数理解析研究所講究録
第81巻 1970年 1-32

多値論理概説

後藤以紀（明治大学）

1 多値論理とその論理的意味，数学的意味，実用的意味

二値論理においては，命題の真理値を二個とし，論理的には偽と真とを意味し，数学的にはブール代数の最小元と最大元として取扱われ，実用的には或る条件の不成立と成立とに対応することから，電気回路の開閉状態或は情報信号の0，1に対応させられる。

多値論理においては，真理値を三個以上とすることになるが，数学的に二値論理の公式に近い形になるように拡張するか，真理値の論理的意味を先に定めて，それに都合の良いように演算法則をきめるか，或は実用的用途を先に選んで，それに使われる装置の動作を表わすのに都合の良いように真理値及び演算法則を定めるかに従って，多くの種類が生れる。

例えば，二段動作を行なう従来の回路要素の異常動作状態を表わす為に真理値を一つ増す場合と，多段動作を行なう要素の取扱に使う多値論理とでは異なる演算法則が生れてくる。

本文は多値論理概説と題したが，他の発表論文と重複しない部分について詳しく述べることにしたので，論理代数方程式及び論理関数方程式の一般解に関する部分が主体となった。

本文で使っている論理記号は，

否定　$\neg$ と $-$

論理積　$\wedge$（又は省略する）と $\cap$（二値命題と多値命題とが混在する場合にその区別を見易くするために多値命題の間にのみ $\cap$ を使うか，又は省略する）

論理和　$\vee$　と　$\cup$（二値命題と多値命題とが混在する場合に，多値命題の間にのみ $\cup$ を使う）

含意　$\rightarrow$

対等　$\leftrightarrow$

等値　$=$　（両辺の真理値が等しいこと）

恒等　$\equiv$　（両辺に存在する同じ文字で表わされる命題の真理値は等しいとして，その値が任意に変っても，両辺の真理値は常に等しいこと）

括弧の無いときの演算順序は否定，論理積，論理和，含意，対等，等値及び恒等の順とする。

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \equiv (A \leftrightarrow B)(B \leftrightarrow C)$$

の意味とする。

$$\bigvee_{P_1 P_2} f(P_1, P_2) \equiv \bigvee_{P_1=0}^{1} \bigvee_{P_2=0}^{1} f(P_1, P_2)$$

$$\equiv f(0,0) \vee f(0,1) \vee f(1,0) \vee f(1,1).$$

次に，多値論理の種々な意味付けの例を挙げてみる。

［1．1］偽，不確定，真とする場合[1]　偽，真の他に不確定という真理値を設け，便宜上 0，1，½ で表わす。0，1 を保存するのは二値論理の偽，真即ち 0，1 をそのまま保存するためである。½ は確率 50% ではなく，真偽不明を意味する。勿論，½ の代りに他の記号例えば m でもよいのであるが，順序を $0 \leqq m \leqq 1$ のように定めておく。

論理和，論理積即ち $\cup$，$\cap$ を二値の場合と同じく or，and の意味とすれば，任意の三値命題 X，Y，Z について

可換法則　$X \cup Y \equiv Y \cup X$;　(1.1)!!

結合法則　$X \cup (Y \cup Z) \equiv (X \cup Y) \cup Z$,

$X \cap (Y \cap Z) \equiv (X \cap Y) \cap Z$;　(1.2)!!

吸収法則　$X \cup (Y \cap X) \equiv (X \cup Y) \cap X$;　(1.3)!!

分配法則　$X \cup (Y \cap Z) \equiv (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,

$X \cap (Y \cup Z) \equiv (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.　(1.4)!!

が成立するものとし，(1．1) 乃至 (1．3) 式から

べき等法則　$X \cup X \equiv X \cap X \equiv X$　(1.5)!!

が導かれることも，二値の場合と同様である。

また，X，Y の真理値を夫々 x，y とするとき $x \leqq y$ なる場合は，½の意味からして二値の場合と同じく

$$X \cup Y = Y,\ X \cap Y = X \qquad (1.6)$$

となる。

ここまでは，二値論理と同じであるが，問題となるのは否定である。

[1.1.1] $\overline{1/2} = 1/2$ とする場合　真偽不明であるから1か0か不明なのであるが，1ならば否定は0となる筈であるし，0ならば1となる筈であるから，やはり0か1か不明となるべきで，$\overline{1/2}$を½としたのである。灰色の反対をやはり灰色とすることに相当する。他の例で云えば，開路と閉路との中間の状態即ち抵抗で結ばれている状態に適用すれば，その反対の状態はやはり抵抗の存在する状態とすることに相当する。

二値論理では　Xと$\overline{X}$とは互に補元となり，

$$X \vee \overline{X} \equiv 1,\quad X \wedge \overline{X} \equiv 0 \qquad (1.7)$$

となるが，

$$\overline{1/2} = 1/2 \qquad (1.8)!$$

と定めると，(1.6)式によれば

$$\tfrac{1}{2} \cup \overline{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \qquad (1.9)\ !!$$

となって $\overline{1/2}$ は $1/2$ の補元ではなくなる。

一方において，含意 → の定義として，二値の場合と同じ

$$A \to B = \overline{A} \cup B \qquad (1.10)\ !!$$

と定めると，A，B の真理値 a，b について，$a < b$ なる場合には，$\overline{A} \cup B$ の真理値は 1 となる。左辺は $0 \to 1$，$0 \to \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} \to 1$ の何れかであるから，たとえ $\frac{1}{2}$ が 0 か 1 かであったとしても合理的である。

$a = \frac{1}{2}$，$b = 0$；$a = \frac{1}{2}$，$b = \frac{1}{2}$；$a = 1$，$b = \frac{1}{2}$ に対しては右辺は $\frac{1}{2}$ となる。これは a，b の $\frac{1}{2}$ が 0 か 1 かであったとしたときに右辺がやはり 0 か 1 かになり，両辺が不確定となるので (1.10) 式が成立する。

対等 $A \leftrightarrow B$ を次のように定義すると

$$\begin{aligned} A \leftrightarrow B &\equiv (A \to B)(B \to A) && (1.\ 11)\ ! \\ &\equiv (\overline{A} \cup B)(\overline{B} \cup A) \\ &\equiv A\overline{B} \cup \overline{A}B && (1.\ 11')\ !! \end{aligned}$$

となって，二値の場合と同形の公式を得る。

その他

$$(A \Leftrightarrow 1) \equiv A, \qquad (1.\ 12)\ !!$$

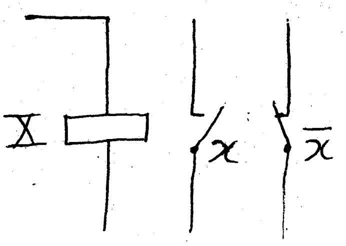
$$(A \Leftrightarrow 0) \equiv \overline{A} \qquad (1.\ 13)\ !!$$

は二値の場合と同形であるが，次式は特有なものである。

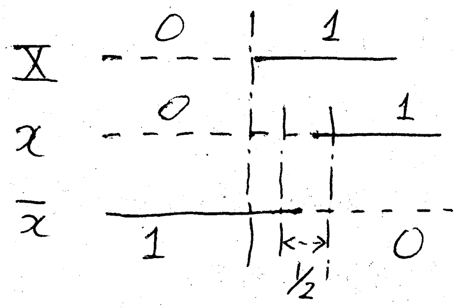
$$(A \leftrightarrow \tfrac{1}{2}) \equiv \tfrac{1}{2} \qquad (1.14)!!$$

ここに$\frac{1}{2}$は真理値$\frac{1}{2}$の命題を表わす。

実用例を挙げると，第1.1図に示すように，電磁継電器Xによって動作（点線は0，実線は1）する接点xの動作が一定の遅れによって動作するとは限らず，場合によって不整があり，開閉の時期が不確定の範囲があり，また，逆動作をする筈の接点xと$\bar{x}$とが完全に逆動作する訳ではなく $x \vee \bar{x}$ は必ずしも1にはならない。電子装置の場合でも出力端子が数個ある場合の時定数の違いによる不揃等もある。この範囲を$\frac{1}{2}$で表わして，所要の出力には不都合を生じないようにするのである。



第1.1図



第1.2図

以上の目的で，筆者は論理回路の設計に三値論理を使用した。(1)

