数理解析研究所講究録
第 82 巻 1970 年 134-149

Combinatorial Problems in Design of Experiments

元日大・生産工・統計学科　小川潤次郎
元日大・生産工・統計学科　池田貞雄

§1. まえがき

釣合型不完全ブロック配置の作製は正に Combinatorial な問題そのものである．v 個の処理を各々の大きさ k なる b 個のブロックに割当るとき，次の三条件が満たされるなら，それを釣合型不完全ブロック配置 —— 英語では Balanced Incomplete Block Design, 略して BIBD —— という．

(1) 各ブロックは $k(\leqq v)$ 個の相異なる処理を含む．

(2) 各処理は r 個のブロックに現われる．

(3) 任意の二つの処理は丁度 λ 個のブロックで会合する．

BIBD を記述する5個のパラメター v, b, r, k, λ の間には，次の関係があることは見易い．

$$vr = bk, \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

更に又一般には

$$v \leqq b \quad \text{従って} \quad r \geqq k$$

でなければならないことも知られている R. A. Fisher [4].

1930年代の初め，R. A. Fisher と F. Yates [5] は繰返し数 $r \leqq 10$ なるすべての可能と思われるBIBDをリストした．その内次の6個は存在しないことが後に到って証明された．

(α)　$v=15,\ b=21,\ r=7,\ k=5,\ \lambda=2$

(α*)　$v=22,\ b=22,\ r=7,\ k=7,\ \lambda=2$

(β)　$v=21,\ b=28,\ r=8,\ k=6,\ \lambda=2$

(β*)　$v=29,\ b=29,\ r=8,\ k=8,\ \lambda=2$

(γ)　$v=36,\ b=45,\ r=10,\ k=8,\ \lambda=2$

(γ*)　$v=46,\ b=46,\ r=10,\ k=10,\ \lambda=2$

更に Fisher-Yates の表にある次の二つのBIBDは今日に到るもその存在も不存在も不明である．

(δ)　$v=46,\ b=69,\ r=9,\ k=6,\ \lambda=1$

(ε)　$v=51,\ b=85,\ r=10,\ k=6,\ \lambda=1.$

これと同様なことは当然部分釣合型不完全ブロック配置—— Partially Balanced Incomplete Block Design, 略して PBIBD —— についても起る．

このブロック配置の不存在証明の有力な一手段として Hasse-Minkowski の p-不変量を援用する方法がある．本稿では主として，此方法を中心として述べる [8].

§2. Hasse-Minkowski の p-不変量

$A=\|a_{ij}\|$ は n 次の有理対称な正方行列として，その主対角線小行列式を

$$D_0=1,\ D_1=a_{11},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \cdots\cdots,\ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

として，

$$C_p(A)=(-1,-1)_p\cdot\prod_{i=1}^{n}(D_i,-D_{i-1})_p$$

とおき，これを行列 A の Hasse-Minkowski の p-不変量という．但しここで記号 $(a,b)_p$ は Hilbert 剰餘記号で

$$(a,b)_p=\begin{cases} +1, & ax^2+by^2=1 \text{ が } p \text{ 進解をもつなら，} \\ -1, & \text{然らざるとき．} \end{cases}$$

二つの有理対称行列 A, B に対して，同次数の有理でシンギュラーならざる行列 C が存在して

$$C'AC=B$$

となるとき A と B とは有理的に対等であるという．ところで，A, B が有理的に対等である為に必要且充分条件は

$$|A|\sim|B|,\ A \text{ の指数}=B \text{ の指数}$$

更に凡ての有理素数（形式的素数 p_∞ も含めて）p に対して

$$C_p(A)=C_p(B)$$

となることである．これが H. Hasse の定理である[6].

p 不変量の計算に有用な公式をいくつかリストしておく．

(1) $\zeta_p(\omega A) = (-1,\omega)_p^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (\omega, |A|)_p^{n-1} \cdot \zeta(A)$

(2) $\zeta_p(A+B) = (-1,-1)_p \cdot (|A|, |B|)_p \cdot \zeta_p(A) \cdot \zeta_p(B)$

§3. 対称なBIBDの存在の必要条件.

