

Wiener - Hermite 展開

関学大 理 今 村 勤

§ 1. ま え が き

乱流を速度場自身が random function である様に統計的に理想化することが出来るであろう。この様な random function を扱うのに有用な方法として Wiener - Hermite 展開^{1)~3)}がある。即ち未知の random function を ideal random function の Hermite 多項式に展開する方法である。

この方法の乱流への応用はいろいろなされているがその利点としては、^{4)~8)}

- (1) Gauss に近い random function を扱うのに適当であること。
- (2) スペクトル等に正定符号の値を与えること。
- (3) 近似の進め方が機械的に出来ること。
- (4) 展開を有限項できって展開係数に対する方程式系を作ると他の近似 (例えば quasi-linear 近似) と同形の方程式系を与えることがよくあること。

などがあげられる。ここでは主としてその応用に必要なテクニックに重点を置いてのべることにする。時間的に変る ideal random function を用いた展開については講演内容を少し補足した。

§ 2. Wiener - Hermite 展開における operator calculus³⁾

ここでは Wiener 等の形式でなく、いく分数学的厳密性を犠牲にしても、物理的応用に都合のよい形で Wiener - Hermite 展開における計算法を説明する。

今一つの random variable X があるとき、 a を ideal random variable、 H_n を Hermite 函数として

$$X = \sum_n C_n H_n(a)$$

の形に展開出来ることが知られている。ideal random variable とは自乗平均が 1 である様な平均値が 0 の Gauss 分布をする random variable である。一旦 a をきめると C_n は一意的に

きまり、 X のすべてのmomentは C_n でかける。

変数 $\{X_i\}$ が N 個あれば、これらを表はすのに N 個の互ひに独立なideal random variables $\{a_i\}$ を用いて

$$X_i = \sum_{(n_j)} C_i^{(n_j)} H_{(n_j)}(a_1 a_2 \dots a_N)$$

の如く表はせる。 $\sum_{(n_j)}$ は $n_1 n_2 \dots n_N$ のすべての組に対しての和であり、

$$H_{(n_j)} = \prod_j H_{n_j}(a_j)$$

は多変数のHermitte函数である。

乱流を初期速度場のrandomnessが時間と共にどう変化するかという様に理解すると初期速度場のrandomnessを表はすのに $3 \times \infty^3$ 個のideal random variables即ち3つのideal random functions $a_j(\vec{x})$ を用いて展開出来るであらう。この様に自由度を連続無限個に拡張するためには次にのべるoperator形式が最適と考えられる。

今operator C, D を次の様に導入する。

$$C = \frac{a}{2} - \frac{\partial}{\partial a}, \quad D = \frac{a}{2} + \frac{\partial}{\partial a}$$

当然 $a = C + D$ であり、 $[C, D] = CD - DC = -1$ の交換関係を充す。この交換関係は $N = CD$ をnumber operatorとして C, D に夫々creation annihilation operatorとしての性質を与える。 C, D を用いて H_n は

$$H_n(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C^{n-k} D^k =: (C+D)^n :$$

の如く表はされる。ここに $:$ はWickにより導入された⁹⁾記号で中のcreation operatorの左におくという約束を示す。 H_n のこの表現の証明は H_0 が一致し同じ漸化式を充すことを示すことにより容易に得られる。さらに

$$h_0 = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{a^2}{4}}, \quad C h_n = h_{n+1}$$

で $set\{h_i\}$ を定義すると、これらは調和振動子の固有状態の組を与える。或いは h_0 を粒子のない状態vacuum h_n を n 個粒子のある状態と解釈出来る。実際これを裏づける

$$D h_0 = 0, \quad D h_n = n h_{n-1}, \quad N h_n = n h_n$$

が容易に示される。 a の函数 $X(a)$ の統計的平均は

$$\langle X(a) \rangle = \int X(a) \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{a^2}{2}} da = \int h_0 X(a) h_0 da$$

とかけるので, operator $X(a)$ の h_0 状態での期待値に他ならない。

$$\langle H_{n_1}(a) H_{n_2}(a) \cdots H_{n_r}(a) \rangle = \langle : (C+D)^{n_1} : : (C+D)^{n_2} : \cdots : (C+D)^{n_r} : \rangle$$

の計算を h_0 での期待値として行くと, どれかの H_n 中の C で作られた粒子がそれより左にある他の H 中の D で消されなければ 0 になることから計算規則としては

