数理解析研究所講究録
第82巻 1970年 89-98

多段論理回路網の代数的構成法

東北大学　通研　野口正一

§1 はじめに

空間的に規則的に配列されている論理素子の結合により，極めて複雑な論理回路が構成できる。このような回路網の性質を調べることは理論的な立場から興味あることであるが，工学的にもIC回路構成のための基本的問題として重要なことである。本論文はオ一段階として一次元接属回路網の性質を代数的な立場から考察したもので，多段論理回路網の表現法及び合成法について示したものである。

§2 多段論理回路網

§§2・1 回路網の定義

オ一図は一次元接属回路を示し，情報伝達方向には$\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$なる$k$本の入力，上より$\{z_1, z_2, \cdots, z_m\}$なる$m$本の入力を有するものとする。ここで$y_i$は0又は1，$z_i$は$X_n = \{0, 1, x_1, \bar{x}_1, \cdots, x_n, \bar{x}_n\}$なる集合から夫々

とられるもので x_i は1又は0の変数である．又最終端子 $F=(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ は合成された k 個の論理関数を示す。$(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ を入力変数，$\{y_1, \cdots, y_k\}$ を状態変数という。回路の各素子の F_i（以下セルという）が異なるとき回路網を多段論理回路，$F_1=F_2=\cdots=F_l=F$ のとき反復論理回路という。又入力条件が夫々 m, k なるものを $(m+k, k)$ セルという。二次元及び多次元の場合の定義も同様に与えられ，第二図は二次元の場合の構成を示す。

§§2．2　セルの動作表示

第三図は一個のセルの動作を示す。今 $\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$, $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_k\}$ に2進表示 $y_1+y_2 2^1+\cdots+y_k 2^{k-1}$ 等を対応させると動作表示は状態変数 $N=(0, 1, \cdots, 2^k-1)$ の変換としてつぎの表で与えられる。

$z_m\ z_{m-1} \cdots z_1$	$y_k \cdots y_1$	$Y_k \cdots Y_1$	T_N
$0\ 0 \cdots 0$	0	$i_{0,0}$	
$0\ 0 \cdots 0$	1	$i_{1,0}$	
	$\vdots$	$\vdots$	t_0
$0\ 0 \cdots 0$	2^k-1	$i_{2^k-1,0}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1\ 1 \cdots 1$	0	$i_{0,2^k-1}$	
$1\ 1 \cdots 1$	1	$i_{1,2^k-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	t_{2^m-1}
$1\ 1 \cdots 1$	2^k-1	$i_{2^k-1,2^k-1}$	

$\mathcal{T}_N$はN上の変換半群を示し，各t_iは $t_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 2^k-1 \\ i_{0,i} & \cdots & i_{2^k-1,i} \end{pmatrix}$ である。各t_i間の演算は明らかに半群Tを構成し，これよりつぎの重要な結論が導かれる。今X_nより選んだm個の入力変数を$X_n^{(m)}$とすれば $f: X_n^{(m)} \to T$ なる半群関数が定義され，夫々のセルの動作を示す。又任意の二つのセル $f_i: X_n^{(m)} \to T$, $f_j: X_n'^{(m)} \to T$ を接続することは $f=f_i\cdot f_j : X_n^{(m)} \times X_n'^{(m)} \to T$ の関数が与えられることであり，$f_i(X_n^{(m)})=(t_0, t_1, \cdots, t_{2^n-1})$，$f_j(X_n'^{(m)})=(t_0', t_1', \cdots t_{2^n-1}')$ （n個の変数が対象である。）とすれば $f=(t_0\cdot t_0', t_1\cdot t_1', \cdots, t_{2^n-1}\cdot t_{2^n-1}')$ である。
以上のことを拡張すれば一般にl個のセルを用いて $f: X_n^{(m)_1} \times X_n^{(m)_2} \times \cdots \times X_n^{(m)_l} \to T$ なる半群関数が定義できる。半群Tが特に群の場合には色々の性質が見通し易い。以下の議論はTが群Hの場合について考察する。

§3 回路網の表示

回路網の性質は前章での議論から判るように各t_iが与えられれば完全に定まる。しかしこのままでは取扱いが不便なので今少し便利な表示法を示す。このためには具体的な群Hを定める必要がある。以下Hが二つの代表的な群の場合について考察する。