上記の他の例としては，パターン認識等の場合に，或物を観測して，それが目的物であるために存在すべき条件を1で表わし，存在すべからざる条件を0で表わし，どうでもよい

条件を$\frac{1}{2}$とするような使い方もある。

[1.1.2] これは前記の[1.1.1]の変種で，不確定なる命題についても，同一のものについての否定には

$$\mathrm{X} \cup \overline{\mathrm{X}} = 1, \quad \mathrm{X} \cap \overline{\mathrm{X}} = 0 \qquad (1.15)$$

が成立すると定めるのである。しかし異なる命題 X と Y とについては，両者が不確定ならば

$$\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = 1/2 \qquad (1.16)$$

とすべきことになる。

前に述べたように，開路閉路の中間に抵抗が入るような状態だと必ずしも(1.15)式は使えない。

(1.15)式を使う場合には X，$\overline{\mathrm{X}}$ を$\frac{1}{2}$と書かずに X，$\overline{\mathrm{X}}$ のままにして置かねばならない。

[1.2] −1，0，1 の場合　これを便宜上 $\bar{1}$，0，1 で表わし[2]

$$\left.\begin{aligned} -1-1 &= \underset{(10\text{進})}{-2} = \underset{(2\text{進})}{\bar{1}0}, & \bar{1}\times\bar{1} &= 1, \\ -1+1 &= 0, & \bar{1}\times 1 &= \bar{1}, \\ 1+1 &= \underset{(10\text{進})}{2} = \underset{(2\text{進})}{10}, & 1\times 1 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (1.17)$$

とすれば，正負の2進数の計算を表わせる。

一つの桁についてみれば，2を法とする加減算となる。

[1.3] 0，1，2，…，$m-1$を循環する場合　これは，mを法とする加算，減算を行なう動作をする場合である。

二値論理で扱う場合には，0，1，…，$m-1$の状態を表わすのに$x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$（2値命題）で，排他的であることを例えば次式の各項で

$$x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2}\cdots\overline{x_{m-1}} \vee \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\cdots\overline{x_{m-1}} \vee \cdots$$
$$\vee\ \overline{x_0}\,\overline{x_1}\cdots\overline{x_{m-2}}x_{m-1} \qquad (1.18)$$

とすればよい。

[1.4] 0，½，1 に½を∞のように扱う演算を加える場合(3)　½で異常状態を表わし，

$$x_1 \odot x_2,\quad x_1 \mathbin{\underline{\vee}} x_2,\quad \sim x_1 \qquad (1.19)$$

なる演算⊙，$\underline{\vee}$，～を[1.1.1]の演算の他に加え（但し～は－と同じ），x_1，x_2の中に½があるときのみでそのときにのみ（1.19）式の値は½となるものと定める。これは向殿政男の論文で説明されているように fail-safe 論理回路に使われる。(4)

2 多値論理の二値論理による表示 多値論理の真理値を$e_1, e_2, \cdots, e_m$とするとき、m値命題Xが真理値e_μを採ることを

$$X = e_\mu \tag{2.1}$$

で表わせば、(2.1)式自身は二値である。Xがe_μでなければ(2.1)式は0となる。それで

$$(X = e_\mu) \equiv x_\mu \tag{2.2}$$

とおけば、Xは$e_1, \cdots, e_m$中のどれか一つを必ず採り、同時に二つは採らないから

$$x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \cdots \overline{x_m} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \cdots \overline{x_m} \vee \cdots \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \cdots \overline{x_{m-1}} x_m \tag{2.3}$$

なる条件が存在する。

次に、多値論理における演算法則を表現する変換について考える。例えば二項演算について云えば、$X = e_\lambda$, $Y = e_\mu$を$F(X, Y) = F_{\lambda\mu}$に変換する変換Fを表わすには、(2.2)式と同様に

$$(X = e_\lambda) \equiv x_\lambda, \ (Y = e_\mu) \equiv y_\mu, (F = F_{\lambda\mu}) \equiv f_{\lambda\mu} \tag{2.4}$$

と置いて、才2.1表のようになる。即ちX, Yがそれぞれe_λ, e_μなるときにはFは$F_{\lambda\mu}$に変換される。それは(2.5)式で表現される。

$$\bigvee_{\lambda,\mu=1}^{m} \xi_\lambda \eta_\mu \varphi_{\lambda\mu} \tag{2.5}$$!!

X \ Y	e_1	e_2	$\cdots$	e_μ	$\cdots$	e_m
e_1	F_{11},	F_{12},	$\cdots$,	$F_{1\mu}$,	$\cdots$,	F_{1m}
e_2	F_{21},	F_{22},	$\cdots$,	$F_{2\mu}$,	$\cdots$,	F_{2m}
$\vdots$			$\cdots\cdots$			
e_λ	$F_{\lambda 1}$,	$F_{\lambda 2}$,	$\cdots$,	$F_{\lambda\mu}$,	$\cdots$,	$F_{\lambda m}$
$\vdots$			$\cdots\cdots$			
e_m	F_{m1},	F_{m2},	$\cdots$,	$F_{m\mu}$,	$\cdots$,	F_{mm}

第2.1表

ここに

$$\left.\begin{aligned} \xi_\lambda &\equiv x_\lambda \bigwedge_{\lambda'\neq\lambda} \overline{x_{\lambda'}}, \\ \eta_\mu &\equiv y_\mu \bigwedge_{\mu'\neq\mu} \overline{y_{\mu'}}, \\ \varphi_{\lambda\mu} &\equiv f_{\lambda\mu} \bigwedge_{\sigma\neq(\lambda\mu)} \overline{f_\sigma}. \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

$\bigwedge_{\lambda'\neq\lambda} \overline{x_{\lambda'}}$ は λ' が λ と異なる総ての $\overline{x_{\lambda'}}$ の論理積である。他も同様。

(2.5)式はこの二項演算 $F(X;Y)$ を表現する式であるから，これを簡単化すれば一項演算の式も容易に導かれる。

第2.1表は $F_{\lambda\mu}$ によって或る真理値が表わされるだけであるが，総ての種類の演算 $F^{(\nu)}$ を動員することにより，或る λ，μ を固定しても尚総ての真理値 $F_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ に及ぶことになれば，任意の真理値の組み合せを任意の真理値に変換できる演算系ができたことになる。

3　多元多値論理代数方程式

〔3．1〕一元二値論理代数方程式の一般解　説明の便宜上，一元二値の場合を先に述べる。一元二値論理代数方程式（3．1）の一般解は種々な形式（3．1）乃至（3．1$^{\text{IV}}$）で表わされる[5]。ここに一般解とは，原方程式（3，1）と恒等な式で表わされた解を云う。

$$C_0\overline{X} \vee C_1 X \qquad (3.1)!$$

$$\equiv (C_0 \vee C_1)\{(X \leftrightarrow \overline{C_0}) \vee (X \leftrightarrow C_1)\} \qquad (3.1')!!$$

$$\equiv (C_0 \vee C_1)\{(X \leftrightarrow \overline{C_0}) \vee (X \leftrightarrow \overline{C_0} \vee C_1 P) \vee (X \leftrightarrow C_1)\} \qquad (3.1'')!!$$

$$\equiv (C_0 \vee C_1) \bigvee_P (X \leftrightarrow \overline{C_0} \vee C_1 P) \qquad (3.1''')!!$$

$$\equiv (C_0 \vee C_1) \bigvee_P (X \leftrightarrow \overline{C_0}\,\overline{P} \vee C_1 P) \qquad (3.1^{\text{IV}})!!$$

ここに $C_0 \vee C_1$ は解が存在する為の必要充分条件で P は任意であるので，$\bigvee_P$ は P の真理値 0 と 1 とについての論理和を意味する。

（3．1″）式の第2項 $X \leftrightarrow \overline{C_0} \vee C_1 P$ は無くてもよい〔（3．1′）式参照〕が，任意因子 P があるので，別の条件を与える場合には実用上便利である。

