

*Infinite tensor products of von Neumann algebras*

東大 理 中 神 祥 臣

§1. 序

無限次元空間上の測度の問題は古くは変分学, 確率論等の要求から始められたが最近ではその他にも場の理論に現われる表現の問題や Feynmann 積分の基礎付け等からも要請が起っている. 関数解析の立場からそれを扱う方法は主として次の三つのものが考えられる. Gelfand や Minlos 等による cylindrical measure を可算加法的な測度にかえす議論, Segal や Gross 等による weak distribution の方法, それに Friedrichs や Shapiro 等による汎関数の積分であるが, 測度を問題にする限りこれらとは別に Choquet 等による方法もある. また Gelfand 等と同一の流れと考えられるものに今春の関数解析国際会議で講演のあった Schwartz の仕事があり, 数年前に彼により Paris 大学で行われた講義録も東大から出されている.

以上はお話であり本論とは直接関係はないが、上で行われた仕事の中の着想を念頭に置きながら von Neumann algebra の問題を考え、逆にそこで得られた結果から測度の様子を調べてみようというのが著者の意図であり、それはまた同時に finite von Neumann algebra に新たな視点を与えることになるのではないかとはいくつかの期待が含まれている。未だこれらの目的が果たされた訳ではないが取り敢えず、以上のような主旨で話を始めることにする。必然的に最初に測度の存在の問題が起ってくる。それを von Neumann algebra の方で言えば finite von Neumann algebra の無限テンソル積上に果して finite normal trace が存在するかどうか、つまり finite part があるかどうかという問題になるが、その扱いを容易ならしめるために無限テンソル積の各成分で与えられた finite normal trace の無限テンソル積が再び finite normal に成るための条件はなんだろうかという向に答えるべくその様子を調べて行くことにする。

## §2. 定義と結果

$I$  を ~~有限~~無限濃度を持つ添字集合とし、各  $i \in I$  に対し non-trivial なヒルベルト空間  $\mathcal{H}_i$  とその上の von Neumann algebra  $\mathcal{O}_i$  が与えられているものとする。  $\mathcal{H}_i$  の元を

$x_i, y_i, \dots$  などで表わす.

定義1. Co-sequence  $(x_i)$  と  $(y_i)$  は

$$\sum |(x_i, y_i) - 1| < +\infty$$

となるとき equivalent, また或るユニタリ作用素  $U_i \in \mathcal{O}_i'$  が存在し

$$\sum |(U_i x_i, y_i)| < +\infty$$

となるとき  $(\mathcal{O}_i)$  に関し weakly equivalent と云い, それぞれ  $(x_i) \approx (y_i)$ ,  $(x_i) \underset{\alpha}{\sim} (y_i)$  で表わす.

定義2. Co-sequence 全体の集合を関係  $\approx$  又は  $\underset{\alpha}{\sim}$  で類別して得られる集合をそれぞれ  $\Gamma, \Gamma(\alpha)$ , その元を  $\square, \square(\alpha)$  と表わす.

定義3.  $(x_i) \in \square$  又は  $(x_i) \in \square(\alpha)$  に対応する  $\otimes f_i$  のベクトル  $\otimes x_i$  から生成される  $\otimes f_i$  の部分空間をそれぞれ  $\otimes^\square f_i, \otimes^{\square(\alpha)} f_i$  と表わし,  $\otimes f_i$  からそれぞれの部分空間上への射影作用素を  $P_\square, P_{\square(\alpha)}$  と表わす.

補助定理1.  $U_i$  を  $f_i$  上のユニタリ作用素とすると任意な Co-sequence  $(x_i)$  に対して

$$U(\otimes x_i) = \otimes U_i x_i$$

となるようなユニタリ作用素  $U$  が  $\otimes f_i$  上に一意に存在する. これを  $\otimes U_i$  と表わす.

補助定理2.  $U_i$  は  $\mathcal{O}_i'$  のユニタリ作用素,  $\square \in \Gamma, \square(\alpha) \in \Gamma(\alpha)$

とすると,  $\otimes U_i, P_i, P_{E(\omega)}$  は  $(\otimes \mathcal{O}_i)'$  の元である.

補助定理3. 任意な  $\square, \square' \in \Gamma$  に対して

$$P_{\square'} (\otimes \mathcal{O}_i)' P_{\square} = P_{\square'} (\otimes \mathcal{O}_i) P_{\square}$$

となる.

定理1.  $\otimes \mathcal{O}_i$  上の作用素  $A$  が  $A \in \otimes \mathcal{O}_i$  となるための必要十分条件は  $A$  があらゆる  $\otimes U_i$  や  $P_i$  と可換になることである. ただし  $U_i$  は  $\mathcal{O}_i'$  のユニタリ作用素,  $\square \in \Gamma$  である.

系1.  $\square \subset E(\omega)$  のとき,  $P_{E(\omega)}$  は  $P_i$  の central carrier に成っている.