§§ 3・1 巡回群C_rによる表現

$r \geq 2^k$，なる巡回群をC_r，その生成元をaとする。特に

I(n+k, k) セルで，入力変数 $X_n^{(m)}=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in}\}$ としたとき $x_{i1}=x_{i2}=\cdots\cdots x_{in}=1$ のときのみ変換 a を与え，それ以外のときは $a^0=e$（単位元）を与えるセルを対象とする。このセルを標準セルという。明らかにこのセルは最大変換能力を有するセルの一つである。今変換 a^i, a^j なる二つのセルを接続すると $a^{i\oplus j}$（⊕は mod r）なる変換を行う。即ち C_r の元間の演算として加法が定義されつぎに示される。 $a^i\oplus a^j=a^{i\oplus j}$ —(1)

又以下のため加法の作用素として乗法 $a^i\cdot a^j=a^{i\cdot j}$ — (2) を定義する。さて標準セルを用いるとブール関数における最小項入力 $m_0, m_1,\cdots, m_{2^n-1}$ に対し $f(m_i)=\eta_i=(\overbrace{e,\cdots,a}^{i+1}, e\cdots e)_{2^n}$ — (3) である。$\{\eta_i\}$ は 2^n 次元のベクトルであり，多元環をなしつぎの関係が成立する。 $\lambda_i\eta_i\oplus\lambda_j\eta_j=(e,\cdots e, a^{\lambda_i}, e\cdots, a^{\lambda_j}, e\cdots e)$, $\lambda_i,\lambda_j\in Z/r$

変換表の対応より m_i と η_i には同型写像が対応し，セルの入力と，それに対応する η を同一視してもよい。以下mをηと同一視する。これより I(m+k, k) の場合でも入力 $X_n^{(m)_1}, X_n^{(m)_2}, \cdots, X_n^{(m)_l}$ なる l 個のセルの接続より群関数 $f(X_n^{(m)_1}, X_n^{(m)_2}, \cdots, X_n^{(m)_l})=X_n^{(m)_1}\oplus\cdots\oplus X_n^{(m)_l}$ が定まる。一般にn変数の入力集合を $\tilde{X}^n$ とすると全く同様に $f:\tilde{X}^n\rightarrow H$ が求まる。特に $f(d_1m_1, d_2m_2, \cdots d_{2^n-1}m_{2^n-1})$ $=\sum_{i=0}^{2^n-1} d_i m_i$ — (4) を最小項表示という。各 m_i は基底をなす。つぎに否定入力について考察する。 $\bar{x}_1=(a, e, a, e\cdots e)_{2^n}$

$= (a, \cdots, a) \oplus (e, a^{r-1}, \cdots, e, a^{r-1})_{2^n} = 1 \oplus (r-1) x_1$,

$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = 1 \oplus (r-1) x_1 \oplus (r-1) x_2 \oplus x_1 x_2$ 等の関係より否定変数を含まぬ独立変数 $X = \{1, x_1, \cdots, x_n, \cdots x_1 x_2 \cdots x_n\}$ が基底として選べる。U を X を基底とする加群とすれば U は Z/r 上 2^n 次元の多元環であり, $f(c_0 T_0, c_1 T_1, \cdots c_{2^n-1} T_{2^n-1}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i T_i$, $T_i \in X$ —(5) で与えられる. (5) を多元環表示という。最少項表示と多元環表示とは等価であり夫々の係数 d_i, c_i 間にはつぎの関係が成立する。

$$D_n = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{2^n-1} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{2^n-1} \end{bmatrix} \text{ とすると } C_n = M_n D_n \quad \text{—(6)}$$

ここで $M_n = \begin{bmatrix} M_{n-1} & 0 \\ \bar{M}_{n-1} & M_{n-1} \end{bmatrix}$, $M_1 = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ r-1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} r-1 & 0 \\ 1 & r-1 \end{bmatrix}$

で $\bar{M}_k$ は M_k の 1 を $(r-1)$ に入れ換えたものである。

§ 3・2 基本可換群 C_2^k による表示

$C_2^k = \overbrace{C_2 \times C_2 \times \cdots C_2}^{k}$ とすると C_2^k にはつぎの性質がある。

基本可換群 C_2^k は $GF(2)$ の上の k 次元ベクトル空間と同型で生成元は次の k 個である。

$$\begin{cases} a_{2^0} = (1, 2^k)(2, 3) \cdots, (2^k-2, 2^k-1) \\ a_{2^1} = (2, 2^k)(1, 3) \cdots (2^k-3, 2^k-1) \\ \vdots \\ a_{2^{k-1}} = (2^{k-1}, 2^k)(1, 2^{k-1}+1) \cdots (2^{k-1}-1, 2^k-1) \end{cases}$$