（3．1′）乃至（3．1$^{\text{IV}}$）式を特殊加法標準形に整頓すれば（3．1）式に戻ることによって容易に証明される。

[3.2] 多元二値論理代数方程式の一般解[6]　二元論理代数方程式(3.2)を公式(3.1′)によって X_2について解くと，式(3.2″)となる。それより(3.2‴)式で表わされる逐次形式の一般解を得る。式(3.2$^{\mathrm{IV}}$)はその変形で，X_1, X_2 について対称な形式であるが，解が存在する為の必要充分条件が全体に共通でないことが欠点である。

$$C_{00}\overline{X_1}\,\overline{X_2} \vee C_{01}\overline{X_1}X_2 \vee C_{10}X_1\overline{X_2} \vee C_{11}X_1X_2 \qquad (3.2)!$$

$$\equiv (C_{00}\overline{X_1} \vee C_{10}X_1)\overline{X_2} \vee (C_{01}\overline{X_1} \vee C_{11}X_1)X_2 \qquad (3.2')$$

$$\equiv (C_0\overline{X_1} \vee C_1X_1)\{(\overline{X_2} \Leftrightarrow \overline{C_{00}}\,\overline{X_1} \vee \overline{C_{10}}X_1) \vee (X_2 \Leftrightarrow C_{01}\overline{X_1} \vee C_{11}X_1)\} \qquad (3.2'')$$

$$\equiv C\bigvee_{P_1P_2}\{X_1 \Leftrightarrow C_1(\overline{C_0} \vee P_1)\}\{X_2 \Leftrightarrow C_{01}(\overline{C_1} \vee \overline{P_1})(\overline{C_{00}} \vee P_2) \vee C_{11}(\overline{C_0} \vee P_1)(\overline{C_{10}} \vee P_2)\} \qquad (3.2''')!!$$

$$\begin{aligned}\equiv\ & C_{00}(X_1 \Leftrightarrow \overline{C'_0})(X_2 \Leftrightarrow \overline{C''_0})\\ \vee\ & C_{01}(X_1 \Leftrightarrow \overline{C'_0})(X_2 \Leftrightarrow C''_1)\\ \vee\ & C_{10}(X_1 \Leftrightarrow C'_1)(X_2 \Leftrightarrow \overline{C''_0})\\ \vee\ & C_{11}(X_1 \Leftrightarrow C'_1)(X_2 \Leftrightarrow C''_1),\end{aligned} \qquad (3.2^{\mathrm{IV}})!!$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}&\bigvee_{P_1P_2} \equiv \bigvee_{P_1=0}^{1}\ \bigvee_{P_2=0}^{1},\\ &C_0 \equiv C'_0 \equiv C_{00} \vee C_{01}, \quad C_1 \equiv C'_1 \equiv C_{10} \vee C_{11},\\ &C''_0 \equiv C_{00} \vee C_{10}, \quad C''_1 \equiv C_{01} \vee C_{11},\\ &C \equiv C_0 \vee C_1 \equiv C'_0 \vee C'_1 \equiv C''_0 \vee C''_1.\end{aligned}\right\} \quad (3.3)!$$

上記の公式を数学的帰納法で拡張すれば，次のようにm元二値論理代数方程式（3．5）の一般解の公式（3.5′），（3.5″）が求められる。

$$
\left.
\begin{array}{l}
C \equiv C_0 \vee C_1,\ C_0 \equiv C_{00} \vee C_{01},\ C_1 \equiv C_{10} \vee C_{11},\ \cdots, \\
C_{n_1 n_2 \cdots n_{m-1}} \equiv C_{n_1 n_2 \cdots n_{m-1} 0} \vee C_{n_1 n_2 \cdots n_{m-1} 1}\ ; \\
C_0^{(\nu)} \equiv \bigvee_{n_1 \cdots n_{\nu-1}} \bigvee_{n_{\nu+1} \cdots n_m} C_{n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} 0 n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_m}, \\
C_1^{(\nu)} \equiv \bigvee_{n_1 \cdots n_{\nu-1}} \bigvee_{n_{\nu+1} \cdots n_m} C_{n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} 1 n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_m}; \\
\bigvee_{P_1 P_2 \cdots P_m} \equiv \bigvee_{P_1=0}^{1} \bigvee_{P_2=0}^{1} \cdots \bigvee_{P_m=0}^{1} .
\end{array}
\right\}
\qquad (3.4)!
$$

と記号を定めれば

$$
\bigvee_{n_1 n_2 \cdots n_m} C_{n_1 n_2 \cdots n_m} \neg^{n_1+1} X_1 \neg^{n_2+1} X_2 \cdots \neg^{n_m+1} X_m \qquad (3.5)!
$$

$$
\begin{aligned}
\equiv C \bigvee_{P_1 P_2 \cdots P_m} & \{ X_1 \leftrightarrow C_1 (P_1 \vee \overline{C_0}) \} \\
& \{ X_2 \leftrightarrow \bigvee_{n_1} C_{n_1 1} (\neg^{n_1+1} P_1 \vee \overline{C_{\overline{n_1}}}) (P_2 \vee \overline{C_{n_1 0}}) \} \\
& \{ X_3 \leftrightarrow \bigvee_{n_1 n_2} C_{n_1 n_2 1} (\neg^{n_1+1} P_1 \vee \overline{C_{\overline{n_1}}}) (\neg^{n_2+1} P_2 \vee \overline{C_{n_1 \overline{n_2}}}) (P_3 \vee \overline{C_{n_1 n_2 0}}) \} \\
& \text{- - - - - - - - - - - - -} \\
& \{ X_m \leftrightarrow \bigvee_{n_1 n_2 \cdots n_{m-1}} C_{n_1 n_2 \cdots n_{m-1} 1} (\neg^{n_1+1} P_1 \vee \overline{C_{\overline{n_1}}}) (\neg^{n_2+1} P_2 \vee \overline{C_{n_1 \overline{n_2}}}) \\
& \qquad \text{- - - - -} \\
& \qquad (\neg^{n_{m-1}+1} P_{m-1} \vee \overline{C_{n_1 n_2 \cdots n_{m-2} \overline{n_{m-1}}}}) \\
& \qquad (P_m \vee \overline{C_{n_1 n_2 \cdots n_{m-1} 0}}) \}
\end{aligned}
\qquad (3.5')!!
$$

$$\equiv \bigvee_{n_1 n_2 \cdots n_m} C_{n_1 n_2 \cdots n_m} (X_1 \leftrightarrow \neg^{n_1+1} C^{(1)}_{n_1})(X_2 \leftrightarrow \neg^{n_2+1} C^{(2)}_{n_2}) \cdots\cdots (X_m \leftrightarrow \neg^{n_m+1} C^{(m)}_{n_m}). \qquad (3.5'')!!$$

以上の公式の特徴は，X_1，X_2，…の形がmに関せず同じであることと，X_νの一般解中の$C_{n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} 1}$の添字は，$P_1$，$P_2$，…，$P_\nu$の符号に対応している。すなわち0に対しては否定符号が対応し，1に対しては肯定符号が対応している。また定数項$\overline{C_{\overline{n_1}}}$，$\overline{C_{n_1 \overline{n_2}}}$，…，$\overline{C_{n_1 n_2 \cdots \overline{n_{\nu-1}}}}$，$\overline{C_{n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} 0}}$の添字$\overline{n_1}$，$\overline{n_2}$，…，$\overline{n_{\nu-1}}$，0とも対応している。

例 3.1　或る二項演算関数F（A，B）とF（B，A）との論理積が　A⇔B　になるF（A，B）を求めてみる。

$$(A \to B)(B \to A) \equiv A \leftrightarrow B \qquad (3.6)$$

なることは周知であるから，解答は

$$\{F(A,B) \leftrightarrow (A \to B)\} \vee \{F(A,B) \leftrightarrow (B \to A)\}. \qquad (3.7)?$$

解答を求めるための方程式は（3.8）式となる。

$$F(A,B)\,F(B,A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B) \qquad (3.8)!.$$

$$\equiv F(0,0)\,\overline{A}\,\overline{B} \vee F(1,1)\,AB \vee (\overline{F(0,1)} \vee \overline{F(1,0)})(\overline{A}B \vee A\overline{B}). \qquad (3.8')$$

このF（0，0）等は関数ではなく真理値（定数）であるから，直ちに

$F(0,0)=F(1,1)=1,$

$$\left.\left(F(0,1)=0\right) \vee \left(F(1,0)=0\right)\right\} \quad (3.9)$$

が求められる。これにより

$$F(A,B)=\bar{A}\,\bar{B}\,F(0,0) \vee \bar{A}B\,F(0,1) \vee A\bar{B}\,F(1,0) \vee AB\,F(1,1) \quad (3.10)$$

から $F(A,B)$ の種類を求めると

$$\left.\begin{array}{ll} F(0,1)=0,\ F(1,0)=0: & F(A,B)=A\Leftrightarrow B, \\ F(0,1)=0,\ F(1,0)=1: & F(A,B)=B\rightarrow A, \\ F(0,1)=1,\ F(1,0)=0: & F(A,B)=A\rightarrow B \end{array}\right\} \quad (3.11)!!$$

