であるとすると, $\mathbf{X} = i(1+\mathbf{u})(1-\mathbf{u})^{-1}$ と置けば, $\mathbf{u}$ は自己共役元 $\mathbf{X}$ のケイリー変換である。従って上の議論により $\mathbf{u} = [u, 1]$ $(u \in M_u)$ と書ける。

次に Ω_0 が Ω で密で, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \Omega_0$, Ω_n^c の特性函数が $\mathcal{M}$ の元となる如き開且閉な Ω の部分集合の列 $\{\Omega_n\}$ が存在するものとする。Ω_n は単調増加と仮定して一般性を失なわないから e_n を Ω_n の特性函数とすると $\{e_n\}$ は SDD である。 $\omega \in \Omega_0 \to G(\omega) = (1 - u(\omega))^{-1}$ なる複素数値函数を考えると G は Ω_0 上連続である。 $y_n = G e_n$ と置けば 明らかに $y_n \in \{u\}''$ であ

り，$\{y_n, e_n\}$はEMO となる。そして $(1-u)y_n = e_n = 1\cdot e_n$ ($n=1,2,3,\cdots$) であるから $[y_n, e_n]$は $1-[u,1]$ の$\mathcal{C}$における可逆元である。逆にもしも $1-[u,1]$が可逆であるとすると，$[u,1]$ は$\mathcal{C}$のある自己共役元 $\mathbf{X} = i(1+[u,1])(1-[u,1])^{-1}$ のケイリー変換となる。そして我々は，$\mathbf{X} = [x_n, e_n]$，$x_n^* = x_n$ ($n=1,2,3,\cdots$) 且 $\mathbf{u} = [(x_n - i1)(x_n + i1)^{-1}, e_n]$と書くことができる。そして$\|x_n\| < r_n$ 且 $r_n \uparrow \infty$ $(n\to\infty)$ なる如き正の数列$\{r_n\}$をかってに一つ固定し$\Omega_n = \{\omega ; |u(\omega)-1| > \frac{2}{\sqrt{r_n^2+1}}\}^-$ とする。(Ω_nは開且閉であることに注意せよ。[2]) $\frac{2}{\sqrt{r_n^2+1}} \downarrow 0$ $(n\to\infty)$で，$\{\omega ; |u(\omega)-1| > \frac{2}{\sqrt{r_n^2+1}}\} \subset \{\omega ; |u(\omega)-1| > \frac{2}{\sqrt{r_n^2+1}}\}^- \subset \{\omega ; |u(\omega)-1| \geqq \frac{2}{\sqrt{r_n^2+1}}\} \subset \{\omega ; |u(\omega)-1| > \frac{2}{\sqrt{r_{n+1}^2+1}}\}$であるから，$\Omega_n \uparrow$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \Omega_0$ である。もしもΩ_0が密でないとすると$\Omega - \Omega_0^-$は空集合ではないからその特性函数eは零でない射影元である。$\omega \in \Omega - \Omega_0^-$ならば，$u(\omega) = 1$であるから，$(1-[u,1])[e,1] = 0$ となり，$I-[u,1]$ の$\mathcal{C}$における可逆性に矛盾する。今f_nをΩ_n^c の特性函数とする。$e_n \wedge f_n = 0$を証明したい。もしも成立しないとすれば，

$$
\begin{aligned}
\|(1-u)(e_n \wedge f_n)\| &= \|(1-u)f_n(f_n \wedge e_n)\| \\
&\leqq \|(1-u)f_n\| \\
&\leqq \frac{2}{\sqrt{r_n^2+1}},
\end{aligned}
$$

一方補題3.3.の証明によれば，

$$(1-u)(e_n \wedge f_n) = (1-u)e_n(e_n \wedge f_n)$$
$$= \{1-(x_n - i1)(x_n + i1)^{-1}\} e_n (e_n \wedge f_n)$$

さらに $\eta(\geq 0) \to f(\eta) = \frac{4}{\eta^2+1}$ なる実数値函数は強い意味で単調増加であるから

$$4(e_n \wedge f_n) \geq (e_n \wedge f_n)\{1-(x_n - i1)(x_n+i1)^{-1}\}^*\{1-(x_n-i1)(x_n+i1)^{-1}\}(e_n \wedge f_n)$$
$$\geq \frac{4}{\|x_n\|^2+1} \cdot e_n \wedge f_n$$

これは,

$$\|(1-u)(e_n \wedge f_n)\| = \|\{1-(x_n-i1)(x_n+i1)^{-1}\}(e_n \wedge f_n)\|$$
$$\geq \frac{2}{\sqrt{\|x_n\|^2+1}} > \frac{2}{\sqrt{r_n^2+1}},$$

従って矛盾である。故に[3]定理5.4.により $f_n = f_n - e_n \wedge f_n \sim e_n \vee f_n - e_n \leq 1 - e_n \in \mathfrak{M}_c$。従って $\{\Omega_n\}$ はすべての要求を満している。

注意4.1. Mが有限型の場合 Berberian が[1]で示したように, $1-[u,1]$ が C で可逆であるための必要充分条件は, Ω_0 が Ω で密であることであった。しかし無限型の場合定理4.1.の後者の条件を落すことができないことが次の例からわかる。$\mathfrak{H}$ を無限次元可分ヒルベルト空間とし, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ をその直交基とする。そしてMを $\mathfrak{H}$ 上の有界線形作用素全体とする。$\mathfrak{M}_p$ は, 有限次元の射影作用素全体となることがわかり $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\lambda_i \uparrow \infty$ $(i \to \infty)$ なる正の数列とし, $\mathfrak{D}(T) = \{\xi ; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |(\xi, \xi_i)|^2 < \infty\}$ とすると, $\mathfrak{D}(T)$ は強位相で密な部分空間となる。$\mathfrak{D}(T)$ 上の線

