数理解析研究所講究録
第82巻 1970年 127-133

要因計画における一部実施法

藤井　淑夫

§1.　序

要因計画における一部実施法での分散分析について多くの研究がある[1],[2]. 幾何学的アソシエーション・スキームおよび対応するアソシエーション代数の構造を明らかにし，一部実施計画における別名関係等について述べる。つぎに一部実施計画と符号理論の間の関係を述べ，要因分解能と符号理論における Hamming weight の間の関係を調べる。問題をまとめるとつぎの様になる。

(1)　与えられた正整数 n, k に対して (n, k) 群符号の 0 以外の符号の最小の weight d_0 を最大にする群符号を構成すること。

(2)　与えられた正整数 n, d_0 に対して最大な k をもつ (n, k) 群符号を構成すること。

以上 (1), (2) を一部実施計画の言葉で記せば次の称になる。

(1')　因子数 n, 実験の規模が s^{n-k} のとき最大の要因分解能

d_0 を持つ計画を構成すること。

(2′)　因子数 n，要因分解能 d_0 が与えられたとき，できる限り実験の規模 s^{n-k} を小さくする計画を構成すること。

以上の点に関して部分的に得られた結果を報告する。

§2. 幾何学的アソシェーション・スキーム

n を因子数，s（素数または素数巾）を水準数とするとき，$v_n = s^n$ 個の処理は有限体 GF(s) 上の n 次元ユークリッド空間 EG(n, s) の点 $\underline{a}$ を標識として処理 $\phi(\underline{a})$ で表わされる。これらの処理の間に次の関係を導入する。

EG(n, s) の任意の2点 $\underline{a}$，$\underline{b}$ に対して

(2.1)　$\underline{a} - \underline{b} = \rho\underline{\alpha}$，$\rho \in GF(s)$，$\rho \neq 0$，$\underline{\alpha} \in PG(n-1, s)$

のとき処理 $\phi(\underline{a})$，$\phi(\underline{b})$ は $\underline{\alpha}$ アソシェートの関係にあるとする。ここに PG($n-1, s$) は GF(s) 上の $n-1$ 次元有限射影空間である．便宜上，任意の処理はそれ自身の $\underline{0}$ アソシェートであるとする。

v_n 個の処理の間に導入されたこの関係はアソシェーション・スキームの公理 (a)，(b)，(c) をみたすことが示される。$n_{\underline{\alpha}}$ および $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ はつぎの式で与えられる。

$$(2.2)\qquad n_{\underline{\alpha}}=\begin{cases} s-1 & ; \quad \underline{\alpha}\in PG(n-1,s)\text{ のとき}\\ 1 & ; \quad \text{そうでないとき}\end{cases}$$

$\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}\in PG(n-1,s)$ のとき

$$(2.3)\qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}=\begin{cases} 1 & ; \quad \underline{\alpha}\neq\underline{\beta},\underline{\gamma}\ ,\ \underline{\beta}\neq\underline{\gamma}\text{ かつ }\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}\text{ が共線であるとき}\\ s-2 & ; \quad \underline{\alpha}=\underline{\beta}=\underline{\gamma}\text{ のとき}\\ 0 & ; \quad \text{そうでないとき}\end{cases}$$

である。また $\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}$ のうちいずれかが $\underline{0}$ のときは

$$(2.4)\qquad p^{\underline{0}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}=\begin{cases} s-1 & ; \quad \underline{\beta}=\underline{\gamma}\in PG(n-1,s)\text{ のとき}\\ 1 & ; \quad \underline{\beta}=\underline{\gamma}=\underline{0}\text{ のとき}\\ 0 & ; \quad \text{そうでないとき}\end{cases}$$

$$(2.5)\qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{0}}=p^{\underline{\alpha}}_{\underline{0}\underline{\beta}}=\begin{cases} 1 & ; \quad \underline{\alpha}=\underline{\beta}\text{ のとき}\\ 0 & ; \quad \text{そうでないとき}\end{cases}$$

である。

以上のことより v_n 個の処理 $\phi(\underline{a})$, $\underline{a}\in EG(n,s)$ の間に $m_n=(s^n-1)/(s-1)$ 階級のアソシエーション・スキームが導入されるが，これをわれわれは $PG(n-1,s)$ 型アソシエーション・スキームということにする。

特に $n=2$ の場合は，大きさ s の互に直交する $s-1$ 個のラテン方格によって構成される $m=s+1$ の場合の OL_m 型アソシエーション・スキーム（$m=s+1$ 階級）になる [3]。

$PG(n-1,s)$ 型アソシエーション・スキームのアソシエーシ

エーション行列は処理 $\phi(\underline{a})$ に適当に番号をつけて

(2.6) $$A_{\underline{\alpha}} = \| a_{\underline{a}\,\underline{\alpha}}^{\underline{b}} \|, \quad \underline{\alpha} \in \overline{PG}(n-1, s)$$