なる三種の解を得る。

これは，余りに簡単な例で数値解だけで終ってしまうので一般公式の必要はなかったが，もう少し一般化して，次の(3.12)式の問題の一般解は(3.12′)式で表わされる。

$$XY\leftrightarrow(A\leftrightarrow B). \quad (3.12)!$$

この場合は未知項 X, Y について(3.2‴)式を適用すると

$$\left.\begin{array}{l} C_{00}=C_{01}=C_{10}=(A\leftrightarrow\bar{B}),\ C_{11}=A\leftrightarrow B, \\ \therefore\ C_0=A\Leftrightarrow\bar{B},\ C_1=1,\ C=1. \end{array}\right\} \quad (3.13)$$

$$(3.12)\equiv\bigvee_{P_1P_2}\{X\leftrightarrow P_1 \vee (A\Leftrightarrow B)\}\{Y\Leftrightarrow \bar{P_1}P_2 \vee (A\Leftrightarrow B)\} \quad (3.12')!!$$

ここでもし，

$$P_1=A\bar{B},\ P_2=\bar{A}B \quad (3.14)$$

と置けば(3.11)式の特殊解となる。

[3.3] 一元三値論理代数方程式の一般解[7] (2.4)式で表わしたように，未知の三値命題Xを含む論理代数方程式は，

$$(X=e_1)\equiv x_1,\ (X=e_2)\equiv x_2,\ (X=e_3)\equiv x_3 \qquad (3.15)!$$

と置けば，x_1, x_2, x_3 は二値命題となるから

$$a_1 x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee a_2 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee a_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \qquad (3.16)$$

で表わされる。公式(3.5)乃至(3.5″)によると，係数は

$$C_{100}=a_1,\ C_{010}=a_2,\ C_{001}=a_3,\ 他は\ 0. \qquad (3.17)$$

$$\therefore C_{00}=a_3,\quad C_{01}=a_2,\quad C_1=0,$$

$$\therefore C_0=a_2\vee a_3,\quad C_1=a_1,\quad C=a_1\vee a_2\vee a_3\equiv a. \qquad (3.18)!!$$

これより，公式(3.5)乃至(3.5″)によると

$$\begin{aligned}(3.16)\equiv a \bigvee_{P_1P_2} &\{x_1\leftrightarrow a_1(P_1\vee\overline{a}_2\overline{a}_3)\}\\ &\{x_2\leftrightarrow a_2(\overline{P}_1\vee\overline{a}_1)(P_2\vee\overline{a}_3)\}\\ &\{x_3\leftrightarrow a_3(\overline{P}_1\vee\overline{a}_1)(\overline{P}_2\vee\overline{a}_2)\} \qquad (3.16')!!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\equiv a\{&(x_1\leftrightarrow\overline{a}_2\overline{a}_3)(x_2\leftrightarrow a_2\overline{a}_3)(x_3\leftrightarrow a_3)\\ \vee&(x_1\leftrightarrow\overline{a}_2\overline{a}_3)(x_2\leftrightarrow a_2)(x_3\leftrightarrow\overline{a}_2 a_3)\\ \vee&(x_1\leftrightarrow a_1)(x_2\leftrightarrow\overline{a}_1\overline{a}_3)(x_3\leftrightarrow\overline{a}_1 a_3)\\ \vee&(x_1\leftrightarrow a_1)(x_2\leftrightarrow\overline{a}_1 a_2)(x_3\leftrightarrow\overline{a}_1\overline{a}_2)\}. \qquad (3.16'')!!\end{aligned}$$

[注意3.2参照]

このように三値命題Xは三つの二値命題 x_1, x_2, x_3（実は $\overline{x}_1\overline{x}_2$ のときは x_3 が成立するので二つで充分）で表わされるが，三値命題の形にまとめるには，次のように，演算法則を

与えると，具体例になる。

例 3.2

$$\left.\begin{array}{ll} & e_1 \equiv 1,\ e_2 \equiv 1/2,\ e_3 \equiv 0, \\ \text{三値論理和} & A \cup B \equiv \max(A, B), \\ \text{三値論理積} & AB \equiv A \cap B \equiv \min(A, B), \\ \text{三値否定} & \overline{A} \equiv 1 - A, \\ \text{三値等値} & A = B, \\ \text{三値恒等} & A \equiv B \end{array}\right\} \quad (3.19)!$$

ここに等値とは両辺の真理値が等しいこと。恒等とは両辺の式 A，B の内容の各因子の真理値の如何に関せず等値になることとする。二値命題の場合の $\vee$ の代りに $\cup$ を用いるのは，二値命題 x_1，x_2，x_3，a_1，a_2，a_3，P_1，P_2 等の論理和と三値命題 X 等のそれとを区別するためである。

これを用いると

$$X \equiv x_1 \cup \frac{1}{2} x_2 \quad (3.20)!!$$

で表わされるので，(3.16′) 式は (3.21)，(3.21′) 式のように X が三値で表わされる。

$$(3.16) \equiv a \bigvee_{P_1 P_2} \left[X = a_1 (P_1 \vee \overline{a}_2 \overline{a}_3) \cup \frac{1}{2} a_2 (\overline{P}_1 \vee \overline{a}_1)(P_2 \vee \overline{a}_3) \right] \quad (3.21)!!$$

$$\equiv a \left[\left\{ X = \overline{a}_2 \overline{a}_3 \cup \frac{1}{2} \overline{a}_3 \right\} \vee \left\{ X = \overline{a}_2 \overline{a}_3 \cup \frac{1}{2} a_2 \right\} \right.$$

$$\vee\{X = a_1 \cup \tfrac{1}{2}\overline{a_3}\}$$
$$\vee\{X = a_1 \cup \tfrac{1}{2} a_2\}] \qquad (3.21')!!$$

［注意 3.1 参照］

注意3.1　次の公式が成立する。

$$A(B = \tfrac{1}{2}C \cup D) \equiv A(B = \tfrac{1}{2}AC \cup D)$$
$$\equiv A(B = \tfrac{1}{2}C \cup AD). \qquad (3.22)!!$$

$$\tfrac{1}{2}AB \cup \overline{B} \equiv \tfrac{1}{2}A \cup \overline{B}. \qquad (3.23)!!$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\overline{A} \cup A \equiv \tfrac{1}{2} \cup A. \qquad (3.24)!!$$

注意3.2　(3.16″)式に見るように，x_1, x_2, x_3の一般解を構成する特殊解はそれぞれ a_1, $\overline{a_1}a_2$, $\overline{a_1}\overline{a_2}$; $\overline{a_2}\overline{a_3}$, a_2, $\overline{a_2}a_3$; $\overline{a_2}\overline{a_3}$, $a_2\overline{a_3}$, a_3; a_1, $\overline{a_1}\overline{a_3}$, $\overline{a_1}a_3$;
のように循環形を成している。そこで，任意定数S_1, S_2を用いて循環形の解として，(3.25)式を構成してみると，それは原方程式(3.16)に還元するので(3.25)式も一般解の一つの形であることが判る。

$$a\bigvee_{S_1S_2}(x_1 \leftrightarrow S_1 a_1 \vee \overline{S_1}S_2 a_1\overline{a_2} \vee \overline{S_1}\,\overline{S_2}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3})$$
$$(x_2 \leftrightarrow S_1\overline{a_3}\,\overline{a_1} \vee \overline{S_1}S_2 a_2 \vee \overline{S_1}\,\overline{S_2} a_2\overline{a_3})$$
$$(x_3 \leftrightarrow S_1 a_3\overline{a_1} \vee \overline{S_1}S_2\overline{a_1}\,\overline{a_2} \vee \overline{S_1}\,\overline{S_2} a_3) \qquad (3.25)!$$

$$\equiv a\bigvee_{S_1S_2}[(x_1 \leftrightarrow a_1)(x_2 \leftrightarrow \overline{a_3}\,\overline{a_1})(x_3 \leftrightarrow a_3\overline{a_1})S_1$$
$$\vee(x_1 \leftrightarrow a_1\overline{a_2})(x_2 \leftrightarrow a_2)(x_3 \leftrightarrow \overline{a_1}\,\overline{a_2})\overline{S_1}S_2$$
$$\vee(x_1 \leftrightarrow \overline{a_2}\,\overline{a_3})(x_2 \leftrightarrow a_2\overline{a_3})(x_3 \leftrightarrow a_3)\overline{S_1}\,\overline{S_2}]$$

$$\equiv a \bigvee_{S_1 S_2} [\{ x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3\ a_1 (a_3 \vee a_1)(\bar{a}_3 \vee a_1)$$

$$\vee\ \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{a}_1 (\bar{a}_3 \bar{a}_1)(\bar{a}_3 \vee a_1)$$

$$\vee\ \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{a}_1 (a_3 \vee a_1) a_3 \bar{a}_1 \} S_1 \vee \cdots]$$

$$\equiv a \bigvee_{S_1 S_2} [\{ x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 a_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{a}_3 \bar{a}_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 a_3 \bar{a}_1 \}$$

$$\wedge S \vee \{ x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 a_1 \bar{a}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 a_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \} \bar{S}_1 S_2$$

$$\vee \{ x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3\ \bar{a}_2 \bar{a}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 a_2 \bar{a}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 a_3 \} \bar{S}_1 \bar{S}_2]$$

$$\equiv x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 a_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\ a_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 a_3 . \qquad (3.16)!!$$

例 3.3　$e_1 \equiv 1,\ e_2 \equiv 0,\ e_3 \equiv -1$　(3.26)!