形作用素を $T\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\xi, \xi_i)\xi_i$, $\xi \in \mathcal{D}(T)$ と定義すれば, T は密な定義域をもつ非有界自己共役作用素となる。一方簡単な考察から $\mathbb{M}$ に対しては $\mathcal{C} = \mathbb{M}$ となるから T は非可測作用素である。U を T のケイリー変換とすると, $1-U$ は一対一である。今 $\{U\}'' = C(\Omega)$ と表現すると, $\Omega_0 = \{\omega ; U(\omega) \neq 1\}$ は Ω で密である。そして注意 2.3. から $1-U$ は $\mathcal{C}$ で可逆とはならない。

この節の残りの部分は Berberian [1] のちょっとした修正であるが, 完全性を期すためこゝにあげておこう。

定理 4.2. $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ を自己共役な元とし, $\mathbf{u} = [u, 1]$ をそのケイリー変換とする。すると我々は, $\mathbf{x} = [x_n, e_n]$ 但し, x_n, $e_n \in \{u\}''$, $x_n^* = x_n$ $x_n e_n = x_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $x_n \uparrow$ と書ける。

証明) $\{u\}'' = C(\Omega)$ と書くと定理 4.1. から $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \{\omega ; u(\omega) \neq 1\}$ $(\equiv \Omega_0)$ 且, $\Omega_0^- = \Omega$ なる如き Ω の開且閉な部分集合の増加列をとれる。今 Ω_n の特性函数 e_n の列 $\{e_n\}$ を考えると SDD である。$\omega \in \Omega_0$ で定義された複素数値函数

$$G(\omega) = (1 - u(\omega))^{-1},$$

$$F(\omega) = i(1 + u(\omega))(1 - u(\omega))^{-1}$$

を考えると, F は実数値函数であり, $x_n = F e_n$, $y_n = G e_n$ とすると, $x_n^* = x_n = x_n e_n$ で $\{x_n, e_n\}$, $\{y_n, e_n\}$ はともに EMO で $[y_n, e_n]$ は $1 - [u, 1]$ の可逆元である。又 $x_n = F e_n = i(1+u)G e_n$

$=i(1+u)y_n$ から $[x_n, e_n]=i(1+[u,1])(1-[u,1])^{-1}=\mathbf{X}$ である。又 $m<n$ に対して，$(x_m)^2=(x_n e_m)^2=x_n^* e_m x_n \leqq x_n^* x_n=(x_n)^2$ となり証明が終る。

次に $\mathcal{C}$ の部分環 $[M,1]$ ($\equiv\{[x,1], x\in M\}$) を $\mathcal{C}$ の代数的構造で特徴づけよう。まず第一段回として，

定理 4.3. $\mathbf{X}\in\mathcal{C}$ が $\mathbf{X}=[x_n, e_n]$, $\|x_n\|\leqq k$ $(n=1,2,3,\dots)$ と書けるならば，ある M の元 x が存在して $(\|x\|\leqq k)$ $\mathbf{X}=[x,1]$ と書くことができる。

証明）$\|(1/2)(x_n^*+x_n)\|\leqq k$ であるから我々は，$\mathbf{X}=\mathbf{X}^*$ と仮定して一般性を失なわない。$\mathbf{U}=[u,1]$ を $\mathbf{X}$ のケイリー変換とすると，上の定理 4.2 から $\mathbf{X}=[y_n, f_n]$, $y_n, f_n\in\{u\}''$, $y_n^*=y_n$, $y_n^2\uparrow$ と書くことができる。次に $\|y_n\|\leqq k$ $(n=1,2,3,\dots)$ を証明しよう。$\{y_n, f_n\}\equiv\{x_n, e_n\}$ であるからある SDD $\{g_n\}$ があって，$y_n g_n=x_n g_n$ $(n=1,2,3,\dots)$ と書ける。すると，$g_n(y_n)^2 g_n=g_n x_n^* x_n g_n\leqq k^2 g_n$。$m, n$ $(n>m)$ を固定すると，我々は，$y_m^2\leqq y_n^2$ より，$g_n y_m^2 g_n\leqq k^2 g_n$，$g_n(k^2 1-y_m^2)g_n\geqq 0$。$\{k^2 1-y_m^2\}''=C(\Gamma)$ と表わそう。[2] 今 $(k^2 1-y_m^2)(\gamma)<0$ がある Γ の元 γ に対して成立するものと仮定すると，ある $\{k^2 1-y_m^2\}''$ の射影元 g と実数 $\delta<0$ が存在して，$g(k^2 1-y_m^2)\leqq\delta g$ と書ける。$(k^2 1-y_m^2)^{-1}[g]$ は $(1-g)(k^2 1-y_m^2)$ に右から掛けると 0 になる最大の射影元であるから $g\leqq(k^2 1-y_m^2)^{-1}[g]$ である。又

$f_n' = g_n \wedge ((k^2 1 - y_m^2)^{-1}[g])$とすると，$(1-g)(k^2 1 - y_m^2) f_n' = 0$，$(k^2 1 - y_m^2) f_n' = g(k^2 1 - y_m^2) f_n'$，$f_n'(k^2 1 - y_m^2) f_n' = f_n' g (k^2 1 - y_m^2) f_n'$。又 $0 \leqq f_n'(g_n(k^2 1 - y_m^2) g_n) f_n' = f_n'(k^2 1 - y_m^2) f_n' \leqq \delta f_n' g f_n' \leqq 0$ であるから $\delta f_n' g f_n' = 0$，$g f_n' = 0$，$0 = g \wedge f_n' = g \wedge g_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ $g = g - g \wedge g_n \sim g_n \vee g - g_n \leqq 1 - g_n \in \mathfrak{M}$。補題2.1の証明と同じようにして $g = 0$ が証明でき $g \neq 0$ に矛盾する。すなわち $k^2 1 - y_m^2 \geqq 0$，$\| y_n \| \leqq k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$。$y_n = w_n r_n$ を y_n の極分解とする。但し $w_n, r_n \in \{u\}''$，$w_n^* w_n = w_n w_n^* = RP(y_n)$，$r_n = y_n^{1/2}$ とできる。（[13] 補題2.1による。）$y_n e_m = y_m$ $(m < n)$，より分解の一意性から $w_n f_m = w_m$，$r_n f_m = r_m$ である。従って $\{w_n, f_n\}$，$\{r_n, f_n\}$ はともにEMOである。そして $[y_n, f_n] = [w_n, f_n][r_n, f_n]$。従って $[w_n, f_n] = [w, 1]$，$[r_n, f_n] = [r, 1]$，$r, w \in M$を証明することができる。補題5.3.の証明を修正することによつて，ある部分的等距離写像 $w \in \{u\}''$ があって，$[w_n, f_n] = [w, 1]$となることがわかる。又 $r_n \uparrow$ 且 $r_n \leqq k \cdot 1$ より[2]から $r = \mathrm{l.u.b.}\{r_n, n \geqq 1\}$なる如き r が $\{u\}''$の中に存在する。$\{u\}'' = C(\Omega)$と函数表現しておくと $r_n(\omega) \uparrow r(\omega)$が第一類集合を除いて成立するから $r f_n = r_n$，$[r_n, f_n] = [r, 1]$，$\| r \| \leqq k$ となり証明が終る。