定理2.  $A_i$  は非負であるが0ではない  $\mathcal{O}_i$  の作用素とする. このとき任意な Co-sequence  $(x_i)$  に対し

$$A(\otimes x_i) = \otimes A_i x_i$$

となるような非負でしかも0でない  $\otimes \mathcal{O}_i$  の作用素  $A$  が存在するための必要十分条件は

$$\sum \| \|A_i\| - 1 \| < +\infty$$

でしかも高々可算個の添字を除いて  $A_i$  は  $\square$  有値1を持っていることである. このときの  $A$  を  $\otimes A_i$  と表わす.

系2.  $E_i$  を  $\mathcal{O}_i$  の射影作用素とする.  $\otimes E_i, E_i$  の値域となつていゝ  $\otimes \mathcal{O}_i, \mathcal{O}_i$  の部分空間をそれぞれ  $\mathcal{h}, \mathcal{h}_i$  とすると,  $\mathcal{h} = \otimes \mathcal{h}_i$  となる.

定理3.  $A_i$  は0でない  $\mathcal{O}_i$  の作用素とする. もし

$$\sum \|1 - A_i\| < +\infty$$

ならば,  $\otimes \mathcal{O}_i$  の 0 でない作用素  $A$  が存在して, 任意な Co-sequence  $(x_i)$  に対して

$$A(\otimes x_i) = \otimes A_i x_i$$

となる. これを  $\otimes A_i$  と表わす.

補助定理 4. 任意な  $(x_i) \in \Gamma$ ,  $\Gamma \subset \Gamma(\mathcal{O}_i)$  に対して

$$E_{\otimes x_i}^{\otimes \mathcal{O}_i} = (\otimes E_{x_i}^{\mathcal{O}_i}) P_{\Gamma} \quad , \quad E_{\otimes x_i}^{(\otimes \mathcal{O}_i)'} = (\otimes E_{x_i}^{\mathcal{O}_i'}) P_{\Gamma(\mathcal{O}_i)}$$

となる.

定義 4.  $\varphi$  を或る von Neumann algebra 上で定義された normal な正值線形汎関数とする.

$$\gamma = \sup \{ \|x_1\| : \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{x_i}, \|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \dots \}$$

もし  $\gamma = \omega_{x_1}(1)$  ならば  $x_1$  を  $\varphi$  の characteristic ベクトルとしよう.

補助定理 5.  $\mathcal{N}$  を coupling operator  $C$  を持つ finite von Neumann algebra,  $\varphi$  をその上の  $\varphi(1) = 1$  なる finite normal trace とすれば, characteristic ベクトル  $x$  が存在し

$$\|x\|^2 = 1 - \varphi((1-C)^+)$$

となる.

定理 4.  $\mathcal{O}_i$  を coupling operator  $C_i$  を持つ finite von Neumann algebra とする.

(i)  $\varphi_i$  を  $\mathcal{O}_i$  上の  $\varphi_i(1) = 1$  なる normal trace と

したとき, もし

$$\sum \varphi_i((1-C_i)^+) < +\infty$$

ならば,  $\otimes \mathcal{O}_i$  上には normal trace  $\varphi$  が唯一存在して,  
 $I$  の任意な有限部分集合  $K$  に対し

$$\varphi((\otimes_K A_i) \otimes (\otimes_{K^c} 1)) = \prod_K \varphi_i(A_i)$$

となる. このときの  $\varphi$  を  $\otimes \varphi_i$  で表わす.

(ii)  $\varphi$  を  $\otimes \mathcal{O}_i$  上の  $\varphi(1)=1$  なる normal trace とし  
 $\varphi_i$  を  $\varphi$  の  $\mathcal{O}_i \otimes (\otimes_{K^c} C_k)$  上への制限に対応する  $\mathcal{O}_i$  上の  
 normal trace とする. もし  $I$  の任意な有限部分集合  $K$  に  
 対して

$$\varphi((\otimes_K A_i) \otimes (\otimes_{K^c} 1)) = \prod_K \varphi_i(A_i)$$

となるならば,

$$\sum \varphi_i((1-C_i)^+) < +\infty$$

となる.

系3. 定理2, 3, 4と同じ仮定の下で

$$(\otimes \varphi_i)(\otimes A_i) = \prod \varphi_i(A_i)$$

となる.