和，差を (1.17)式で表したように，2を法とする計算値と定めれば

$$\mathrm{X} \equiv x_1 - x_3 \qquad (3.27)!!$$

となるから，

$$(3.16) \equiv a \bigvee_{P_1 P_2} [\mathrm{X} = a_1 (P_1 \vee \bar{a}_2 \bar{a}_3) - a_3 (\bar{P}_1 \vee \bar{a}_1)$$

$$\wedge (\bar{P}_2 \vee \bar{a}_2)] \qquad (3.28)!!$$

$$\equiv a [(\mathrm{X} = \bar{a}_2 \bar{a}_3 - a_3) \vee \{ \mathrm{X} = \bar{a}_2 \bar{a}_3 - a_3 \bar{a}_2$$

$$= \bar{a}_2 (\bar{a}_3 - a_3) \}$$

$$\vee (\mathrm{X} = a_1 - a_3 \bar{a}_1) \vee (\mathrm{X} = a_1 - \bar{a}_1 \bar{a}_2)]. \qquad (3.28')!!$$

[3.4] 多元三値論理代数方程式の一般解[7] 同様にして

多元 $(X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(n)})$ の場合には

$$(X^{(\nu)}=e_1)\equiv x_1^{(\nu)},\ (X^{(\nu)}=e_2)\equiv x_2^{(\nu)},\ (X^{(\nu)}=e_3)\equiv x_3^{(\nu)};$$

$$\nu=1,2,\cdots,n;$$

$$x_1^{(\nu)}\overline{x_2^{(\nu)}}\ \overline{x_3^{(\nu)}}\equiv\xi_1^{(\nu)},\ \overline{x_1^{(\nu)}}x_2^{(\nu)}\overline{x_3^{(\nu)}}\equiv\xi_2^{(\nu)},\ \overline{x_1^{(\nu)}}\ \overline{x_2^{(\nu)}}x_3^{(\nu)}\equiv\xi_3^{(\nu)} \tag{3.29}$$

とおくと，n元三値論理代数方程式は(3.30)式で表わされるから，一元の場合と同様にして，

$$\bigvee_{m_1=1}^{3}\bigvee_{m_2=1}^{3}\cdots\bigvee_{m_n=1}^{3}a_{m_1m_2\cdots m_n}\xi_{m_1}^{(1)}\xi_{m_2}^{(2)}\cdots\xi_{m_n}^{(n)} \tag{3.30}$$

$$\equiv a\bigvee_{P_1^{(1)}P_2^{(1)}P_1^{(2)}\cdots P_2^{(n-1)}P_1^{(n)}P_2^{(n)}}[x_1^{(1)}\leftrightarrow a_1(P_1^{(1)}\vee\bar a_2\bar a_3)]$$
$$[x_2^{(1)}\leftrightarrow a_2(\overline{P_1^{(1)}}\vee\bar a_1)(P_2^{(1)}\vee\bar a_3)]$$
$$[x_3^{(1)}\leftrightarrow a_3(\overline{P_1^{(1)}}\vee\bar a_1)(\overline{P_2^{(1)}}\vee\bar a_2)]$$
$$[x_1^{(2)}\leftrightarrow a_{11}x_1^{(1)}(P_1^{(2)}\vee\bar a_{12}\bar a_{13})$$
$$\vee\ a_{21}x_2^{(1)}(P_1^{(2)}\vee\bar a_{22}\bar a_{23})$$
$$\vee\ a_{31}x_3^{(1)}(P_1^{(2)}\vee\bar a_{32}\bar a_{33})]$$
$$[x_2^{(2)}\leftrightarrow a_{12}x_1^{(1)}(\overline{P_1^{(2)}}\vee\bar a_{11})(P_2^{(2)}\vee\bar a_{13})$$
$$\vee\ a_{22}x_2^{(1)}(\overline{P_1^{(2)}}\vee\bar a_{21})(P_2^{(2)}\vee\bar a_{23})$$
$$\vee\ a_{32}x_3^{(1)}(\overline{P_1^{(2)}}\vee\bar a_{31})(P_2^{(2)}\vee\bar a_{33})]$$
$$[x_3^{(2)}\leftrightarrow a_{13}x_1^{(1)}(\overline{P_1^{(2)}}\vee\bar a_{11})(\overline{P_2^{(2)}}\vee\bar a_{12})$$
$$\vee\ a_{23}x_2^{(1)}(\overline{P_1^{(2)}}\vee\bar a_{21})(\overline{P_2^{(2)}}\vee\bar a_{22})$$

$$\vee\, a_{33}\, x_3^{(1)} (\overline{P_1^{(2)}} \vee \overline{a_{31}})(\overline{P_2^{(2)}} \vee \overline{a_{32}})]$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$[x_1^{(n)} \leftrightarrow \bigvee_{m_1=1}^{3} \cdots \bigvee_{m_{n-1}=1}^{3} a_{m_1 m_2 \cdots m_{n-1} 1}\, x_{m_1}^{(1)} x_{m_2}^{(2)} \cdots x_{m_{n-1}}^{(n-1)}$$
$$(P_1^{(n)} \vee \overline{a_{m_1 m_2 \cdots m_{n-1} 2}}\ \ \overline{a_{m_1 \cdots m_{n-1} 3}})]$$

$$[x_2^{(n)} \leftrightarrow \bigvee_{m_1=1}^{3} \cdots \bigvee_{m_{n-1}=1}^{3} a_{m_1 \cdots m_{n-1} 2}\, x_{m_1}^{(1)} \cdots x_{m_{n-1}}^{(n-1)}$$
$$(\overline{P_1^{(n)}} \vee \overline{a_{m_1 \cdots m_{n-1} 1}})(P_2^{(n)} \vee \overline{a_{m_1 \cdots m_{n-1} 3}})]$$

$$[x_3^{(n)} \leftrightarrow \bigvee_{m_1=1}^{3} \cdots \bigvee_{m_{n-1}=1}^{3} a_{m_1 \cdots m_{n-1} 3}\, x_{m_1}^{(1)} \cdots x_{m_{n-1}}^{(n-1)}$$
$$(\overline{P_1^{(n)}} \vee \overline{a_{m_1 \cdots m_{n-1} 1}})(\overline{P_2^{(n)}} \vee \overline{a_{m_1 \cdots m_{n-1} 2}})],$$

(3.30′)!!