- (1) H_{n_i} に対し n_i 個の点をかく
- (2) すべての点を 2 つずつ pair にする。このとき同じ H 中の 2 点は pair を作ってはならない。
 $:$ の中では C が左にあるためその中で作られた粒子を自分の中の D で消せないからである。
- (3) その pairing の組の可能な数が統計的平均値である。

例として $\langle H_1 H_1 H_2 \rangle$ をとると, 上の手続きは,

(1) $\cdot \cdot :$

(2) $\cdot \cdot \cdot \cdot :$ $\cdot \cdot \cdot \cdot :$

(3) 組の数は上の 2 つ故 $\langle H_1 H_1 H_2 \rangle = 2$ 。

これを N 変数のときに拡張するのは, N 個の粒子系を扱う operator の組 $\{C_i, D_i\}$

$$C_i = \frac{a_i}{2} - \frac{\partial}{\partial a_i}, \quad D_i = \frac{a_i}{2} + \frac{\partial}{\partial a_i}$$

を導入すれば $a_i = C_i + D_i$, $[C_i, D_j] = -\delta_{ij}$, $[C_i, C_j] = [D_i, D_j] = 0$ 等が充され,

$$H_{(n_j)} = \prod_{j=1}^N : (C_j + D_j)^{n_j} : = : \prod_{j=1}^N (C_j + D_j)^{n_j} :$$

とかけるから

$$X_i = \sum_{(n_j)} C_i^{(n_j)} H_{(n_j)} = \sum_m \sum_{(\nu_m)} C_i^{(\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m)} H_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}$$

$$H_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m} = : \prod_{j=1}^m (C_{\nu_j} + D_{\nu_j}) :$$

の様にくみかえられる。従って $\langle H_{\nu_1}^{(1)} \cdots \nu_{m_1}^{(1)} H_{\nu_1}^{(2)} \cdots \nu_{m_2}^{(2)} \cdots H_{\nu_1}^{(r)} \cdots \nu_{m_r}^{(r)} \rangle$ の計算では各 H に夫々 m_j 個の点をかき, 一変数のときと同様の pairing をやる。但し各 pair に対し $\delta_{\nu_j}^{(l)} \nu_k^{(m)}$ の様な factor をつける。なぜなら同種の粒子を消さなければならないからである。

連続無限個の変数に拡張するには, 連続無限個の調和振動子を持った系, 即ち自由場の量子論に対応

する creation, annihilation operators の集りを用意すればよい。これを速度場 $u_j(\vec{x})$

について説明すると, 3つの ideal random functions $a_j(\vec{x})$ を導入して

$$u_j(\vec{x}) = K_j^{(0)}(\vec{x}) + \sum_{j_1} \int d\vec{x}_1 K_{jj_1}^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}_1) H_{j_1}(\vec{x}_1) + \sum_{j_1 j_2} \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 K_{jj_1 j_2}^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2) H_{j_1 j_2}^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \dots$$

の如く展開される。ここに $K^{(n)}$ は普通の函数であり,

$$H_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = : a_{j_1}(\vec{x}_1) a_{j_2}(\vec{x}_2) \dots a_{j_n}(\vec{x}_n) :$$

とかけ, $a_j(\vec{x})$ は ideal random functions で各点で独立の Gauss 分布をし,

$$\langle a_j(\vec{x}) a_k(\vec{y}) \rangle = \delta_{jk} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

を充す。 $a_j(\vec{x})$ の汎函数の統計的平均をとるには

$$a_j(\vec{x}) = C_j(\vec{x}) + D_j(\vec{x})$$

$$[C_j(\vec{x}), D_k(\vec{y})] = -\delta_{jk} \delta(\vec{x} - \vec{y}), [C_j(\vec{x}), C_k(\vec{y})] = [D_j(\vec{x}), D_k(\vec{y})] = 0$$

を導入し, $D_j(\vec{x}) | \rangle = 0$ を充す状態 (vacuum) で期待値をとればよい。特に $K^{(n)}$ の方程式を得るために必要な

$$\langle H_{j_{11} j_{12} \dots j_{1n_1}}^{(n_1)}(\vec{x}_{11}, \vec{x}_{12}, \dots, \vec{x}_{1n_1}), H_{j_{21} j_{22} \dots j_{2n_2}}^{(n_2)}(\vec{x}_{21}, \vec{x}_{22}, \dots, \vec{x}_{2n_2}) \dots \rangle$$