さらに条件をゆるめて，

定理4.4. $\mathbf{x}$ $(\in C)$ が $= [x_n, e_n]$，$\| e_n x_n e_n \| \leqq k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

を満すならば，Mの元xが存在して $\mathbf{X}=[x,1]$, $\|x\|\leq k$ と書くことができる。

証明）$y_n=e_nx_ne_n$, $f_n=e_n\wedge((x_n)^{-1}[e_n])\wedge(((x_n)^*)^{-1}[e_n])$, とすると $\{y_n,f_n\}\equiv\{x_n,e_n\}$が成立する。従って $\mathbf{X}=[y_n,f_n]$, $\|y_n\|\leq k$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である。　　　　　　　　証明終り。

次に$\mathcal{C}$の自己共役元全体の間に半順序を入れよう。

定義4.1. $\mathbf{X}\in\mathcal{C}$が非負（記号で ≥ 0）であるというのは，ある$\mathbf{y}\in\mathcal{C}$に対して $\mathbf{X}=\mathbf{y}^*\mathbf{y}$ と書けることである。

もしも$\mathbf{X}$, $\mathbf{y}$が$\mathcal{C}$の自己共役元であるとき，$\mathbf{y}-\mathbf{X}\geq 0$ならば，$\mathbf{X}\leq\mathbf{y}$と書く。これと前の定理によって我々は，次の定理を得る。

定理4.5. もしも$\mathbf{X}\in\mathcal{C}$が$\mathbf{X}^*\mathbf{X}\leq 1$を満せば，あるMの元$x$が存在して $\mathbf{X}=[x,1]$ と書ける。

証明）前の定理4.4.と$\mathbf{X}^*\mathbf{X}\leq 1$の定義から明らかである。

$\mathbf{e}\in\mathcal{C}$が射影元であるというのは，$\mathbf{e}^*=\mathbf{e}=\mathbf{e}^2$ なることであり，$\mathbf{w}\in\mathcal{C}$が部分的に等距離元であるというのは，$\mathbf{w}^*\mathbf{w}$ が射影元であること。次の定理は，$\mathcal{C}$には，新しい射影元が存在しない事を意味する。すなわち，

定理4.6. $\mathcal{C}$に於いてすべての部分的に等距離元$\mathbf{w}$は，$\mathbf{w}=[w,1]$, $w\in M_{pi}$ と書ける。特にすべての$\mathcal{C}$の射影元$\mathbf{e}$は $\mathbf{e}=[e,1]$, $e\in M_p$ とかけ従って$\mathcal{C}$の射影元全体は $\mathbf{e}\rightarrow[e,1]$

なる対応により M_p と同型な完備束をなす。

さて $\mathcal{C}$ の自己共役元の半順序集合に話をもどそう。ここでの話の基礎になるものは，次のような数のケイリー変換である。すなわち $\alpha = i(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}$，$\lambda = (\alpha - i)(\alpha + i)^{-1}$，

(1) $\alpha = 0$　　　　$\lambda = -1$ の時，

(2) $\alpha > 0$　　　　$\lambda \in \{e^{i\theta}, -\pi < \theta < 0\}$ の時，

(3) $\alpha < 0$　　　　$\lambda \in \{e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$ の時。

もしも $\mathbf{X} \geqq 0$ $(\mathbf{X} \in \mathcal{C})$ $\alpha \geqq 0$（実数）ならば，$\alpha\mathbf{X} \geqq 0$ であり，$\mathbf{X} \geqq 0$, $-\mathbf{X} \geqq 0$ ならば，$\mathbf{X} = 0$ である。$\mathbf{X} \geqq 0$, $\mathbf{Z} \in \mathcal{C}$ ならば，$\mathbf{Z}^*\mathbf{X}\mathbf{Z} \geqq 0$ である。$\mathcal{C}$ の自己共役元全体がこの順序に関して実線形順序空間になるためには，$\mathbf{X} \geqq 0$, $\mathbf{Y} \geqq 0$ $(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{C})$ ならば，$\mathbf{X} + \mathbf{Y} \geqq 0$ がいえればよいが，これは次の定理から，自動的にでゝくる。

定理 4.7. $\mathbf{X} \in \mathcal{C}$ を自己共役元，$\mathbf{u}$ を $\mathbf{X}$ のケイリー変換とする。次の4つの命題は，同値である。

(1) $\mathbf{X} \geqq 0$，

(2) $\mathbf{X} = [y_n, f_n]$，$y_n \geqq 0$，

(3) $\sigma(u)$（u のスペクトル）$\subset \{e^{i\theta}; -\pi \leqq \theta \leqq 0\}$，

(4) $\mathbf{X} = [x_n, e_n]$，x_n，$e_n \in \{u\}''$，$x_n \geqq 0$，$x_n e_n = x_n$。

証明）(1) → (2) は定義 4.1. から明らかである。(2) → (3) を証明しよう。$\lambda = e^{i\theta}$ $0 < \theta < \pi$ と仮定する。その時，$u - \lambda 1$ が