系4.  $\mathcal{O}_i$  を coupling operator  $C_i$  を持つ finite von  
 Neumann algebra とする.  $\mathcal{O}_i$  上の  $\varphi_i(1)=1$  なる normal  
 trace  $\varphi_i$  の carrier を  $G_i$ , その characteristic  $\chi_i$  を  $\chi_i$   
 とする. このとき  $\otimes \varphi_i$  の carrier は  $(\otimes G_i) P_{E(\omega)}$

となる。ただし  $(\alpha) \in \Gamma(\alpha)$  である。

### §3. 補説

§2の詳しい説明は [3] を見ていただくことにして、上の各命題に少し説明を加える。

定義1は von Neumann [5] の weak equivalence を拡張したものである。これは系1と4で有用になる。

補助定理3は畠田 [4] の commutant はテンソル積を保存するという定理を使っているがその証明法は荒木・Woods [1] と同様の方法によっている。

定理1と系1は von Neumann [5] で  $\mathcal{L}(\otimes f_i)$  に対して得られた定理区、 $\mathcal{X}$  の一般化になっている。

定理2と3は 0-1法則の代数的な拡張とも考えられ、その様子は系3を合わせ考えると一増明瞭になる。

定義4は測度の Fourier 変換、つまり特性関数を念頭に導入したものである。

定理4が我々が目標とした結果である。

系4は定理4で得られる trace の無限テンソル積の carrier の計算であり、これを使うことにより  $\otimes \mathcal{O}_i$  の finite part がはっきりするが、 $P_{\Gamma(\alpha)}$  自体がわかり易いとは云えない。他の  $\Gamma(\alpha)' \in \Gamma(\alpha)$  (≠  $\Gamma(\alpha)$ ) に対し、 $\otimes^{\Gamma(\alpha)'} f_i$  上の  $\otimes \mathcal{O}_i$

の様子は余りわかっていない。これを調べることは  $\otimes O_c$  の構造を調べる上で非常に重要であるが、可換の場合に無限次元ベクトル空間上で得られる測度の carrier の計算の難しさから推して、困難な問題の一つであると思われる。

今後の問題の設定の仕方にも例えは上に述べたように  $\otimes O_c$  の finite part と purely infinite な part をどのようにつかま之しかもそれをどのように分類するかとか、これと関連してテンソル積  $\otimes O_c$  から見てねじれの入った trace はどのようにしたらつかまえられるかなどといろいろあると思うが、その際無限テンソル積  $\otimes O_c$  の解釈の仕方が問題になる。そこで例えば添字集合  $I$  を 3次元ユークリッド空間の格子点と見なし空間的広がりを持たせたり、 $I$  を抽象的に局所コンパクト群と見なしその上で交換群を考えたり、また各  $O_c$  上に時間の径数を持つ準同形写像  $\psi_c(t)$  を入れて  $\psi(t) = \otimes \psi_c(t)$  をうまく定義したりすれば、我々の追求すべき問題もかなり具体性を帯びてくるものと思われる。

#### §4. 補遺.

日本でも無限次元ベクトル空間上の測度に興味を持って多くの人がいる。例之は、山崎(梅村) [measure on infinite dimensional vector spaces. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1 (1965), 1-47]



佐藤 [Gaussian measures on a Banach space and abstract Wiener  
 measure. J. Math. Soc. Japan, to appear] 等であり, またこ  
 の種の測度をもとにして定常過程や調和解析の仕事も成され  
 ている, 飛田・池田 [Analysis on Hilbert space arising from the  
 reproducing kernel and multiple Wiener integral. Fifth Berkeley  
 Symp. II, Univ. Calif. Press (1967), 117-144], 飛田 [Stationary  
 stochastic processes. White noise. Lecture note, Princeton  
 Univ., 1967], 飛田・久保・野本・吉沢 [On projective  
 invariance of Brownian motion. Publ. RIMS, Kyoto Univ.,  
 4 (1968), 595-609], 佐藤 [A family of one parameter sub-  
 group of  $O(S_r)$  arising from the variable change of white  
 noise. to appear], 特に最後の二つは無限次元回転群を  
 扱ったものであり, その中で有限次元回転群の極限として得  
 られないものまで扱っているのが, この結果と, 自己共役作  
 用素のスペクトルを扱う際に  $\square$  有関数の空間をヒルベルト空  
 間から一般関数の空間まで拡張することにより連続スペクト  
 ルが  $\square$  有値としてつかまえられる事実とを考慮することによ  
 り von Neumann algebra に新たな情報が提供されないで  
 あらうか? 特に畠田 [4] の中に見られる多くの超関数論  
 的な手法は核型空間的な取り扱いが作用素環としても有用で  
 あることを示しているような気がする.

## 参考文献

- [1] ARAKI, H. AND E. J. WOODS, A classification of factors. Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 3 (1968), 51-130.
- [2] DIXMIER, J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [3] NAKAGAMI, Y., Infinite tensor products of von Neumann algebras. Kodai Math. Sem. Rep. to appear.
- [4] TOMITA, M., Standard forms of von Neumann algebras. 1-80. preprint.
- [5] VON NEUMANN, J., On infinite direct products. Compositio Math. 6 (1938), 1-77.

[3] の中での誤りを御指摘下さった梅垣先生, 竹之内先生を始めとする皆様方に心から感謝致します。