の計算法の手続きを示すと,

- (1) 各 $H^{(n_j)}$ に対し n_j 個の点 $(j_1)(j_2) \dots (j_{n_j})$ をかく
- (2) 各点を 2 つずつ pair にするすべての図をかく, 但し同じ H に属する 2 点は pairing しない。
pair をとれずに点が残るときは 0 である。例へば $\sum n_j = \text{odd}$ なら 0 である。
- (3) 各 pair に付して δ 函数を対応さす。
- (4) すべての寄与の和をとる。

例として $\langle H_{j_{11}}^{(1)}(\vec{x}_{11}) H_{j_{21}}^{(1)}(\vec{x}_{21}) H_{j_{31} j_{32}}^{(2)}(\vec{x}_{31}, \vec{x}_{32}) \rangle$ をとらう。

(1) $(11) \cdot \begin{matrix} (21) \\ \cdot (31) \\ \cdot (32) \end{matrix}$

(2) (a) $(11) \cdot \begin{matrix} (21) \\ \cdot (31) \\ \cdot (32) \end{matrix}$ (b) $(11) \cdot \begin{matrix} (31) \\ \cdot (21) \\ \cdot (32) \end{matrix}$

(3) (a) $\delta_{j_{11} j_{32}} \delta(\vec{x}_{11} - \vec{x}_{32}) \delta_{j_{21} j_{31}} \delta(\vec{x}_{21} - \vec{x}_{31})$

$$(b) \delta_{j_{11} j_{31}} \delta(\vec{x}_{11} - \vec{x}_{31}) \delta_{j_{21} j_{32}} \delta(\vec{x}_{21} - \vec{x}_{32})$$

$$(4) \langle \rangle = \delta_{j_{11} j_{32}} \delta(\vec{x}_{11} - \vec{x}_{32}) \delta_{j_{21} j_{31}} \delta(\vec{x}_{21} - \vec{x}_{31}) + \delta_{j_{11} j_{31}} \delta(\vec{x}_{11} - \vec{x}_{31}) \\ \delta_{j_{21} j_{32}} \delta(\vec{x}_{21} - \vec{x}_{32})$$

の様に計算される。

特に空間の一様性があるときには Fourier 変換で話をすると便利である。このとき $K^{(0)} = 0$ で

$$U_i(\vec{x}) = \int d\vec{x}' \sum_j K_{ij}^{(1)}(\vec{x} - \vec{x}') H_j^{(1)}(\vec{x}') + \int d\vec{x}' d\vec{x}'' \sum_{jk} K_{ijk}^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x} - \vec{x}'') \\ H_{jk}^{(2)}(\vec{x}', \vec{x}'') + \dots$$

の様にかけるから U, K, H の Fourier 変換を夫々 $\tilde{U} \tilde{K} \tilde{H}$ とすると,

$$\tilde{U}_i(\vec{k}) = \sum_j \tilde{K}_{ij}^{(1)}(\vec{k}) \tilde{H}_j^{(1)}(\vec{k}) + \int d\vec{k}' \sum_{jk} \tilde{K}_{ijk}^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}', \vec{k}') \tilde{H}_{jk}^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}', \vec{k}'') +$$

となり, \tilde{H}_j については

$$\langle \tilde{H}_k^{(1)}(\vec{k}) \tilde{H}_l^{(1)}(\vec{l}) \rangle = \delta_{kl} \delta(\vec{k} + \vec{l})$$

等が成立する。

以上の計算法を用うることにより, $U_j(\vec{x})$ が例えば Navier-Stokes 方程式を充すと仮定して $K^{(n)}$ に対する方程式系を得るのは容易である。即ち方程式に展開を代入し平均をとると, $\frac{\partial K^{(0)}}{\partial t}$ を含む方程式, $H^{(1)}$ をかけて平均をとると $\frac{\partial K^{(1)}}{\partial t}$ を含む方程式という様に無限個の $K^{(n)}$ に対して無限個の連立方程式が得られる。これを実際にとり扱うには有限個で切って近似しなければならない。本来この展開は Gauss 分布, その補正項という形の展開になっているために Gauss に近い現象を扱うのに便利であると期待された。しかし次の様な困難が知られるに致った。非圧縮性非粘性流体に対して Hopf の解が知られている。¹⁰⁾ この解は Gauss 分布をしているのでこれに対応して

$$U_i(\vec{k}, t) = \sum_j K_{ij}^{(1)}(\vec{k}, t) H_j^{(1)}(\vec{k})$$

の形の解を求めようとしても求まらない。^{*} さらに, 3-mode-model 即ち $\dot{X}_i = A_i X_j X_k$ ($\sum_{i=1}^3 A_i = 0$) (i, j, k cyclic) のある解として Gauss 分布を示す解が存在するが, これを $X_i = P_i a_i + Q_i a_i a_k$ の形で近似し得ない。¹¹⁾ これらの例は厳密に Gauss 分布をする解でも Wiener-Hermite 展開の有限項ではうまく表はせないことを示している。従ってたとえ数学的に展