で表わされる。ここに

$$a_{\underline{a}\,\underline{\alpha}}^{\underline{b}} = \begin{cases} 1\ ; & \phi(\underline{a}) \text{ と } \phi(\underline{b}) \text{ が } \underline{\alpha} \text{ アソシエートで} \\ & \text{あるとき} \\ 0\ ; & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

$$\overline{PG}(n-1, s) = PG(n-1, s) \cup \{\underline{0}\}$$

である。

$P_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}}$ の値を考慮すれば，つぎの式が成立する。

(2.7) $$\begin{cases} (A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}})^2 = s(A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}}) & \underline{\alpha} \neq \underline{0} \text{ のとき} \\ (A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}})(A_{\underline{0}} + A_{\underline{\beta}}) = A_{\underline{0}} + \sum_{\underline{\gamma} \in \mathcal{P}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})} A_{\underline{\gamma}} & \begin{matrix} \underline{\alpha}, \underline{\beta} \neq \underline{0} \\ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta} \end{matrix} \text{ のとき} \end{cases}$$

ここに $\mathcal{P}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ は $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ を含む最小の射影部分空間とする。

§3. 一部実施型アソシエーション・スキーム

$F = \| f_{ij} \|$ $(k \times n)$, $k < n$ を $GF(s)$ 上の階数が k の行列として，関係式

(3.1) $$F\underline{x} = \underline{f}$$

を考える。ここに $\underline{x} \in EG(n, s)$, $\underline{f} \in EG(k, s)$ とする。いま s^{n-k} 個の解 $\underline{x}$ の張る $n-k$ 次元超平面を

(3.2) $$\mathcal{F}^{n-k} = \{ \underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f},\ \underline{x} \in EG(n, s) \}$$

とする。

$\mathcal{F}^{n-k}\ni\underline{x}$を標識とする $v=s^{n-k}$ 個の処理 $\phi(\underline{x})$ のみを実施するものとする。実施した処理 $\phi(\underline{x})$ の間には，$PG(n-1,s)$ 型アソシエーション・スキームから自然に導かれる関係が定義される。すなわち $\underline{x},\ \underline{y}\ (\in\mathcal{F}^{n-k})$ を標識とする2つの処理 $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ が $EG(n,s)$ 上で $\underline{x}-\underline{y}=\rho\underline{\alpha}$, $\underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)$, $\rho\neq 0$ のとき，$\underline{\alpha}$ アソシエートであると定義する。この自然に導かれた関係はアソシエーション・スキームの公理をみたす。またアソシエーションの関係を標示する $\underline{\alpha}\ (\neq\underline{0})$ の全体は $PG(n-1,s)$ における $n-1-k$ 次元射影部分空間

(3.3) $$\mathcal{P}^{n-1-k}=\{\underline{\alpha}\mid F\underline{\alpha}=\underline{0},\ \underline{\alpha}\in PG(n-1,s)\}$$

をつくる。

このアソシエーション・スキームを $PG(n-1,s)$ 型アソシエーション・スキームから自然に導かれた一部実施型アソシエーション・スキームということにする。

このアソシエーション・スキームに対応するアソシエーション行列を

(3.4) $$B_{\underline{\alpha}}=\|a^{\underline{y}}_{\underline{x}\,\underline{\alpha}}\|\ ;\ \underline{x},\underline{y}\in\mathcal{F}^{n-k},\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}^{n-1-k}$$

とする。$B_{\underline{\alpha}}$ について $PG(n-1,s)$ 型アソシエーション・スキームの場合と同様な関係式が成立する。たとえば

(3.5) $$\begin{cases}(B_{\underline{0}}+B_{\underline{\alpha}})^2=s(B_{\underline{0}}+B_{\underline{\alpha}})\ , & \underline{\alpha}\in\mathcal{P}^{n-1-k}\text{ のとき}\\ (B_{\underline{0}}+B_{\underline{\alpha}})(B_{\underline{0}}+B_{\underline{\beta}})=B_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\gamma}\in\mathcal{P}(\underline{\alpha},\underline{\beta})}B_{\underline{\gamma}}\ , & \underline{\alpha}\neq\underline{\beta},\ \underline{\alpha},\underline{\beta}\in\mathcal{P}^{n-1-k}\text{ のとき}\end{cases}$$

である。

これらの2つのアソシエーション・スキームに対応するアソシエーション代数の間の関係の詳細については[3]を参照されたい。

以上2つのアソシエーション代数の一次元のイデアルの主巾等行列は要因計画における一部実施法において直交表および要因効果の間の別名関係を与える意味で重要である．どの処理を実施するかを規定する行列Fのk個の行ベクトルは一部実施法でいう定義対比であり，Fの選び方により計画の要因分解能がきまる[3]。

$\bar{\mathscr{V}}(F)$ は符号理論における(n, k)群符号である。ここに$\bar{\mathscr{V}}(F)$はFの行ベクトルで張られる$\overline{PG}(n-1, s)$のk次元部分空間である。

Griesmer bound theorem [4] によつて，つぎの例はn, kが与えられたときd_0の上限を*attain*しているから，

$$F_1=\begin{Vmatrix} 0&0&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&1 \end{Vmatrix},\quad F_2=\begin{Vmatrix} 1&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&0 \end{Vmatrix}$$

はそれぞれ2^{7-3}，2^{8-4}計画を与える計画で，要因分解能はいずれもIVであつて，(1')をみたす計画である．

参考文献

[1] Box, G.E.P. and Hunter, J. S. (1961 a)
The 2^{k-p} fractional factorial designs. Part I, Technometrics 3, No. 3.

[2] ———————————— (1961 b)
Part II, Technometrics 3, No. 4.

[3] Fujii, Y. (1967) Geometrical association schemes and fractional factorial designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 31.

[4] Griesmer, J. H. (1960) A bound for error-correcting codes. IBM J. Res. Develop., vol. 4, Nov.