ここに
$$\left.\begin{aligned} &a \equiv a_1 \vee a_2 \vee a_3,\ \cdots\cdots \\ &a_{m_1 \cdots m_\nu} \equiv a_{m_1 \cdots m_\nu 1} \vee a_{m_1 \cdots m_\nu 2} \vee a_{m_1 \cdots m_\nu 3} \end{aligned}\right\} \quad (3.31)!$$

$x_\mu^{(\nu)}$ の解は $a_{m_1 m_2 \cdots m_{\nu-1} \mu}$ なる係数の $m_1, \cdots, m_{\nu-1}\, \mu$ に対応して次に続く因数の形が定まっている。即ち

λ番目に 1 なる添字のある係数 $a_{\cdots 1 \cdots}$ に対応しては

$$\cdots\cdots (P_1^{(\lambda)} \vee \overline{a_{m_1 \cdots m_{\lambda-1} 2}}\ \ \overline{a_{m_1 \cdots m_{\lambda-1} 3}}) \cdots\cdots \qquad (3.32)!!$$

なる因数が存在する。

λ番目に 2 なる添字のある係数 $a_{\cdots 2 \cdots}$ に対応しては

$$\cdots\cdots (\overline{P_1^{(\lambda)}} \vee \overline{a_{m_1 \cdots m_{\lambda-1} 1}})(P_2^{(\lambda)} \vee \overline{a_{m_1 \cdots m_{\lambda-1} 3}}) \cdots, \quad (3.33)!!$$

λ番目に 3 なる添字のある係数 $a_{\cdots 3 \cdots}$ に対応しては

$$\cdots\cdots\ (\overline{P_1^{(\lambda)}} \vee \overline{a_{m_1\cdots m_{\lambda-1}1}})(\overline{P_2^{(\lambda)}} \vee \overline{a_{m_1\cdots m_{\lambda-1}2}})\cdots \qquad (3.34)!!$$

が存在する。例えば式(3.30')において，$x_3^{(2)}$は

$$\begin{aligned} x_3^{(2)} \Leftrightarrow\ & a_{13}(\overline{P_1^{(1)}} \vee \overline{a_2 a_3})(\overline{P_1^{(2)}} \vee \overline{a_{11}})(\overline{P_2^{(2)}} \vee \overline{a_{12}}) \\ & \vee a_{23}(\overline{P_1^{(1)}} \vee \overline{a_1})(\overline{P_2^{(2)}} \vee \overline{a_3})(\overline{P_1^{(2)}} \vee \overline{a_{21}})(\overline{P_2^{(2)}} \vee \overline{a_{22}}) \\ & \vee a_{33}(\overline{P_1^{(1)}} \vee \overline{a_1})(\overline{P_2^{(2)}} \vee \overline{a_2})(\overline{P_1^{(2)}} \vee \overline{a_{31}})(\overline{P_2^{(2)}} \vee \overline{a_{32}}) \end{aligned} \qquad (3.35)!!$$

なる解で表わされる。

注意3.3　例3.2と同様に(3.19)式に基づけば

$$X^{(\nu)} = x_1^{(\nu)} \cup \frac{1}{2} x_2^{(\nu)}. \qquad (3.36)!!$$

例3.3と同様に(1.17)式に基づけば

$$X^{(\nu)} = x_1^{(\nu)} - x_3^{(\nu)}. \qquad (3.37)!!$$

[3.5] 多値論理への拡張　これまで三値論理として取扱った事項を多値論理に拡張するには，真理値を$e_1, e_2, \cdots, e_m$とし，未知項を$X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}$とすれば

$$(X^{(\nu)} = e_\mu) \equiv x_\mu^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n;\ \mu = 1, 2, \cdots, m. \qquad (3.38)!$$

と置くことにより，$x_\mu^{(\nu)}$は二値となるから，論理代数方程式を(3.40)としたときの一般解は(3.40')式となる。(3.40'')式は循環形の例である[注意3.2参照]。

$$\left.\begin{aligned} & x_1^{(\nu)} \overline{x}_2^{(\nu)} \overline{x}_3^{(\nu)} \cdots \overline{x}_m^{(\nu)} \equiv \xi_1^{(\nu)}, \\ & \overline{x}_1^{(\nu)} x_2^{(\nu)} \overline{x}_3^{(\nu)} \cdots \overline{x}_m^{(\nu)} \equiv \xi_2^{(\nu)}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.39)!$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{- - - - - - - - - - -} \\ \overline{x}_1^{(\nu)}\overline{x}_2^{(\nu)}\cdots\overline{x}_{m-1}^{(\nu)}x_m^{(\nu)} \equiv \xi_m^{(\nu)} \end{array}\right)$$

とおけば

$$\bigvee_{m_1=1}^{m}\cdots\bigvee_{m_n=1}^{m} a_{m_1 m_2\cdots m_n}\xi_{m_1}^{(1)}\xi_{m_2}^{(2)}\cdots\xi_{m_n}^{(n)} \qquad (3.40)!$$

$$\equiv a \bigvee_{P_1^{(1)}\cdots P_{m-1}^{(1)} P_1^{(2)}\cdots P_{m-1}^{(2)} P_1^{(3)}\cdots P_{m-1}^{(n-1)} P_1^{(n)}\cdots P_{m-1}^{(n)}}$$

$$[x_1^{(1)} \leftrightarrow a_1 (P_1^{(1)} \vee \overline{a}_2\overline{a}_3\cdots\overline{a}_m)]$$

$$[x_2^{(1)} \leftrightarrow a_2 (\overline{P_1^{(1)}} \vee \overline{a}_1)(P_2^{(1)} \vee \overline{a}_3\overline{a}_4\cdots\overline{a}_m)]$$

$$[x_3^{(1)} \leftrightarrow a_3 (\overline{P_1^{(1)}} \vee \overline{a}_1)(\overline{P_2^{(1)}} \vee \overline{a}_2)(P_3^{(1)} \vee \overline{a}_4\overline{a}_5\cdots\overline{a}_m)]$$

- - - - - - - - - - - - -

$$[x_{m-1}^{(1)} \leftrightarrow a_{m-1} (\overline{P_1^{(1)}} \vee \overline{a}_1)\cdots(\overline{P_{m-2}^{(1)}} \vee \overline{a_{m-2}})(P_{m-1}^{(1)} \vee \overline{a_m})]$$

$$[x_m^{(1)} \leftrightarrow a_m (\overline{P_1^{(1)}} \vee \overline{a}_1)\cdots(\overline{P_{m-1}^{(1)}} \vee \overline{a_{m-1}})]$$

$$\bigwedge_{\nu=2}^{n}\Bigl\{[x_1^{(\nu)} \leftrightarrow \bigvee_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\nu-1}=1}^{m} x_{\mu_1}^{(1)} x_{\mu_2}^{(2)}\cdots x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$$

$$a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}1}(P_1^{(\nu)} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}2}}\cdots\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}m}})]$$

$$[x_2^{(\nu)} \leftrightarrow \bigvee_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\nu-1}=1}^{m} x_{\mu_1}^{(1)} x_{\mu_2}^{(2)}\cdots x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$$

$$a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}2}(\overline{P_1^{(\nu)}} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}1}})(P_2^{(\nu)} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}3}}\cdots\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}m}})]$$

- - - - - - - - - - - -

$$[x_{m-1}^{(\nu)} \leftrightarrow \bigvee_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\nu-1}=1}^{m} x_{\mu_1}^{(1)} x_{\mu_2}^{(2)}\cdots x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$$

$$a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}(m-1)}(\overline{P_1^{(\nu)}} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}1}})\cdots(\overline{P_{m-2}^{(\nu)}} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}(m-2)}})(P_{m-1}^{(\nu)} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}m}})]$$

$$\Big[x_m^{(\nu)} \leftrightarrow \bigvee_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\nu-1}=1}^{m} x_{\mu_1}^{(1)} x_{\mu_2}^{(2)} \cdots x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$$

$$a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}m}\,(\overline{P_1^{(\nu)}} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}1}}) \cdots (\overline{P_{m-1}^{(\nu)}} \vee \overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}(m-1)}})\Big]\Big] \qquad (3.40')!!$$

$$\equiv a \bigvee_{S_1^{(1)}\cdots S_{m-1}^{(1)} S_1^{(2)}\cdots S_{m-1}^{(2)} S_1^{(3)}\cdots S_{m-1}^{(n-1)} S_1^{(n)}\cdots S_{m-1}^{(n)}}$$

$$\Big[x_1^{(1)} \leftrightarrow a_1\big(S_1^{(1)}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3}\cdots\overline{a_m} \vee \overline{S_1^{(1)}}S_2^{(1)}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3}\cdots\overline{a_{m-1}} \vee \cdots\cdots$$

$$\vee\ \overline{S_1^{(1)}}\,\overline{S_2^{(1)}}\cdots\overline{S_{m-2}^{(1)}}\,S_{m-1}^{(1)}\,\overline{a_2} \vee \overline{S_1^{(1)}\cdots S_{m-1}^{(1)}}\big)\Big]$$

$$\Big[x_2^{(1)} \leftrightarrow a_2\big(S_1^{(1)}\,\overline{a_3}\,\overline{a_4}\cdots\overline{a_m} \vee \overline{S_1^{(1)}}S_2^{(1)}\,\overline{a_3}\,\overline{a_4}\cdots\overline{a_{m-1}} \vee \cdots\cdots$$