*) 1967年12月京大数理解析研に於ける土井政昭君との報告

開の収斂性が保証されていても、もっとも適当であるべき Gauss 分布のときでも有限項の近似が悪いという実用的に大変困る事実を示している。

この困難を克服するには $a(\vec{x})$ を各時刻で共通のものをとる必要がない点に着目する。即ち各時刻で $U_j(\vec{x}, t)$ が Gauss 分布に近ければ、各時刻でそれが展開の数項でよく近似される様な適当な $a(\vec{x}, t)$ が存在する筈である。従って各時刻での展開が早く収斂する様に各時刻で $a(\vec{x}, t)$ をとっていくとよい近似は保たれるであろう。この考えを次節で実行に移す。

§ 3. 時間的に変わる ideal random functions を用いた Wiener-Hermite 展開⁸⁾

速度場の Fourier 変換を例にとり、説明しよう。展開

$$U_i(\vec{k}, t) = \sum_j K_{ij}^{(1)}(\vec{k}, t) H_j^{(1)}(\vec{k}, t) + \sum_{j,l} \int d\vec{k}' K_{ijl}^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}', \vec{k}') H^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}', \vec{k}', t) + \dots$$

において、今度は $H^{(n)}$ を時刻によって異なるものとする。その時間的な変化はやはり確率函数であり、かつ都合のよい ideal random function が時間と共にそんなに急に変わらないとして

$$\frac{d}{dt} H_j^{(1)}(\vec{k}, t) = \sum_k L_{jk}^{(1)}(\vec{k}, t) H_k^{(1)}(\vec{k}, t) + \sum_{k,l} \int d\vec{k}' L_{jkl}^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}', \vec{k}', t) H_{kl}^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}', \vec{k}', t) + \dots$$

の様に書けるものとする。すべての時刻で ideal random function であるための必要且充分な条件は

$$\frac{d}{dt} \langle H_{j_1}^{(1)}(\vec{k}_1) H_{j_2}^{(1)}(\vec{k}_2) \dots H_{j_n}^{(1)}(\vec{k}_n) \rangle = 0$$

である。このことから L について次の様な制限がつく

$$L_{ij}^{(1)}(\vec{k}) + L_{ji}^{(1)}(-\vec{k}) = 0$$

$$\{ L_{ijl}^{(2)}(\vec{k}_2, \vec{k}_3) + L_{ilj}^{(2)}(\vec{k}_3, \vec{k}_2) + L_{jli}^{(2)}(\vec{k}_3, \vec{k}_1) + L_{jil}^{(2)}(\vec{k}_1, \vec{k}_3) + L_{lij}^{(2)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) + L_{lji}^{(2)}(\vec{k}_2, \vec{k}_1) \} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) = 0$$

etc.

これを用ひて前述の Hopf の場合を考えてみよう。非圧縮性非粘性流体の Navier-Stokes

方程式の Fourier 変換した式は

$$\frac{\partial}{\partial t} U_j(\vec{k}, t) + i \sum \Delta_{jl}(\vec{k}) \int d\vec{k}' U_m(\vec{k} - \vec{k}', t) k'_m U_l(\vec{k}') = 0$$

$$\Delta_{jl}(\vec{k}) = \delta_{jl} - k_j k_l / k^2$$

である。この方程式の Gauss 形の解を求めるため速度場の Wiener-Hermite 展開を第一項だけで書き

$$U_j(\vec{k}, t) = \sum \Delta_{jl}(\vec{k}) K_{lm}(\vec{k}, t) H_m^{(1)}(\vec{k}, t)$$

を方程式に代入する。まず統計的平均値をとると

$$i \sum \Delta_{jl}(\vec{k}) \int d\vec{k}' \Delta_{mn}(\vec{k} - \vec{k}') K_{nq}(\vec{k} - \vec{k}', t) k'_m \Delta_{lp}(\vec{k}') K_{pq}(\vec{k}', t) \delta(\vec{k}) = 0$$