Mで可逆である事を示す。$\lambda = (\alpha - i1)(\alpha + i)^{-1}$, $\alpha < 0$, $\alpha = i(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}$と書ける。簡単な計算により, $[u,1] - \lambda 1 = (1-\lambda)(\mathbf{X} - \alpha 1)(\mathbf{X} + i1)^{-1}$, すなわち $[u,1] - \lambda 1 = (1-\lambda)[(y_n - \alpha 1)(y_n + i1)^{-1}, g_n]$と適当なSDD $\{g_n\}$を使ってかける。仮定から $y_n \geqq 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$であるから $y_n - \alpha 1$ はMで可逆である。従って補題3.1.により$[u,1] - \lambda 1$は $\mathcal{C}$ で可逆である。又$([u,1] - \lambda 1)^{-1} = (1-\lambda)^{-1}[(y_n + i1)(y_n - \alpha 1)^{-1}, h_n]$ と適当なSDD$\{h_n\}$を使用してかける。又 $\eta\ (\geqq 0) \longrightarrow f(\eta) = (\eta^2+1)(\eta-\alpha)^{-2}$ なる実数値函数は,有界である。すなわち $f(\eta) \leqq k$ $(\eta \geqq 0)$ となる。y_nの函数表現に注目して我々は, $\|(y_n + i1)(y_n - \alpha 1)^{-1}\|^2 \leqq k$ $(n=1,2,3,\cdots)$を得る。故に定理4.3.から $([u,1] - \lambda 1)^{-1} = [x, 1]$がある$x \in M$に対して成立し, $u - \lambda 1$ がMで可逆となる。(3)→(4) 仮定と定理4.2.の証明から明らかである。(4)→(1) 今 $z_n = (x_n)^{1/2}$ とする。もしも $m < n$ ならば, $x_n e_m = x_m$ 従って平方根の一意性から $z_n e_m = z_m$ であり $\{z_n, e_n\}$ はEMOで, $\mathbf{Y} = [z_n, e_n]$と置けば, $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} = \mathbf{Y}^2$, すなわち$\mathbf{X} \geqq 0$ がでてくる。

証明終り。

系. もしも$\mathbf{X} \in \mathcal{C}$が$\mathbf{X} \geqq 0$ならば, $\mathbf{Y} \geqq 0$ が一意に決まって, $\mathbf{X} = \mathbf{Y}^2$ とかけ且 $\mathbf{Y} \in \{\mathbf{X}\}''$ である。

証明) 存在性は, 上の定理の(4)→(1)の証明の中でみた。次に一意性を示そう。$\mathbf{X} = \mathbf{Z}^2$, $\mathbf{Z} \geqq 0$ とするとき, $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ を,

証明しよう。$XZ=ZX$ であるから，$ZY=YZ$　従って $(Y+Z)(Y-Z)=Y^2-Z^2=0$，$(Y-Z)(Y+Z)(Y-Z)=0$，又仮定から $r^*r=Y$，$S^*S=Z$ $(r, S\in \mathcal{C})$ とかけるから代入して，$0=(Y-Z)(r^*r+S^*S)(Y-Z)=\{r(Y-Z)\}^*\{r(Y-Z)\}+\{S(Y-Z)\}^*\{S(Y-Z)\}=0$，故に補題 3.4. から $r(Y-Z)=S(Y-Z)=0$，$r^*r(Y-Z)=S^*S(Y-Z)=0$，$(Y-Z)^*(Y-Z)=0$ となって証明が終る。

定義 4.2. $X\geqq 0$ $(\in \mathcal{C})$ に対して，上の Y を $Y=X^{\frac{1}{2}}$ と書く。又 $X\in \mathcal{C}$ に対して，$|X|=(X^*X)^{\frac{1}{2}}$ と書く。

注意 4.2. $X\in \mathcal{C}$ $(\geqq 0)$ に対してその一意に決まるケイリー変換を U $(=[u, 1],\ u\in M_u)$ とする。我々は定理 4.2. により $X=[x_n, e_n]$，$x_n, e_n\in \{u\}''$ 且，$X=[x_n e_n, e_n]$ と書ける。p $(p\geqq 0)$ 実数に対して，U の函数表現から $m<n$ ならば，$(x_n e_n)^p e_m=(x_m e_m)^p e_m$ が成立する。$Y=[(x_n e_n)^p, e_n]$ とすると，この Y は，$X=[x_n, e_n]$ なる $\{u\}''$ に於ける表現に従属しないことがわかる。何故ならば，もし $X=[x_n', e_n']$，$x_n', e_n'\in \{u\}''$ と書ければ，$x_n e_n(e_n\wedge e_n')=x_n' e_n'(e_n\wedge e_n')$ と書ける。従って，$(x_n e_n)^p(e_n\wedge e_n')=(x_n' e_n')^p(e_n\wedge e_n')$ が成立する。この Y を X^p $(\in \{X\}'')$ が成立する。これは非可換積分論への応用上重要である。[9]

§5 $\mathcal{C}$ の代数的構造について。

定理5.1. $X\in\mathcal{C}(\geq 0)$ のケイリー変換を $[u,1]$ とし，$\{u\}''=C(\Omega)$（$C(\Omega)$ はストーン空間 Ω 上の複素数値連続函数全体とする）と表現し，Ω_0^+ を $\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ i(1+u(\omega))(1-u(\omega))^{-1}>0\}=\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ u(\omega)=e^{i\theta},\ -\pi<\theta<0\}$ なる如き開集合とする。X に対して次の条件(1),(2)を満足する $Y\in\mathcal{C}$ と射影元 $e\,(\in\mathcal{C})$ が存在するための必要充分条件は開且閉な Ω の部分集合の列 $\{\Gamma_n\}$ が存在して，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n=\Omega_0^+$ で，集合 $(\Omega_0^+)^- -\Gamma_n$ の特性函数は $\{u\}''$ の射影元と考えられるが，これが $\mathfrak{M}$ に属することである。但し $(\Omega_0^+)^-$ は集合 Ω_0^+ の閉包である。