$$\vee\ \overline{S_1^{(1)}}\,\overline{S_2^{(1)}}\cdots\overline{S_{m-2}^{(1)}}\,S_{m-1}^{(1)} \vee \overline{S_1^{(1)}}\cdots\overline{S_{m-1}^{(1)}}\,\overline{a_3}\,\overline{a_4}\cdots\overline{a_m}\,\overline{a_1}\big)\Big]$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$\Big[x_m^{(1)} \leftrightarrow a_m\big(S_1^{(1)} \vee \overline{S_1^{(1)}}S_2^{(1)}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_{m-1}} \vee \cdots\cdots$$

$$\vee\ \overline{S_1^{(1)}}\,\overline{S_2^{(1)}}\cdots\overline{S_{m-2}^{(1)}}\,S_{m-1}^{(1)}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2} \vee \overline{S_1^{(1)}}\cdots\overline{S_{m-1}^{(1)}}\,\overline{a_1}\big)\Big]$$

$$\bigwedge_{\nu=2}^{n}\Big(\Big[x_1^{(\nu)} \leftrightarrow \bigvee_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\nu-1}=1}^{m} x_{\mu_1}^{(1)} x_{\mu_2}^{(2)} \cdots x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$$

$$a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}1}\big(S_1^{(\nu)}\,\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}2}}\cdots\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}m}}$$

$$\vee\ \overline{S_1^{(\nu)}}S_2^{(\nu)}\,\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}2}}\,\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}3}}\cdots\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}(m-1)}} \vee \cdots\cdots$$

$$\vee\ \overline{S_1^{(\nu)}}\,\overline{S_2^{(\nu)}}\cdots\overline{S_{m-2}^{(\nu)}}\,S_{m-1}^{(\nu)}\,\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}2}} \vee \overline{S_1^{(\nu)}}\cdots\overline{S_{m-1}^{(\nu)}}\big)\Big]$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$\Big[x_m^{(\nu)} \leftrightarrow \bigvee_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\nu-1}=1}^{m} x_{\mu_1}^{(1)} x_{\mu_2}^{(2)} \cdots x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$$

$$a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}m}\big(S_1^{(\nu)} \vee \overline{S_1^{(\nu)}}S_2^{(\nu)}\,\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}1}}\,\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}2}}\cdots\overline{a_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}(m-1)}}$$

$$\vee \cdots \vee \overline{S_1^{(\nu)}} \cdots \overline{S_{m-2}^{(\nu)}}\, S_{m-1}^{(\nu)}\, \overline{a_{\mu_1 \cdots \mu_{\nu-1} 1}}\; \overline{a_{\mu_1 \cdots \mu_{\nu-1} 2}} \vee \overline{S_1^{(\nu)}} \cdots \overline{S_{m-1}^{(\nu)}}\, \overline{a_{\mu_1 \cdots \mu_{\nu-1} 1}} \Big) \Big] \qquad (3.40'')!!$$

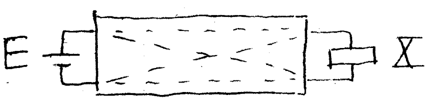
ここに

$$a \equiv a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_m, \quad a_{\mu_1} \equiv a_{\mu_1 1} \vee a_{\mu_1 2} \vee \cdots \vee a_{\mu_1 m},$$

$$\cdots, \quad a_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{\nu-1}} \equiv a_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{\nu-1} 1} \vee a_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{\nu-1} 2} \vee \cdots \vee a_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{\nu-1} m}.$$

4 論理関数方程式とその応用

〔4・1〕継電要素の励起条件[1] 電磁継電器の場合を例にとると，第4.1図の継電要素Xが働らく（その状態を真理



第4.1図

爲の必要充分条件は

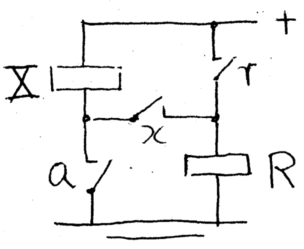
「(i) Xが電源Eと往復線で接続されていること。

(ii) Xの電源側において短絡されていないこと。」

である。この場合EとXとの間の接続は，途中にある接点（$x, y, z, \cdots, u$）の動作状態（開路を真理値0で，閉路を1で表わす）で定められる。xはXによって働かされる接点を表わす。一般に，xはXよりτだけ動作遅れがあるから，

$$x(t)=X(t-\tau)\equiv D_\tau X. \qquad (4.1)$$

τは，自然に生ずる時間遅れの場合と，故意に一定時間だけ遅らす場合とある。



第4.2図

例えば第4.2図の場合には

$$\left.\begin{aligned} X &= a\,\overline{(xr)} \vee x\overline{r}, \\ R &= r\,\overline{(ax)} \vee x\overline{a} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

となる。

電子継電器の場合には，(4.2)式のX，Rは入力となり，x，rはその出力となる。X，Rはそ

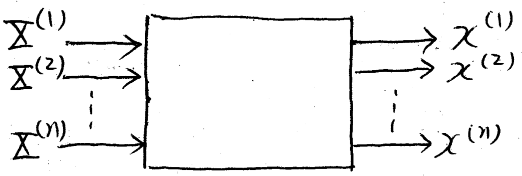
の場合，方向性があるので，逆方向の電圧が掛かる場合は，異なる特性となるから，X'，R'として別の記号で扱うことができる。以上は二値論理による式であるが，〔1，1〕に述べた，0，½，1を用いる三値論理においても成立する。

一般には

$$X^{(\nu)}=F^{(\nu)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}; a^{(1)}, \cdots, a^{(p)}) \qquad (4.3)!$$

なる関係がある。電子継電要素を含む場合には，$X^{(\nu)}$がそれの入力信号である。この回路網の内部で生れた信号$x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$と外部からの制御信号$a^{(1)}, \cdots, a^{(p)}$とによって回路状態が定まるので，それにより入力信号$X^{(\nu)}$が定められる。

〔4，2〕 一般継電要素の場合　入力信号$X^{(\mu)}$と出力信号との間に

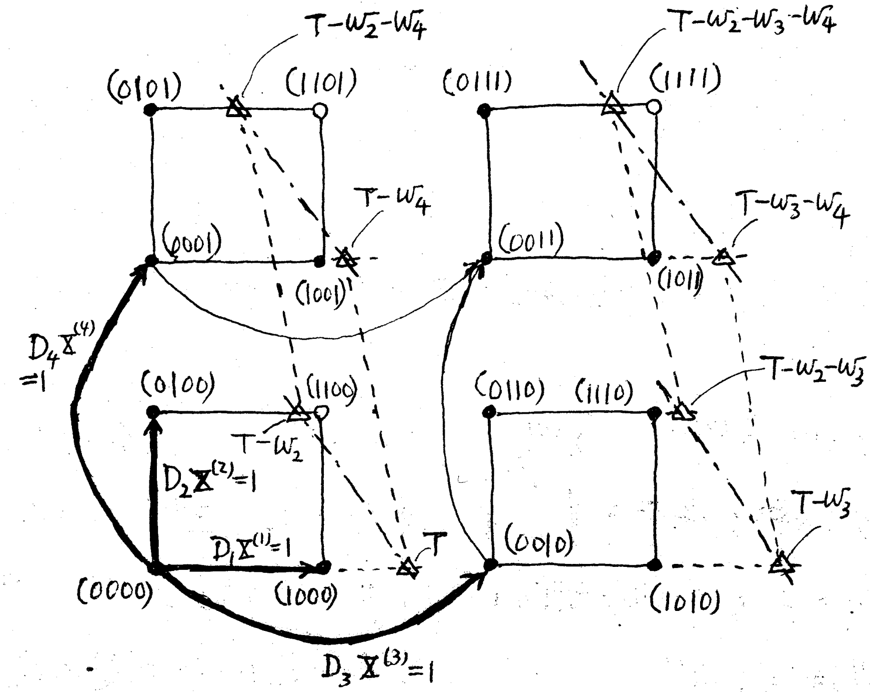


第4.3図

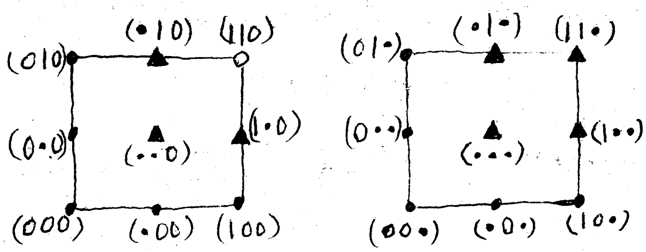
$$x^{(\nu)}=f^{(\nu)}(D_1X^{(1)}, \cdots, D_nX^{(n)}),$$
$$\nu=1, 2, \cdots, n. \qquad (4.4)!$$