これは自動的に充される。次に $H_\alpha^{(1)}(-\vec{p})$ をかけて平均をとると

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{jl}(\vec{p}) K_{l\alpha}(\vec{p}, t) + \sum \Delta_{jl}(\vec{p}) K_{lm}(\vec{p}, t) L_{m\alpha}^{(1)}(\vec{p}, t) = 0$$

但し $L^{(n)} (n \geq 3) = 0$ とした。 $L^{(1)}$ は一般性を失はずに 0 にとれる⁸⁾ ので $K_{l\alpha}$ が t -independent

であればこれは充される。最後に $H_{\alpha\beta}^{(2)}(-\vec{p}, -\vec{q})$ をかけて平均をとると、

$$\begin{aligned} & \sum \Delta_{jl}(-\vec{k}) K_{lm}(-\vec{k}, t) [L_{m\alpha\beta}^{(2)}(\vec{p}, \vec{q}, t)] \delta(\vec{p} + \vec{q} + \vec{k}) \\ & = [-i \sum \Delta_{jl}(-\vec{k}) \Delta_{mn}(\vec{p}) K_{n\alpha}(\vec{p}, t) q_m \Delta_{ls}(\vec{q}) K_{s\beta}(\vec{q}, t) \\ & \quad - i \sum \Delta_{jl}(-\vec{k}) \Delta_{mn}(\vec{q}) K_{n\beta}(\vec{q}, t) p_m \Delta_{ls}(\vec{p}) K_{s\alpha}(\vec{p}, t)] \delta(\vec{p} + \vec{q} + \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{この式は } L_{j\alpha\beta}^{(2)}(\vec{p}, \vec{q}, t) = & -\frac{i}{2} \sum K_{js}^{-1}(-\vec{k}) \Delta_{st}(-\vec{k}) [\Delta_{lm}(\vec{p}) K_{m\alpha}(\vec{p}, t) q_l \Delta_{tn}(\vec{q}) \\ & K_{n\beta}(\vec{q}, t) + \Delta_{lm}(\vec{q}) K_{m\beta}(\vec{q}, t) p_l \Delta_{tn}(\vec{p}) K_{n\alpha}(\vec{p}, t)] \end{aligned}$$

なら充される。前述の $L^{(2)}$ に関する制限条件を充すためには

$$\mathcal{K}^2 K_{js}^{-1}(-\vec{k}, t) = K_{sj}(\vec{k}, t)$$

であればよい。 $H^{(n)} (n \geq 3)$ をかけて平均をとれば $0 = 0$ である故、Gauss 形の速度場として

$$\begin{aligned} U_j(\vec{k}, t) &= \sum \mathcal{K} \Delta_{jl}(\vec{k}) K_{lm}(\vec{k}) H_m^{(1)}(\vec{k}, t) \\ \sum_j \mathcal{K}^2 K_{sj}(-\vec{k}) K_{tj}(\vec{k}) &= \sum_j \mathcal{K}^2 K_{js}(-\vec{k}) K_{jt}(\vec{k}) = \delta_{st} \end{aligned}$$

が得られる。この速度場の特性函数をつくと

$$\Phi\{z(\vec{k})\} = \langle e^{i[z, u]} \rangle = \exp\left\{-\frac{\mathcal{K}^2}{2} [\tilde{z}, \tilde{z}]\right\}$$

となる。ここで $[z, u] = \sum_j \int d\vec{k} z_j(\vec{k}) u_j(\vec{k})$, $\tilde{z}_j(\vec{k}) = \sum_l \Delta_{jl}(\vec{k}) z_l(\vec{k})$ である。これは

Hopf の特解と一致している。

3-mode-modelの場合も全く同様に Gauss 形の解が

$$X_i = p_i a_i$$

の形で表はせることが示される。⁸⁾

§ 4. 運動方程式系と取り扱うべき諸問題

例として非粘性の Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^2 = 0$$

をとらう。 u と $\dot{H}^{(1)}$ の Wiener-Hermite 展開を symbolic に

$$u = K^{(0)} + \alpha K^{(1)} H^{(1)} + \alpha^2 K^{(2)} H^{(2)} + \dots$$

$$\alpha \dot{H}^{(1)} = \alpha^2 L^{(2)} H^{(2)} + \dots$$

とかこう。 α は後の議論のため形式的につけた。 u の展開を方程式に入れ平均をとると、

$$\frac{\partial K^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ K^{(0)} K^{(0)} + \alpha^2 K^{(1)} K^{(1)} + \alpha^4 K^{(2)} K^{(2)} + \dots \} = 0$$