一般にBIBDはその会合行列 $N=\|n_{\alpha a}\|$, $\alpha=1,\cdots,v$; $a=1,\cdots,b$ によって記述される. 但し

$$n_{\alpha a} = \begin{cases} +1, & \text{若し処理}\alpha\text{がブロック}a\text{に現われるならば;} \\ 0 & \text{然らざれば.} \end{cases}$$

よって

$$NN' = (r-\lambda) I_v + \lambda G_v$$

となるが, 右辺のスペクトル分解をつくると

$$NN' = rk A_0^{\#} + (r-\lambda) A_1^{\#}$$

ここに $A_0^{\#} = \frac{1}{v} G_v$, $A_1^{\#}$ は直交する冪等行列(有理的)である. これらの一次独立な列ベクトルを $a_1^{0\#}, a_2^{1\#}, \cdots, a_v^{1\#}$ として

$$S = \| a_1^{0\#} \; a_2^{1\#} \; \cdots\cdots \; a_v^{1\#} \|$$

とおくと

$$S'NN'S = \left\| \begin{matrix} \frac{rk}{v} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (r-\lambda)a_{22}^{1\#} & \cdots & (r-\lambda)a_{2v}^{1\#} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (r-\lambda)a_{v2}^{1\#} & \cdots & (r-\lambda)a_{vv}^{1\#} \end{matrix} \right\|$$

となって, $\|a_{ij}^{1\#}\|_{2 \leq i,j \leq v}$ は行列 NN' の特有根 $(r-\lambda)$ に対応する固有

空間の基ベクトルのグラミヤンである.従って例えば

$$
\begin{bmatrix} v-1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad
\begin{bmatrix} 0 \\ v-2 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \cdots\cdots,\quad
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

なる基ベクトルをとれば,そのグラミヤンは

$$
Q = \begin{Vmatrix} v(v-1) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & (v-1)(v-2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 2\cdot 1 \end{Vmatrix}
$$

であって, $|Q| \sim v$, $C_p(Q)=(-1,-1)_p$ なることは見易い.又

$$
NN' \sim \begin{Vmatrix} \frac{rk}{v} & 0 \\ 0 & (r-\lambda)Q \end{Vmatrix}
$$

だから.

$$
\begin{aligned}
C_p(NN') &= (-1, rkv)_p \, (rkv, v(r-\lambda)^{v-1})_p \, (-1, r-\lambda)_p^{\frac{v(v-1)}{2}} (v, r-\lambda)_p^{v} \, C_p(Q) \\
&= (-1, rk)_p \cdot (v, r-\lambda)_p \, (v, rk)_p \, (rk, r-\lambda)_p^{v-1} (-1, r-\lambda)_p^{\frac{v(v-1)}{2}} C_p(Q) \\
&= (-1,-1)_p \cdot (-1, rk)_p \cdot (-1, r-\lambda)_p^{\frac{v(v-1)}{2}} \cdot (v, r-\lambda)_p \, (v, rk)_p \cdot (rk, r-\lambda)_p^{v-1}
\end{aligned}
$$

若し配置が対称ならば, $b=v$ で N は正方行列であるから

$$
(r-\lambda)^{v-1} = \text{完全平方}
$$

従って, v が偶数なら, $r-\lambda$ 自身が完全平方でなければならない.

更に $c_p(NN')=(-1,-1)_p$ となるべきだが、この場合は明らかに成立つ。v が奇数で、$k-\lambda$ が完全平方でない場合は、すべての素数 p で

$$(-1,k-\lambda)_p^{\frac{v(v-1)}{2}}(v,k-\lambda)_p=1$$

とならねばならない[9]。例えば(β1)の場合は $v=29$ で奇数 $k-\lambda=6$ で完全平方でないから、すべての素数 p で

$$(29,6)_p=1$$

となるべきだが、$p=3$ に対しては

$$(29,6)_3=(29,2)_3\cdot(29,3)_3=\left(\frac{29}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$$

となるから、これは不可能である。

§4. 対称なPBIBDの存在の必要条件[10]

部分釣合型不完全ブロック配置―PBIBD―を述べるには先ず"アソシエーション"という概念を説明しなければならない。

v 箇の処理の間に次の三条件を満たす或関係が定義されるときそれをアソシエーションという。

(1)任意の二つの処理をとるとそれは互に第1種のアソシエートであるか、第2種のアソシエートであるか、……、又は第 m 種のアソシエートである。

(2)各処理は n_i 箇の第 i 種アソシエートをもつ。

(3)互に第 i 種アソシエートである処理対 α,β に対して、α に対しては第 j 種アソシエートであり、β に対しては第 k 種アソ

シエートであるような処理γの数は,対(α,β)に関係なくp^i_{jk}である.