(1) $XY=e$, $eX=X$, $eY=Y$,

(2) $Y,\ e\in\{X\}''$, $Y\geq 0$。

証明）記号は定理4.2の証明のと同じものを使用する。$X=[x_n,e_n]$ と表現し，f_n (f) を Γ_n ($(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n)^-=(\Omega_0^+)^-$) の特性函数とすると，$f_n\uparrow f$ 且，$f-f_n\in\mathfrak{M}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である。今 $g_n=f_n+1-f$ とすると $\{g_n\}$ は明らかにSDDである。$z_n=Ff_n$ とすると $\omega\in\Omega_0\cap(\Omega-(\Omega_0^+)^-)$ に対して，$F(\omega)=0$ であるから $\{z_n,g_n\}$ はEMO且 $\{e_ng_n\}$ なるSDDが $\{x_n,e_n\}\equiv\{z_n,g_n\}$ の同値性を与える。従って $X=[z_n,g_n]$。又 $\omega\in\Gamma_n$ に対して $z_n(\omega)>0$ であるから $\{u\}''$ の中に一意な y_n があって，$z_ny_n=f_n$, $y_nf_n=y_n$ と書ける。一意性から，

$m<n$ なら $y_n g_m = g_m$ で，$\{y_n, g_n\}$ は EMO となり $\mathbf{y} = [y_n, g_n]$ とし，$e = f$ とすると (1) (2) を満足する。逆に $\mathbf{y}$, $[e, 1]$ $(e \in M_p)$ が (1) (2) を満して存在しているものとする。$[u, 1]$ を X のケイリー変換とし，$\mathbf{w} = \frac{(X+i1)}{2}\mathbf{y}$ とすると，簡単な計算から，

$$[e, 1]\mathbf{w} = \mathbf{w}[e, 1] = \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \{X\}'',$$

$$\mathbf{w}(1 + [u, 1]) = (1 + [u, 1])\mathbf{w} = [e, 1],$$

且 e は $\{\omega ;\ (1+u)(\omega) \neq 0\}^{-}$ の特性函数になる。今 $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}[e_n, 1]$ とすると，

$$\mathbf{w}_n [e, 1] = [e, 1]\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_n$$

且

$$(*) \qquad \mathbf{w}_n (1 + [u, 1]) = (1 + [u, 1])\mathbf{w}_n = [e_n e, 1]$$

である。$\mathbf{w}_n = [w_m^n, g_m^n]$ とし，$\|w_m^n\| < r_m^n$ 但し $\{r_m^n\}$ は，$r_m^n \uparrow \infty$ $(m \uparrow \infty)$ なる如き正の数の列とする。今 $\{\omega ; |(1+u)(\omega)| > \frac{1}{r_m^n}\}$ $\subset \{\omega ; |(1+u)(\omega)| > \frac{1}{r_{m+1}^n}\}$ に注意して，$H_m^n = \{\omega ; |(1+u)(\omega)| > \frac{1}{r_m^n}$ は開且閉 [2] 集合で，$H_m^n \cap \Omega_n = \Omega_m^n$ とすると，簡単な計算から $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\Omega_m^n = \{\omega ;\ (1+u)(\omega) \neq 0\} \cap \{\omega ;\ (1-u)(\omega) \neq 0\}$

$$= \Omega_0^+ 。$$

今 h_m^n を $\Omega_m^{n\,c}$ の特性函数とすると $(*)$ なる等式により SDD $\{g_m^n\}_{m=1}^{\infty}$ が存在して，

$$w_m^n (1+u) g_m^n = (1+u) w_m^n g_m^n = e_n e\, g_m^n$$

が成立する。もしも $(e_n e) \wedge g_m^n \wedge h_m^n \ (= f_m^n) \neq 0$ とすれば，

$$w_m^n(1+u)f_m^n = (1+u)w_m^n f_m^n = f_m^n$$

となり，

$$1 = \|(1+u)w_m^n f_m^n\| = \|w_m^n(1+u)f_m^n\|$$
$$\leqq \|w_m^n\|\|(1+u)f_m^n\|$$

が成立し且

$$\|(1+u)f_m^n\| = \|(1+u)h_m^n f_m^n\|$$
$$\leqq \frac{1}{r_m^n}$$

より $\|w_m^n\| \geqq r_m^n$ を得る。これは矛盾である。従って $(e_n e)\wedge g_m^n \wedge h_m^n = 0$ となり $e_n e h_m^n = e_n e h_m^n - (e_n e h_m^n)\wedge g_m^n \sim (e_n e h_m^n)\vee g_m^n - g_m^n \leqq 1 - g_m^n \in \mathfrak{M}$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ で，$e - e_n e(1 - h_m^n) = e - ee_n + e_n e h_m^n \leqq 1 - e_n + ee_n h_m^n \in \mathfrak{M}$ ([3] 定理4.2.) から $\{\Omega_m^n\}_{m,n=1}^{\infty}$ は，すべての要求を満している。　証明終り。

定義 5.1. Cが正則であるというのは，任意の$x \in C$に対して$Cx = Ce$なる如きCの射影元eが存在することである。

これに対しては，次の定理が成立する。

定理 5.2. Cが正則であるための必要充分条件は，Mが有限型であること。

注意 5.1. 充分性は，Berberian [1] によって証明され，必要性はさらに広い代数系で，I. Kaplansky [5]が証明した。しかし彼の議論はここでは，興味の対象ではないので，省略する。詳しくは原論文を参照されたい。しかしMがAW^*-環