$H^{(1)}$ をかけて平均をとると

$$\frac{\partial K^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ K^{(0)} K^{(1)} + K^{(1)} K^{(0)} + \alpha^2 (K^{(1)} K^{(2)} + K^{(2)} K^{(1)}) + \dots \} = 0$$

$H^{(2)}$ をかけて平均をとると

$$\frac{\partial K^{(2)}}{\partial t} + K^{(1)} L^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ K^{(0)} K^{(2)} + K^{(2)} K^{(0)} + K^{(1)} K^{(1)} + \dots \} = 0$$

等を得る。今かりに u の展開を $H^{(n)}$ できったものを厳密解だとすると、方程式系は $H^{(2n)}$ をかけて平

均をとったもの迄即ち $(2n+1)$ 個の方程式が $(n+1)$ 個の未知函数 $K^{(n)}$ に対して成立せねばなら

ない。例えば Gauss 形の場合は $K^{(0)} K^{(1)}$ に対し

$$\frac{\partial K^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ K^{(0)} K^{(0)} + \alpha^2 K^{(1)} K^{(1)} \} = 0.$$

$$\frac{\partial K^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ K^{(0)} K^{(1)} + K^{(1)} K^{(0)} \} = 0$$

$$K^{(1)} L^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} K^{(1)} K^{(1)} = 0$$

である。又 u の展開を $H^{(n)}$ できったものを近似解だとする立場では始めの $(n+1)$ 個の方程式だけを

用いる。後の n 個は $K^{(n+1)}$ 以下をきめる方程式であるとする。このとき純粋に摂動論的な立場に

立つと各方程式で $\alpha = 0$ としたものをとるべきである。展開をきる以外は近似しない立場では例えば

$K^{(1)} K^{(1)}$ の様な非線形項が $\frac{\partial K^{(0)}}{\partial t}$ の方程式に出てくる。この事情は安定性の問題等に用いたとき夫々線

形近似と quasi-linear 近似の方程式系を与えることに対応する。

これらのことをふまえて、取り扱はれた或は取り扱はるべき諸問題を表にすると、

	平均流なし	平均流あり
exactly Gaussian	Hopf の特解 ^(a) 3-mode-model ^(a)	
nearly Gaussian	$K^{(1)}H^{(1)} + K^{(2)}H^{(2)}$ 統計的平衡に漸近? 平衡でのスペクトル? 3-mode-model ^(b) Burgers, Navier-Stokes ^(c)	$K^{(0)} + K^{(1)}H^{(1)}$ 統計的平衡 ^(d) 安定性 ^(d) $K^{(0)} + K^{(1)}H^{(1)} + K^{(2)}H^{(2)}$ 統計的不安定性

(a) Ref. 8 で解決済み。

(b) 関学田中修平君が適当な a の時間変化をとることにより研究中。平衡点の周囲を展開の近似をよく保ったまま振動する近似解があること。 a の時間変化に非線形の大きな影響をおしこめ後を線形化してやっても近似があまり悪くならないこと。等が判っている。

(c) 粘性のため平衡は近似的である。複雑なためそのまま数値積分で調べず、(b)でのべた様な線形化を考慮中である。

(d) Vlasov方程式のとき Ref. 7でNavier-Stokes方程式のとき Ref. 8で基本方程式系が quasi-linear 近似のそれと一致することを示した。

- (1) R. H. Cameron and W. T. Martin, *Ann. Math.* **48** (1947) 385.
- (2) N. Wiener, *Non-linear Problems in Random Theory* (John Wiley & Sons, Inc. New York 1958).
- (3) T. Imamura, W. C. Meecham and A. Siegel, *J. Math. Phys.* **6** (1965) 695.
- (4) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meecham, *Phys. of Fluids* **6** (1963) 1519.
- (5) W. C. Meecham and A. Siegel, *Phys. of Fluids* **7** (1964) 1178.
- (6) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meecham, *J. Math. Phys.* **6** (1965) 707.
- (7) T. Imamura and T. Taniuchi, *Phys. of Fluids* **9** (1966) 1503.
- (8) M. Doi and T. Imamura, to be published *Prog. Theor. Phys.*
- (9) G. C. Wick, *Phys. Rev.* **80** (1950) 268.
- (10) E. Hoff, *J. Rat. Mech. Analysis* **1** (1952) 87.
- (11) S. A. Orszak and L. R. Bissonette, *Phys. of Fluids* **10** (1967) 2603.