更に各処理は,それ自身の0種アソシエートと考えられるから

$$n_0=1,\quad p^i_{0k}=\delta_{ik},\quad p^0_{ij}=n_i\delta_{ij}.$$

アソシエーション係数の間には次の関係がある.

$$\sum_{i=0}^{m} n_i = v,$$

$$p^k_{ij}=p^k_{ji},$$

$$\sum_{j=0}^{m} p^i_{jk}=n_k,$$

$$n_i p^i_{jk}=n_j p^j_{ik}=n_k p^k_{ij}.$$

第i種アソシエーション行列A_iを次のように定義する.

$$a^{\beta}_{\alpha i}=\begin{cases}\text{若し}\alpha,\beta\text{が第}i\text{種アソシエートなら,} & 1\\ \text{然らざれば} & 0\end{cases}$$

として

$$A_i=\|a^{\beta}_{\alpha i}\|,\quad i=0,1,\dots,m.$$

そうすれば

$$\sum_{i=0}^{m} A_i=G$$

で又

$$A_iA_j=A_jA_i=\sum_{k=0}^{m} p^k_{ij}A_k$$

であることは見易い.つまり$A_0,A_1,A_2,\dots,A_m$は有理数体の上で階

数$m+1$の可換な多元環をつくる訳である。

さて、その大きさが各々kのブロックがb個あって、それに対してアソシエーションの定義されたv個の処理を割当てるのに次の条件が満たされているなら、それをPBIBDという。

(1)各ブロックはk個の相異る処理を含む。

(2)各処理は丁度r個のブロックに含まれる。

(3)第i種アソシエートである各処理対は丁度λ_i個のブロックに現われる。

然らば $vr=bk$ で更に $\lambda_0=r$ として

$$\sum_{i=0}^{m} n_i \lambda_i = rk$$

となる。

PBIBDの会合行列をNとすれば

$$NN' = rA_0 + \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m$$

となる。つまりNN'はアソシエーション代数に含まれるのである。アソシエーション代数の冪等行列を用いて

$$NN' = \rho_0 A_0^{\#} + \rho_1 A_1^{\#} + \cdots + \rho_m A_m^{\#}$$

とすれば、これはNN'のスペクトル分解になって

$$\rho_0 = rk$$

である。$A_i^{\#}$の階数をα_iとして、$A_i^{\#}$の一次独立な列ベクトルを

$$a^{(i)\#}_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{i-1}+1},\ a^{(i)\#}_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{i-1}+2},\ \cdots\cdots,\ a^{(i)\#}_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i}$$

$$i=0,1,\cdots,m$$

としてこれら $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i = v$ 個の列ベクトルを並べて出来る正方行列を S とし、又 α_i 個の列ベクトルのグラム行列を Q_i とすれば

$$S'S = \left\| \begin{matrix} 1/v & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Q_m \end{matrix} \right\|$$

以下吾々は $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$ がすべて有理数である場合を考えてゆく。

$\rho_1\rho_2\cdots\rho_m \neq 0$ の場合に正則であるということにする。

(i) 正則且対称な PBIBD の場合:

$$S'NN'S = \left\| \begin{matrix} r^2/v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_1 Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_m Q_m \end{matrix} \right\| \sim I$$

なら、次の条件を得る。

$$\prod_{i=1}^{m} \rho_i \sim 1,$$

$$\prod_{u=1}^{m}(-1, \rho_u)_p^{\frac{\alpha_u(\alpha_u+1)}{2}} \prod_{1\le i<j\le m}(\rho_i^{\alpha_i}, \rho_j^{\alpha_j})_p \cdot \prod_{u=1}^{m}(\rho_u, |Q_u|)_p = 1.$$

特に $m=1$ i.e. BIBD のときは $\alpha_1 = v-1$, $\rho_1 = r-\lambda$, $|Q_1| \sim v$ なら

$$(r-\lambda)^{v-1} \sim 1$$

$$(-1, r-\lambda)_p^{\frac{v(v-1)}{2}}(r-\lambda, v)_p = 1$$

又、$m=2$ ときは

$$\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\sim 1,$$

$$(-1,\rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}}\cdot(-1,\rho_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}}\cdot(\rho_1,\rho_2)_p^{\alpha_1\alpha_2}\cdot(\rho_1,|Q_1|)_p\cdot(\rho_2,|Q_2|)_p = 1$$

となる.[7][8]

(ii) $b<v$ の場合は NN' は正則でない. 簡単の為に $m=2$ として

(a) $$b=v-\alpha_2,\quad \rho_2=0$$

の場合を考えて見よう.

$$S_1=\| a_1^{(0)\#}\, a_2^{(1)\#}\cdots\cdots a_{1+\alpha_1=b}^{(1)\#}\|$$

とおくと, この場合は

$$NN'=rk A_0^{\#}+\rho_1 A_1^{\#}$$

だから

$$S_1'N\cdot NS_1=\begin{Vmatrix}\frac{rk}{v} & 0\\ 0 & \rho_1 Q_1\end{Vmatrix}\sim 1.$$

従って

$$b\rho_1^{\alpha_1}|Q_1|\sim 1,$$

$$(-1,\rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}}\cdot(\rho_1,|Q_1|)_p^{\alpha_1-1}\cdot c_p(Q_1)=(-1,-1)_p$$

なる必要条件を得る.