である場合には，より簡単な証明ができることに注意する。

証明）充分性は，S.K.Berberian [1] が示したのでここでは省略する。今 $\mathcal{C}$ が正則であると仮定しよう。ある中心の射影元 e があって $M(1-e)$ が有限型で，$e=0$ 又は Me が真無限型となり $M=Me\oplus M(1-e)$ とできる。もしも $e\neq 0$ であれば，M のある射影元の列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって $e_i\uparrow 1$ 且 $1-e_i\notin \mathfrak{M}$ $(i=1,2,3,\cdots)$ とできる。$\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ をかってな正数の強い意味での単調増加列で，$\lambda_i\uparrow\infty$ $(i\to\infty)$ とする。今 S_n を

$$S_n=\sum_{i=2}^{n}(1/\lambda_i)(e_i-e_{i-1})+(1/\lambda_1)e_1 \quad (\in M)$$

と定義すれば，$\lambda_i\uparrow\infty$ $(i\to\infty)$ より $S_n\leqq(1/\lambda_1)1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で $\{S_n\}$ は互いに可換な正元の単調増加列である。$\{S_n\}$ によって誘導された最大可換自己共役環を A とし，$A=C(\Delta)$ と函数表現しておく。次に Δ はストーン空間であるから A の中に $l.u.b.\{S_n\}=S$ をもつ。そして $RP(S)=1$ であることが簡単な計算からわかる。又 $\mathcal{C}$ の正則性により $\mathcal{C}$ の射影元 $\boldsymbol{e}$ が存在して $\mathcal{C}_{[S,1]}=\mathcal{C}_{\boldsymbol{e}}$ である。$\boldsymbol{e}=1$ で $\mathcal{C}$ で $[S,1]$ は可逆であることがわかる。$\boldsymbol{y}$ をその逆元とする。$\boldsymbol{y}=[x_n,f_n]$，$x_n^*=x_n$。するとある SDD $\{g_n\}$ が存在して

$$x_nSg_n=Sx_ng_n=g_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)。$$

今 $\|x_n\|<\mu_n$，$\mu_n\uparrow\infty$ $(n=1,2,3,\cdots)$ なる如き正の数の列 $\{\mu_n\}$ を撰び m_n を $\lambda_k\leqq\mu_n$ なる最大の正の整数 k とする。もしも，

$(1-e_{m_n})\wedge g_n \neq 0$ とすると，

$$x_n S((1-e_{m_n})\wedge g_n) = x_n[\text{l.u.b.}\{\sum_{i=2}^{n}(1/\lambda_i)(e_i-e_{i-1})+(1/\lambda_1)e_1,\ n\geq 1\}]((1-e_{m_n})\wedge g_n)$$
$$= x_n[\text{l.u.b.}\{\sum_{p=m_n+1}^{p}(1/\lambda_p)(e_p-e_{p-1}),\ p\geq m_n+1\}]((1-e_{m_n})\wedge g_n)$$
$$= (1-e_{m_n})\wedge g_n$$

より

$$\|x_n\|\cdot\|\text{l.u.b.}\{\sum_{i=m_n+1}^{p}(1/\lambda_i)(e_i-e_{i-1}),\ p\geq m_n+1\}\|$$
$$\geq \|x_n[\text{l.u.b.}\{\sum_{i=m_n+1}^{p}(1/\lambda_i)(e_i-e_{i-1}),\ p\geq m_n+1\}]\|$$
$$= 1.$$

$$0\leq (g_n\wedge(1-e_{m_n}))[\text{l.u.b.}\{\sum_{i=m_n+1}^{p}(1/\lambda_i)(e_i-e_{i-1}),\ p\geq m_n+1\}]^2(g_n\wedge(1-e_{m_n}))$$
$$\leq (1/\lambda_{m_n+1})^2(g_n\wedge(1-e_{m_n}))$$

より

$$\|x_n\| \geq 1/\|[\text{l.u.b.}\{\sum_{i=m_n+1}^{p}(1/\lambda_i)(e_i-e_{i-1}),\ p\geq m_n+1\}]((1-e_{m_n})\wedge g_n)\|$$
$$\geq \lambda_{m_n+1} > \mu_n,$$

これは，$\|x_n\|<\mu_n$ に矛盾する。従って $(1-e_{m_n})\wedge g_n=0$ である。そして $(1-e_{m_n}) = (1-e_{m_n})-(1-e_{m_n})\wedge g_n \sim g_n\vee(1-e_{m_n})-g_n \leq 1-g_n\in\mathfrak{M}$ となり $\{e_{m_n}\}$ のとり方に矛盾する。従って M は有限型である。　　　　　証明終り。

可測作用素の極分解は，非可換積分論の構成において最も重要な道具の一つであるが次に $\mathcal{C}$ に於いてこの分解ができる，すなわち，

定理 5.3. $X \in \mathcal{C}$ とし，$[u,1]$（$[v,1]$）を X^*X（又 XX^*）のケイリー変換とし，$e = LP(1+u)$，$f = LP(1+v)$ とする。すると $X = W|X|$，$W^*W = [e,1]$，$WW^* = [f,1]$ 特に $e \sim f$ と書くことができる。

証明）証明は，[13] の補題 2.1 を修正してやることにより得られる。すなわち $\{u\}''$（$\{v\}''$）をストーン空間 Ω（Γ）上の複素数値連続函数全体 $C(\Omega)$（$C(\Gamma)$）として表現しておく。容易な計算から e（f）は $\{\omega ; u(\omega) \neq -1\}^-$（$\{\gamma ; v(\gamma) \neq -1\}^-$）の特性函数であることがわかる。定理 4.2. から $X^*X = [y_n, e_n]$，y_n，$e_n \in C(\Omega)$，$\{e_n\}$ は SDD，$0 \leq y_n \leq y_{n+1}$，$y_n e_m = y_m e_m = y_m$（$m<n$）と書くことができる。$n, m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して次の (1)－(5) を満すような正の元 $\{c_m^n\}$ 射影元 $\{e_m^n\}$（$\in C(\Omega)$）をとれる。

(1)　$y_n (c_m^n)^2$ は射影元で $\leq e e_n$，　$y_n (c_m^n)^2 = e_m^n$，

(2)　$y_n \geq (1/m) e_m^n$ 且，$y_n \leq (1/m)(e - e_m^n)$（$(e - e_m^n) e_n$ で），

(3)　$c_1^n \leq c_2^n \leq c_3^n \leq \cdots$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）$c_{m-1}^n (c_m^n - c_{m-1}^n) = 0$

$m = 2, 3, 4, \cdots$　$n = 1, 2, 3, \cdots$，

(4)　$c_m^1 \leq c_m^2 \leq c_m^3 \leq \cdots$　$m = 1, 2, 3, \cdots$　$c_m^k e_k = c_m^n e_k$ $(k<n)$