なる関係があって，$x^{(\nu)}$が$D_\nu X^{(\nu)}$だけでは定まらない場合は，閾値継電要素の一般化されたものになる。$X^{(\nu)}$，$x^{(\nu)}$が多値の場合にも同様である。第4．4図は4次元立方体であるが，鎖線は［（4．5）式の＝の場合］4次元平面と4次元立方体との交線を示している。

$$w_1(D_1X^{(1)})+w_2(D_2X^{(2)})+w_3(D_3X^{(3)})+w_4(D_4X^{(4)}) \leqq T, \quad (4.5)!$$



第4.4図



第4.5図

(4.5)式の条件で $x^{(\nu)}=1$ となることを示している。

第4.4図において、特に0、1間に½を設ける場合には、第4.5図のように変わる。図中の(・10)等の・は½を表わす。第4.5図の右の図は第4.4図の下左図と下右図との中間に新設すべきものである。▲印は●になるか○になるか不確定のものである。

［4.3］ 論理関数方程式　(4.3)式と(4.4)式とを結合すると、Dを含んだ方程式になる。これは論理関数方程式となる。

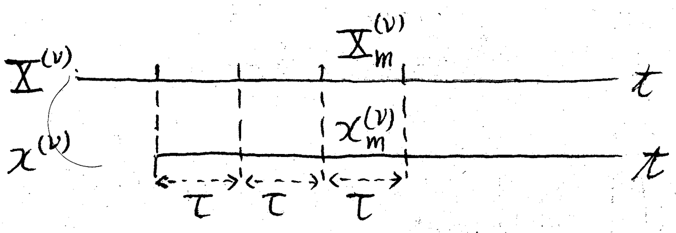
即ち(4.4)式に $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$; $a^{(1)}, \cdots, a^{(l)}$ の初期条件

を与えると，そのときの $X^{(\nu)}$ が求められ，それを（4.5）式に入れると，遅延時間τ後の $x^{(\nu)}$ が定められ，順次に $X^{(\nu)}$ の変化が定められる。

例えば，簡単の為に

$$D_1 = \cdots = D_n \equiv D \qquad (4.6)$$

なる場合を考えると，Dによってでだけ遅れる場合には，第4.6図のように時間τの区間に区切って第m区間の $X^{(\nu)}, x^{(\nu)}$



第4.6図

をそれぞれ $X_m^{(\nu)}, x_m^{(\nu)}$ と名付ければ，$X^{(\nu)}$ が二値ならば（もしも二値でないならば $(X^{(\nu)}=e_\mu)$ を代りに使う），

$$\begin{aligned} x_m^{(\nu)} &= f^{(\nu)}(X_{m-1}^{(1)}, X_{m-1}^{(2)}, \cdots, X_{m-1}^{(n)}) \\ &= \bigvee_{\lambda=1}^{2^n} C_{m-1}^{\nu(\lambda)}\ \xi_{m-1}^{(\lambda)} \\ &= \left[C_{m-1}^{\nu(1)}, C_{m-1}^{\nu(2)}, \cdots, C_{m-1}^{\nu(2^n)} \right] \begin{bmatrix} \xi_{m-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_{m-1}^{(2^n)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (4.7)$$

ここに
$$\begin{aligned} \xi_{m-1}^{(1)} &\equiv \bar{X}_{m-1}^{(1)}\ \bar{X}_{m-1}^{(2)} \cdots \bar{X}_{m-1}^{(n)}, \\ \xi_{m-1}^{(2)} &\equiv \bar{X}_{m-1}^{(1)}\ \bar{X}_{m-1}^{(2)} \cdots \bar{X}_{m-1}^{(n-1)}\ X_{m-1}^{(n)}, \\ &- - - - - - - \end{aligned}$$

$$\xi^{(2^n)}_{m-1} \equiv \mathrm{X}^{(1)}_{m-1} \cdots \mathrm{X}^{(n)}_{m-1}.$$

即ち $\xi^{(\lambda)}_{m-1}$ は $\mathrm{X}^{(\nu)}_{m-1}$, $\nu=1,\cdots,n$ で作られた基本積。

次に $x^{(\nu)}_{m}$, $\nu=1,\cdots,n$ で作られた基本積を $\varphi^{(\mu)}_m$ とし, $C^{\nu(\lambda)}_{m-1}$, $\nu=1,\cdots,n$ で作られた基本積を $\varkappa^{\mu(\lambda)}_{m-1}$ とすると,

$$\begin{bmatrix} \varphi^{(1)}_m \\ \varphi^{(2)}_m \\ \vdots \\ \varphi^{(2^n)}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varkappa^{1(1)}_{m-1} & \varkappa^{1(2)}_{m-1} & \cdots & \varkappa^{1(2^n)}_{m-1} \\ \varkappa^{2(1)}_{m-1} & \varkappa^{2(2)}_{m-1} & \cdots & \varkappa^{2(2^n)}_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varkappa^{2^n(1)}_{m-1} & \varkappa^{2^n(2)}_{m-1} & \cdots & \varkappa^{2^n(2^n)}_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{(1)}_{m-1} \\ \xi^{(2)}_{m-1} \\ \vdots \\ \xi^{(2^n)}_{m-1} \end{bmatrix}. \qquad (4.8)!!$$

これを略記すれば

$$[\varphi_m] = [\varkappa_{m-1}][\xi_{m-1}]. \qquad (4.8')!!$$

次に, (4.3)式の $\mathrm{X}^{(\nu)}_m$ と $x^{(\nu)}_m$ との関係を基本積 $\xi^{(\sigma)}_m$ と $\varphi^{(\mu)}_m$ との関係に書換えると

$$[\xi_m] = [\Phi_m][\varphi_m] \qquad (4.9)!!$$

なる形となる。$[\Phi_m]$ の要素中に $a^{(1)}_m,\cdots,a^{(l)}_m$ が含まれる。

[ここに

$$\mathrm{X}^{(\nu)}_m = \bigvee_{\mu=1}^{2^n} F^{\nu(\mu)}_m \,\varphi^{(\mu)}_m. \qquad (4.10)$$

$F^{\nu(\mu)}_m$ 中に $a^{1}_m,\cdots,a^{(l)}_m$ が含まれている。

この $\mathrm{X}^{(\nu)}_m$ を使って基本積を作ったマトリクスを $[\xi_m]$ とする。
それに伴い $F^{\nu(\mu)}_m$, $\nu=1,\cdots,n$ を使って基本積を作ったマトリクスを $[\Phi_m]$ とする。]

(4.9)式と(4.8')式とを結合すると

$$[\varphi_m] = [\chi_{m-1}][\Phi_{m-1}][\varphi_{m-1}], \qquad (4.11)!!$$

$$\therefore [\varphi_m] = [\chi_{m-1}][\Phi_{m-1}][\chi_{m-2}][\Phi_{m-2}]\cdots[\chi_0][\Phi_0][\varphi_0]. \qquad (4.12)!!$$

これにより初期条件$[\varphi_0]$と外部よりの制御作用（$[\Phi_0]$, ⋯, $[\Phi_{m-1}]$に含まれている）とを与えれば$[\varphi_m]$即ちm区間（$m\tau$時間）後の状態が表わされる。

引用文献

(1) 後藤：三値論理学の継電器回路網理論への応用
電気三学会東京連大講演要旨 p.3（昭23）
後藤：論理数学方程式の継電器回路網理論への応用
電学誌 69巻 p.125（昭24）
後藤：論理数学による最小継電器数の回路網の構成について 電試彙13巻 p.474（昭24）

(2) 三根，長谷川，島田：3進四則演算の一方式について
電子通信学会電子計算機研究会資料（昭44年10月）

(3) 向殿：C型 Fail Safe 論理の数学的構造について
電子通信学会論文誌 C 52巻 12号 p.812（昭44年12月）

(4) 向殿：3値を用いた Fail-Safe 論理回路
数理解析研究所 多値論理とその応用研究集会（昭45年2月）

(5) 後藤：論理数学の方程式の解と其応用
電試紀念論文集 p.1（昭23）

(6) 後藤：多元論理代数方程式の一般解について
電試彙報 20巻2号 p.81 (昭31年2月)
(7) 後藤：多元多値論理代数方程式の一般解の諸形式
電試彙報 20巻9号 p.671 (昭31年9月).