(b) $$b=v-\alpha_1,\quad \rho_1=0$$

のときは同様にして

$$b\rho_2^{\alpha_2}|Q_2|\sim 1$$

$$(-1,\rho_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}}\cdot(\rho_2,|Q_2|)_p^{\alpha_2-1}\cdot c_p(Q_2)=(-1,-1)_p$$

$$\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2} \sim 1$$

$$(-1,\rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} \cdot (-1,\rho_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}} \cdot (\rho_1,\rho_2)_p^{\alpha_1\alpha_2} \cdot (\rho_1, |Q_1|)_p \cdot (\rho_2, |Q_2|)_p = 1$$

となる.

(ii) $b<v$ の場合は NN' は正則でない. 簡単の為に $m=2$ として,

$$b = v-\alpha_2, \quad \rho_2 = 0$$

の場合を考えて見よう.

$$S = \| a_1^{(0)\#} a_2^{(1)\#} \cdots\cdots a_{1+\alpha_1=b}^{(1)\#} \|$$

とすれば, この場合

$$NN' = rk A_0^{\#} + \rho_1 A_1^{\#}$$

だから

$$S'N \cdot N'S = \left\| \begin{matrix} \frac{rk}{v} & 0 \\ 0 & \rho_1 Q_1 \end{matrix} \right\| \sim 1$$

従って

$$b \rho_1^{\alpha_1} |Q_1| \sim 1,$$

$$(-1,\rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} \cdot (\rho_1, |Q_1|)_p^{\alpha_1-1} \cdot C_p(Q_1) = (-1,-1)_p$$

なる必要条件を得る.

§5. 非対称な B I B D の双対配置.

B I B D が与えられたとき, その径数を v, b, r, k, λ とする. これでブロックと処理を入れかえた配置を双対という. その径数は $v^* = b$, $b^* = v$, $r^* = k$, $k^* = r$, λ^* となる.

§5. BIBDの双対配置(Dual Design).

その径数がv, b, r, k, λなるBIBDでブロックと処理を入換えて生ずる配置を双対という.双対配置の径数は

$$v^*=b,\quad b^*=v,\quad r^*=k,\quad k^*=r$$

で必ずしもBIBDにならないが或場合には$m=2$のPBIBDになる.例えば

$$v=b=\binom{n}{2}+1,\quad r=k=n,\quad \lambda=2$$

から切捨法で生ずる.

$$v=\binom{n-1}{2},\quad b=\binom{n}{2},\quad r=n,\quad k=n-2,\quad \lambda=2$$

の双対を取ると.

$$v=\binom{n}{2},\quad b=\binom{n-1}{2},\quad r=n-2,\quad k=n,\quad \lambda_1=1,\quad \lambda_2=2$$

なる$m=2$のPBIBDとなるが,$n\neq 8,\ n>5$ならこれは三角形型のアソシエーションをもつことが知られている[8].この場合には Shrikhande, Raghavarao, Tharthare[10]を参照.

こゝでは

$$v=b=111,\quad r=k=11,\quad \lambda=1$$

から切捨法で導かれる

$$v=100,\quad b=110,\quad r=11,\quad k=10,\quad \lambda=1$$

なる径数をもつBIBDの不存在を証明しよう[3].

さて,径数$v, b, r, k, \lambda=1$のBIBDでは任意の二つのブロックは高々一つしか処理を共有し得ない.事実この双対配置はm

$=2$ のPBIBDとなる。

共有処理のない二つのブロックを双対配置における第1種アソシエート処理対に、又共有処理が一つの二つのブロックを双対配置における第2種アソシエート処理対に対応させれば次のアソシエーション係数を得る。

$$n_1 = b-1-k(r-1), \qquad n_2 = k(r-1)$$

$$\begin{Vmatrix} p^1_{11} & p^1_{12} \\ p^1_{21} & p^1_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (r-k)^2+2(k-1)-\frac{r(r-1)}{k} & k(r-k-1) \\ k(r-k-1) & k^2 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} p^2_{11} & p^2_{12} \\ p^2_{21} & p^2_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{(k-1)(r-k)(r-k-1)}{k} & (k-1)(r-k) \\ (k-1)(r-k) & r-2+(k-1)^2 \end{Vmatrix}.$$