$m = 1, 2, 3, \cdots$，

(5)　$e_m^j e_i = e_m^i$　$j > i$，　$m = 1, 2, 3, \cdots$。

何故ならば，$\{\omega ; \omega \in \Omega_i , y_i(\omega) > 1/m\}^-$ の特性函数を e_m^i とし，$c_m^i(\omega) = (1/y_i(\omega))^{1/2} e_m^i(\omega)$ とすると $\{c_m^i , e_m^i\}$ はすべての要求を満す。又注意 2.2. から

$$(\mathbf{X}[c_m^n, 1])^*(\mathbf{X}[c_m^n, 1]) = [c_m^n, 1]\mathbf{X}^*\mathbf{X}[c_m^n, 1]$$

$$= [y_i, e_i][(c_m^n)^2, 1]$$

$$= [y_i, e_i][e_n, 1][(c_m^n)^2, 1]$$

$$= [y_n e_n, 1][(c_m^n)^2, 1]$$

$$= [y_n (c_m^n)^2, 1]$$

$$= [e_m^n, 1],$$

従って，定理4.3.からM_{pi}の元w_m^nがあって$\mathbf{X}[c_m^n, 1] = [w_m^n, 1]$，$w_m^{n*} w_m^n = e_m^n$と書ける。又

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^*[1-f, 1] = i(1+[v,1])(1-[v,1])^{-1}(1-[f,1])$$

$$= i(1+[v,1])(1-[v,1])^{-1}$$

$$= 0$$

より$[f,1]\mathbf{X} = \mathbf{X}$であり　$w_m^n w_m^{n*} = f_m^n$ $(\in M_p)$とおけば，

$$[f,1][f_m^n, 1] = [f,1]\mathbf{X}[(c_m^n)^2, 1]\mathbf{X}^*$$

$$= \mathbf{X}[(c_m^n)^2, 1]\mathbf{X}^*$$

$$= [w_m^n, 1][w_m^n, 1]^*$$

$$= [f_m^n, 1],$$

且

$$[f_{m-1}^n f_m^n, 1] = \mathbf{X}[(c_{m-1}^n)^2, 1]\mathbf{X}^*\mathbf{X}[(c_m^n)^2, 1]\mathbf{X}^*$$

$$= \mathbf{X}[(c_{m-1}^n)^2, 1][e_m^n, 1]\mathbf{X}^*$$

$$= \mathbf{X}[(c_{m-1}^n)^2, 1]\mathbf{X}^*$$

$$= [f_{m-1}^n, 1],$$

より我々は，$f^n_{m-1} \leqq f^n_m \leqq f$ を得る。$f_n = l.u.b.\{f^n_m, m \geqq 1\}$ とし，$(C^i_m)^2 \leqq (C^j_m)^2$ $(i<j)$ に注意して $f_n \uparrow$ を得る。又 $f' = l.u.b.\{f_n, n \geqq 1\}$ $(\leqq f)$ とする。$v^n_m = w^n_m(e^n_m - e^n_{m-1})$ $e^n_0 \equiv e_0 \equiv v^n_0 \equiv w^n_0 \equiv 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とし $[w^n_m e^n_{m-1}, 1] = \mathbf{X}[C^n_m e^n_{m-1}, 1] = \mathbf{X}[C^n_{m-1}, 1] = [w^n_{m-1}, 1]$ に注意して，

$$(v^n_m)^*(v^n_m) = e^n_m - e^n_{m-1}$$

$$\begin{aligned}(v^n_m)(v^n_m)^* &= w^n_m(e^n_m - e^n_{m-1})(w^n_m)^* \\ &= w^n_m e^n_m - w^n_m e^n_{m-1} w^{n*}_m \\ &= f^n_m - f^n_{m-1}\text{。}\end{aligned}$$

[4] 補題 20 からある M_{pi} の元 w_n が存在して，

$$w_n^* w_n = e_n e \ , \quad w_n w_n^* = f_n$$

$$w_n(e^n_m - e^n_{m-1}) = v^n_m$$

$$w_n^*(f^n_m - f^n_{m-1}) = v^{n*}_m$$

そして，

$$w_n(e^n_m - e^n_{m-1}) = w^n_m(e^n_m - e^n_{m-1})\text{。}$$

又 $w^n_m e_{n-1} e = w^{n-1}_m$ に注意して

$$\begin{aligned}w_n(e^{n-1}_m - e^{n-1}_{m-1}) &= w^n_m(e^{n-1}_m - e^{n-1}_{m-1}) \quad (e^n_m - e^n_{m-1} \geqq e^{n-1}_m - e^{n-1}_{m-1}) \\ &= w^{n-1}_m(e^{n-1}_m - e^{n-1}_{m-1}) \\ &= w_{n-1}(e^{n-1}_m - e^{n-1}_{m-1}),\end{aligned}$$

従って，[3]，補題 2.2. から $w_n e_{n-1} e = w_{n-1} e_{n-1} e$ を得る。又 $v_n = w_n(e_n - e_{n-1})e$ とすると，

$$v_n^* v_n = (e_n - e_{n-1})e,$$

$$\begin{aligned} v_n v_n^* &= w_n(e_n - e_{n-1})e w_n^* \\ &= w_n e_n w_n^* - w_n e_{n-1} e w_n^* \\ &= f_n - f_{n-1}. \end{aligned}$$

ふたたび [4], 補題20 から M_{pi} の元 w があって,

$$w^* w = \text{l.u.b.}\{e_n e,\ n \geqq 1\} = e$$

$$w w^* = \text{l.u.b.}\{f_n,\ n \geqq 1\} = f'$$

$$w(e_n - e_{n-1})e = w_n(e_n - e_{n-1})e, \quad (e_0 \equiv 0)$$

且,

$$w^*(f_n - f_{n-1}) = w_n^*(f_n - f_{n-1}) \qquad (f_0 \equiv 0)。$$

数学的帰納法から $w e_n e = w_n e_n e$ である。次に $\mathbf{X} = [w,1]|\mathbf{X}|$ を示そう。補題3.5. から $(\mathbf{X} - [w,1]|\mathbf{X}|)[e_n,1] = 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を証明すれば充分である。又