C_2^k の任意の元 a_i は $a_i = a_{2^0}^{\varepsilon_0} \cdots a_{2^{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}$ で表現できる。各 a_i 間の演算は k 次元ベクトル $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{k-1})$ 上の加法及び乗法として前節と同様に定義され，群関数 $f : \tilde{X}^n \to C_2^k$ はつぎの形で表現できる。$f(\tilde{X}^n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (\varepsilon_{i,0}, \varepsilon_{i,1}, \cdots \varepsilon_{i,k-1}) m_i$ —(7)

これを最小項表示という。明らかにこの場合標準セルは k 個必要である。(7)式は前節と同様 X を基底とする多元環表示 $f(\tilde{X}^n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \cdots, \delta_{i,k-1}) T_i$ でも与えられ $\{(\varepsilon_{i,0}, \varepsilon_{i,1}, \cdots, \varepsilon_{i,k-1})\}$，$\{(\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \cdots \delta_{i,k-1})\}$ を $\{w_i\}, \{v_i\}$ としたとき係数ベクトル間には(6)式と同様なつぎの関係が成立する。

$$W_n = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{2^n-1} \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{2^n-1} \end{bmatrix} \qquad V_n = N_n W_n \quad \text{—(8)}$$

$$N_n = \begin{bmatrix} N_{n-1} & 0 \\ N_{n-1} & N_{n-1} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ である。

§§ 3・3 C_r 又は C_2^k による回路網の合成

今迄の議論より明らかなように多元環表示では T_i はセルえの入力変数を，係数は標準セルの所要個数を表はす。このとき合成に関し，つぎの定理が成立する。

[定理] H を C_r 又は C_2^k とする。$f : \tilde{X}^n \to H$ が C_r 又は C_2^k セルのカスケードで m 入力変数で合成可能なための必要十分条件は f の多元環表示の各項の長さが m 以下なることである。

構成に所要なセル数は C_rセルの場合：$L_n \leq (r-1)\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i$，$C_2^k$セルの場合：$L_n \leq k\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i$ である，又左境界条件は定数でも1変数の関数でもよい．

§4 回路網の合成法

前章での考察より変換群の演算として加法のみを用いては即ち同一の C_r 又は C_2^k セルの接続では一般の回路網が合成できないことが判った。本章では加群の作用素としての乗法を考え，$f: \bar{X}_n \to H$　$\bar{X}_n = \{1, x_1, \cdots, x_n\}$ なる最簡なセルを用いてもこの問題が解決できることを示す。

§§4・1　巡回群 C_r とその自己同型作用素による回路網合成

C_r の生成元 a に対する自己同型を $\varphi_i(a) = a^i$ $(0 \leq i \leq r-1)$ で示す。このとき $(r, i) = 1$ のときのみ φ_i は自己同型 $A(C_r)$ の元となる。$A(C_r)$ は r に対する Euler 関数 $\phi(r)$ 又はその約数を位数とする巡回群をなし，作用素の元 g，即ち $\varphi_i(a) = g^{-1}ag$ なる g は $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & (r-1) \\ 0 & i & 2i & \cdots & (r-1)i \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ r)$ である。特に g を入力変数 x_n のもとでの作用素とすると，$\varphi_i^{x_n}(f)$ と書かれ，回路的には第4図が対応する。

このときつぎの定理が成立する。

定理　ある関数の多元環表示を f とすれば，セルの入力 x のもとでの作用素 φ_i^x はつぎのように f を変形する。

$\varphi_i^x(f) = (1 \oplus (i-1)x)f$ 　—(9)　　(9)式を用いると

回路網の分解はつぎのプロセスで行える。　与えられた関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とし，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \alpha\{1 \oplus (i-1)x_n\}\tilde{f}(x_1, \cdots x_{n-1}) \oplus \hat{f}(x_1, \cdots x_{n-1})$。以下 $\tilde{f}$, $\tilde{\tilde{f}}$ を求めこれより $x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots$ を逐次取り出せば分解は進む。ただこのためには r の位数は奇数でなければならない。以上のことをまとめればつぎの定理が求められる。

[定理]　$f : \bar{X}^n \to C_r$ は r が奇数のとき $k = [\log_2 r]$ とすれば基本セル $(k+2, k+1)$ のカスケードで（ただし三種類のセルを用いて）同時に k 個の関数が合成可能である。r が偶数のときは実現不可能なものが存在する。所要セルの数は $L_n \leqq r2^n - 2$ である。又これより3値 $(r=3)$ セルが任意のブール関数実現の意味で最簡である。（二面体群を用いれば $g = g^{-1}$ であり二個の基本セルでよい。）