$v=mn$ で、各グループは n 箇の処理より成り、m 箇のグループに分られている。同一グループに属する二処理は第1種アソシエート、異るグループに属する二処理は第2種アソシエートとすれば、Group-Divisibleなアソシエーションが出来て、その係数は

$$n_1 = n-1, \qquad n_2 = (m-1)n.$$

$$\begin{Vmatrix} p^1_{11} & p^1_{12} \\ p^1_{21} & p^1_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & (m-1)n \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} p^2_{11} & p^2_{12} \\ p^2_{21} & p^2_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & (m-2)n \end{Vmatrix}$$

勿論 $n_2 p^2_{11} = n_1 p^1_{12}$ であるから、$p^1_{12}=0$ なら、$p^2_{11}=0$ である。ところで $m=2$ で $p^1_{12}=0$ となるアソシエーションはGroup Divisible型に限ることが判っている[2]。さて

$$v=100,\ b=110,\ r=11,\ k=10,\ \lambda=1$$

の双対では

$$v^*=110,\ b^*=100,\ r^*=10,\ k^*=11,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=1$$

$$n_1=9,\qquad n_2=100$$

$$\begin{Vmatrix} p^1_{11} & p^1_{12} \\ p^1_{21} & p^1_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 100 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} p^2_{11} & p^2_{12} \\ p^2_{21} & p^2_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 90 \end{Vmatrix}$$

であるから, $n=10,\ m=11$ の Group Divisible アソシエーションである. そして $\alpha_0=1,\ \alpha_1=v-1=99,\ \alpha_2=10$

$$b^*=100=v^*-\alpha_2=110-10.$$

$$N'N = rA_0+0\cdot A_1+A_2$$

$$\rho_1 = rk^*-v^*\lambda_2 = kr-b\lambda_2=0,\quad \rho_2=r^*-\lambda_1=k-\lambda_1=10.$$

$$Q_2 \sim (n^2 I_{n-1}-nG_{n-1})\times I_m \quad [8]$$

$$|Q_2| \sim n^m$$

$$b^*\rho_2^{\alpha_2}|Q_2| \sim 1$$

であるべきだが, $v\rho_2^{\alpha_2}|Q_2| \sim 100\cdot 10^{10}\cdot 10^{11} \sim 10$ であって, これは完全平方でない. よって $v^*=110,\ b^*=100,\ r^*=10,\ k^*=11,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=1$ なる Group Divisible PBIBD は不可能. 従って $v=100,\ b=110,\ r=11,\ k=10,\ \lambda=1$ なる BIBD は不可能. 従って $v=b=111,\ r=k=11,\ \lambda=1$ も不可能である. 一般に m が素数冪 p^α の形なら有限体が存在する. $v=\frac{m^3-1}{m-1}$ 箇の点と $b=\frac{m^3-1}{m-1}$ 箇の直線から成立つ有限射影平面が存在して, 各直線は $m+1$ 箇の点を含み, 各点を通って $m+1$ 箇の直線が

がある．しかし上記のことから，$m=10=2\cdot5$に対しては，かゝる配置Configurationは不可能であることが判る．

参考文献

[1] Bose, R.C. and Connor, W.S., Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, Ann. Math. Statist., 23 (1952), 367–383.

[2] Connor, W.S. and Clatworthy, W.H., Some theorems for partially balanced designs, Ann. Math. Statist., 25 (1954), 100–112.

[3] Clatworthy, W.H., The subclass of balanced incomplete block designs with $r=11$ replications, Review of the I.S.I. 36 (1968), 7–11.

[4] Fisher, R.A., An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks, Annals of Eugenics, 10 (1940), 52–75.

[5] Fisher, R.A. and Yates, F., Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Hafner Publishing Co. New York, 1949

[6] Hasse, H., Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper rationalen Zahlen, J. Reine Angew. Math. 152 (1923), 205–224.

[7] Ogawa, J., On a unified method of deriving necessary conditions for existence of symmetrical partially balanced incomplete block designs of certain types, Bull. I.S.I. 38 (1961). Part IV. 43–57.

[8] Ogawa, J., On the non-existence of certain block designs, Proceedings of the Conference on Combinatorial Mathematics and its Applications, The University of North Carolina Monograph Series in Probability and Statistics No. 4, 200–230.

[9] Shrikhande, S.S., The impossibility of certain symmetrical balanced incomplete block designs, Ann. Math. Statist. 21 (1950), 106–111.

[10] Shrikhande, S.S., Raghavarao, D. and Tharthare S.K., Non-existence of some unsymmetrical PBIB designs, Canad. J. Math., 15 (1963), 686–701.