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} - [w,1]|\mathbf{X}|)[e_n,1] &= (\mathbf{X} - [w_m^n,1]|\mathbf{X}| + [w_m^n,1]|\mathbf{X}| - [w,1]|\mathbf{X}|)[e_n,1] \\ &= (\mathbf{X} - [w_m^n,1]|\mathbf{X}|)[e_n,1] + [w_m^n - w,1]|\mathbf{X}|[e_n,1] \\ &= \mathbf{X}([e,1] - [C_m^n,1]|\mathbf{X}|)[e_n,1] \end{aligned}$$

$$+ [w_m^n - w_n,1]|\mathbf{X}|[e_n,1] \qquad (\because |\mathbf{X}|[e_n,1] = [e_n,1]|\mathbf{X}|,\ [w_m^n,1] = \mathbf{X}[C_m^n,1])$$

$$= \mathbf{X}[e - e_m^n,1][e_n,1] + [w_m^n - w_n,1]|\mathbf{X}|[e_n,1]。$$

故に

$$\{\mathbf{X}[e - e_m^n,1][e_n,1]\}^*\{\mathbf{X}[e - e_m^n,1][e_n,1]\}$$

$$= [e - e_m^n,1][e_n,1]\mathbf{X}^*\mathbf{X}[e - e_m^n,1]$$

$$= X^*X\,[e_n e - e^n_m, 1]$$

$$= [y_n(e_n e - e^n_m), 1]$$

又 $w_n e^n_m = w^n_m e^n_m = w^n_m$ に注意して，

$$\{[w^n_m - w_n, 1]|X|[e_n, 1]\}^*\{[w^n_m - w_n, 1]|X|[e_n, 1]\}$$

$$= [e_n, 1]|X|[e_n - e^n_m, 1]|X|$$

$$= X^*X\,[e_n e - e^n_m, 1]\text{。}$$

従って定理4.3.と(2)から $x_{(m)}$, $y_{(m)}$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$がMの中に存在して $(X - [w,1]|X|)[e_n, 1] = [x_{(m)} + y_{(m)}, 1]$，$\|x_{(m)}\| \leqq \sqrt{1/m}$，$\|y_{(m)}\| \leqq \sqrt{1/m}$ とできるから $X = [w,1]|X|$が示された。次に $f = f'$を証明しよう。X^*X に対してやったのと同様にXX^* に対して$\{c^{n\prime}_m, e^{n\prime}_m\}$を(1)−(5)を満すようにとれるから $f'e^{n\prime}_m = e^{n\prime}_m$ を示せばよい。ところで $XX^*f' = XX^*$ であるから上の事は，明らかである。従って $f' \geqq f$，すなわち $f = f'$ がでてくる。

証明終り。

定理5.4 $\mathcal{C}$ は Baer*-環である。すなわち $S \subset \mathcal{C}$をかってな部分集合とすると，Sの右-annihilator は$[e,1]\mathcal{C}$ $(e \in M_p)$の形をしている。

証明）定理5.3.の証明におけるものと同じ記号を使用するものとする。$X \in S$ とすると $XX^*(1 - [e,1]) = 0$，すなわち，$X = X[e,1]$である。従ってXの右-annihilator は $(1 - [e,1])\mathcal{C}$を含む。逆に $XY = 0$ とすると $X^*XY = 0$，$[c^n_m, 1]X^*XY = 0$,

$[e_m^n, 1]yy^* = 0$, yy^*に対して條件(1)-(5)を満すような族$\{d_m^n, g_m^n, g$, 但し $d_m^n \geq 0$, g_m^n, $g \in M_p\}$をとる。すると $e_m^n g_{m'}^{n'} = 0$ $(m', n' = 1, 2, 3, \cdots)$ すなわち $e \leqq 1 - g$ であり $(1 - [e, 1])y = (1 - [e, 1])[g, 1]y = [g, 1]y = y$ となり $y \in (1 - [e, 1])C$。
又Sの右-annihilatorは$x \in S$の右-annihilatorの共通部分であるから簡単な計算からSの右-annihilatorは, ある$[e, 1] \in C$ $(e \in M_p)$に対して $[e, 1]C$ の形である。

証明終り。

注意 5.2. 上の定理により定理5.3.の $e(f)$ はXの右(左)-射影元であり任意の$x \in C$に対して, $RP(X) \sim LP(X)$ が成立する。なおMでの極分解は, Ti-Yen [13] によって得られている。

§ ∞. あとがき

以上の結果から我々は半有限型のW^*-環に於いて半有限トレースによる非可換積分論を" space free "に構成することができることを注意しておこう。[9]

以上。

References

[1] S.K. Berberian, Regular ring of a finite AW*-algebra, Ann. of Math., 65(1957), 224-240.

[2] J. Dixmier, Sur certains espaces considèrès par M.H. Stone, Summa Brasil. Math., 2(1951), 151-182.

[3] I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. of Math., 53(1951), 235-249.

[4] I. Kaplansky, Algebras of type I, Ann. of Math., 56(1952), 460-472.

[5] I. Kaplansky, Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, Ann. of Math., 61(1955), 524-541.

[6] I. Kaplansky, Rings of operators (Note prepared by S.K. Berberian with an appendix by R. Blattner), Univ. of Chicago Notes, 1955.

[7] T. Ogasawara and K. Yoshinaga, A non-commutative thoery of integration for operators, J. Sci.Hiroshima, 18(1955), 311-347.

[8] K. Saitô, On the algebra of measurable operators for a general AW*-algebra, Tôhoku Math. J., 21(1969), 249-270.

[9] K. Saitô, On the algebra of measurable operators for a general AW*-algebra II, to appear.

[10] S. Sakai, The theory of W*-algebras, Mimeographed note, Yale Univ., 1962.

[11] I.E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math., 57(1953), 401-457.

[12] J. von Neumann, Continuous geometry, Princeton, 1960.

[13] Ti Yen, Trace on finite AW*-algebras, Duke Math.J., 22(1955), 207-222.