§4・2　基本可換群 C_2^k の自己同型作用素による回路合成

この場合は基本可換群の生成元 $a_{2^0}, a_{2^1}, \cdots, a_{2^{k-1}}$, に対する自己同型作用素を考えて議論を進める。紙面の都合で最終の結果のみを示そう。

[定理]　群関数 $f : \bar{X}_n \to C_2^k$ は $(k+2)$ 種類の $(k+1, k)$ 基本セルを用いて任意の k 組のブール関数を常に合成可能である。所要セルの数 $L'_n \leq (k+1)2^n - 2$ である。

§5　反復論理回路網による合成

前章迄の結果は任意の回路網が2から1変数入力の多段論理回路網により合成できることを示したが，本章では反復論理回路網によっても合成できることを示す。

$G=\{a,b\}$ のとき $\langle\{G\}\rangle=\{G,G^2,\cdots,G^{k}\}$ とかく。このときつぎの定理が成立する。

[定理] $f(2)=(a,b)$ で $\langle\{a,b\}\rangle=S_r$，かつ a の位数と b の位数が互いに素であるなら $\langle(a,b)\rangle=S_r\times S_r$

ここで S_r は r 次の対称群。又 S_r の元についてつぎの定理が成立する。

[定理] 対称群 S_r の元を変換するセルは唯一種類のセルで置き換えることができる。それは r が奇数なら $f(2)=((01),(01\cdots(r-1))$，偶数なら $f(2)=((01),(12\cdots(r-1)))$ である。

以上の関係を用いると最終的な定理としてつぎのものを得る。

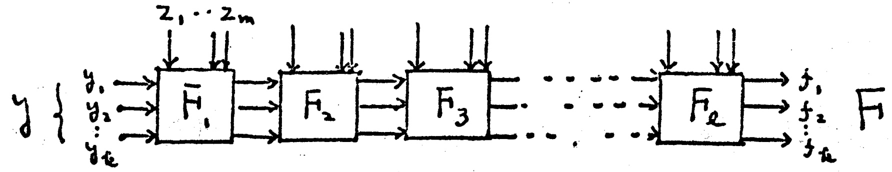
[定理] r を奇数とすれば，二面体群セルによる合成回路網は $f(2)=(\Theta_1,\Theta_2)$ を用いて $L_n<2^n(r^2-1)+3(2^{n-1}-1)(3r-1)\cdot(r-1)$ の単一のセルの接続で構成できる。ここで $\Theta_1=(01)$ $\Theta_2=(01\cdots(r-1))$ である。

[定理] r を偶数とするとき，線型群セルによる合成回路網は $f(2)=(\Theta_1,\Theta_3)$ を用いて $L'_n<2^n\{kr(3r-4)$

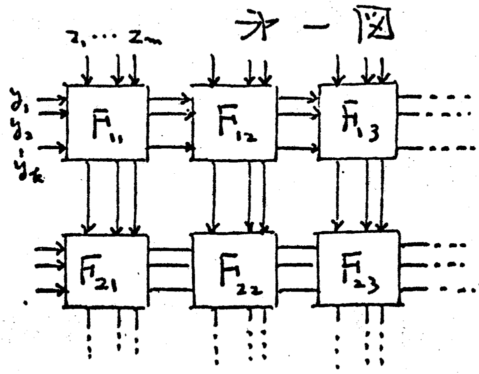
$+ 6r(r-2)\} - 12r(r-2)$ で構成できる。 $\theta_3 = (1\ 2 \cdots r-1)$

§ 結論　多出力多段論理回路網の合成法を変換セルの立場から代数的方法論によりまとめたものである。回路網の表現法が多元環表示で与えられ，これを土台とし作用素に対する標準形へ多元環表示を変化させることが回路合成の基本的な考え方である。

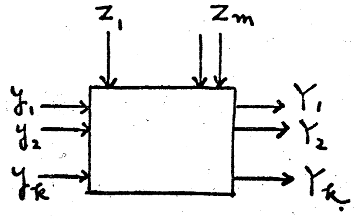
終わりに本研究は我々の研究室で行はれている研究の一部であることを附記する。



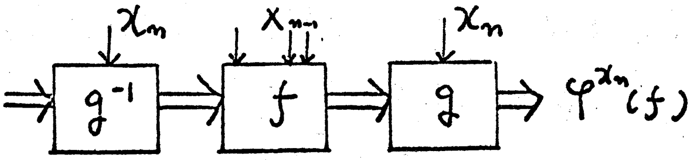
第一図



第二図



第3図



第4図