数理解析研究所講究録
第 84 巻 1970 年 1-27

Large Sieve

日大理工　本橋洋一

§1. 序

数論の多くの問題は，DirichletのL-函数に帰着されるが，これは，character和の評価が本質的である，と言いかえることが出来る。これについての1つの指導原理が「Large Sieve」なのである。

この原理は，Ju. V. Linnikにより，1941年に，最小2次非剰余についてのI. M. Vinogradovの予想を解決しようとする努力の中で発見された。それは，のちに示す，定理1.2の形のものであるが，これは「ある種の条件をみたす素数があまり沢山ない」ことを示している。一方，Linnikは，Hoheisel-Inghamの理論を，1つの法に対する全てのL-函数に拡張し，臨界帯のある領域に零点を有するL-函数が「あまり沢山ない」ことを発見した。これによって，拡張されたRiemann予想を回避する道が発見されたのである。

これら2つの深い結果を結合して，謂るGoldbach予想に大きな発展をもたらしたのが，A. Rényi [38] である。そこにおいては，1つの法ではなくて，多くの法までいっぺんに考えることが要求され，これをみたしたのが，LinnikのLarge Sieveなのであった。それ故に，現在Large Sieveには，LinnikとRényiの名が冠せ

されているのである。

Rényi 以後, Large Sieve はもっぱら Goldbach 予想に関連して改良がなされたのであるが, その第1には, M.B. Barban を上げるべきであろう。彼は昨1968年33才で亡くなられた。

しかし決定的な改良は, 1964年秋から, 1965年春にかけて相次いで行われた。まず K.F. Roth [40] が定理 1.2 において $Q \leq (N/\log N)^{\frac{1}{2}}$ なる条件のついているものを証明した。それは当時, 驚くべきものであった。次に E. Bombieri [4] が最終的な改良をなしとげた。とくに, 彼が Large Sieve を character 和についての理論であるとして, 明確に定理1.3を把握したのは, とくに重要である。又全く同時に A.I. Vinogradov [48] は, Linnik の「Dispersion Method」から出発して, Bombieri とほぼ同じ結論を得たのであるが, これはとくに注意すべきことであろう。なぜならば Linnik によってはじめられた, 3つの大きな流れ : Large Sieve, Density Theorem そして Dispersion Method が結果的には, 1つの大きな結論に流れ込んだからなのである。

以下 Large Sieve 及びその応用について解説するが, 1965年以前のことについては, Barban の優れた情熱的な解説 [1] があるので, その後の発展に重点をおくつもりである。

§ 2. 基本定理

Large Sieve の基本定理は次のものである。証明からわかるように, Hardy-Ramanujan の Circle Method が根底にある。又この定理は, Farey 分割についての定理

とも考えられるが，この点についての考察は中井氏の論説を見られたい。

定理 1.1　$\{a_n\}$ を任意の複素数列とし，

$$S(\alpha) = \sum_{M<n\le M+N} a_n e^{2\pi i n\alpha}$$

とする。Q, M, N を任意にとるとき，

$$\sum_{q\le Q}\ \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} \left| S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \le (Q^2+2\pi N)\sum_{M<n\le M+N} |a_n|^2$$

証明.　以下に示すものは，Gallagher [17] によるものであるが，すこぶる明解である。　適当に m をとって，$S(\alpha)e^{-2\pi i m\alpha}$ を考えれば，n は $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ に入っているとしてよい。　さて，

$$S\left(\frac{a}{q}\right)^2 = S(\alpha)^2 + 2\int_{\alpha}^{\frac{a}{q}} S(\beta)S'(\beta)\,d\beta$$

であるから，$I(a/q)$ を a/q を中心にして，長さ Q^{-2} の区間とすれば

$$\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \le Q^2\int_{I(a/q)} |S(\alpha)|^2\,d\alpha + \int_{I(a/q)} |S(\alpha)S'(\alpha)|\,d\alpha.$$

しかるに　$I(a/q)$　$\{1\le a\le q,\ (a,q)=1,\ q\le Q\}$ 達は重り合わないから，

$$\sum_{q\le Q}\ \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \le Q^2\int_0^1 |S(\alpha)|^2\,d\alpha + \left\{\int_0^1 |S(\alpha)|^2\,d\alpha\int_0^1 |S'(\alpha)|^2\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ここで，

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2\,d\alpha = \sum_{|n|\le\frac{N}{2}} |a_n|^2,\quad \int_0^1 |S'(\alpha)|^2\,d\alpha = \sum_{|n|\le\frac{N}{2}} 4\pi^2 n^2 |a_n|^2$$

であるから，直ちに定理の不等式を得る。

定理 1.1 から，次の2つの美しい定理が容易に証明される。

定理 1.2　$n_1, n_2, \cdots, n_Z \le N$ を任意の正整数列とし，素数 p を法として，$n_j \equiv a$ となる j の数を $Z(p,a)$ とすれば

$$\sum_{p\le Q} p\sum_{1\le a\le p}\left\{Z(p,a) - \frac{Z}{p}\right\}^2 \le (Q^2+2\pi N)Z.$$

<u>定理 1.3</u>　χ を Dirichlet character とし，$\{a_n\}$ を任意の複素数列とすると，

$$\sum_{q\le Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\left|\sum_{M<n\le M+N}\chi(n)a_n\right|^2 \le (Q^2+2\pi N)\sum_{M<n\le M+N}|a_n|^2$$

但し $\sum^*$ は（今後とも）原始指標についての和を示す。

定理 1.2 の形のものが，Linnik [28] によって発見された Large Sieve である。所で，この定理は，$Z(p,a)$ の分散についての結果である。実際，$Z(p,a)$ が Z/p 位であろうと期待するのは，妥当と考えられるからである。このことに注目して，Rényi は確率論に於る，ある一般的な事実を発見した。そして，逆にそのことから，定理 1.2 の弱い形のものを導くことに成功した。この Rényi の理論については [39] を参照されたい。定理 1.3 は極めて重要である。Large Sieve をこの形で把握したのは，Bombieri [4] である。この定理は「多くの」L-函数を考える際に決定的な力をもつ。これは，次の2つの定理によってはっきりと示されている。

<u>定理 1.4</u>　(Bombieri)

Dirichlet の L-函数 $L(s,\chi)$　$(s=\sigma+it)$ の，領域 $\sigma_0\le\sigma\le 1$，$|t|\le T$ に於る零点の数を $N(\sigma_0,T,\chi)$ とすれば，任意の Q に対して，

$$\sum_{q\le Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma,T,\chi) \ll T(Q^2+QT)^{4\frac{1-\sigma}{3-2\sigma}}\log^{10}(Q+T).$$

<u>定理 1.5</u>　(Bombieri)

初項 l，公差 q の算術級数中の素数で，y より小なるものの数を $\pi(y;q,l)$ で表せば，任意に固定した A に対して，

$$\sum_{q\le N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B}}\ \max_{y\le N}\ \max_{(q,l)=1}\left|\pi(y;q,l)-\varphi(q)^{-1}\,\mathrm{Li}(y)\right| \ll N(\log N)^{-A}$$

但し，$B=16A+28$.

定理1.4の証明は，竜沢[42]の，1つのqに対する場合と，ほぼ同じであるが，ただcharacter和の部分に全面的にLarge Sieve(定理1.3)を援用するのである。見通しのより証明はDavenport [8]に出ている。定理1.4において，TがQにくらべて小さいとき，直線$\sigma=1$の近くに零点を有するL-函数は，非常にすくないことが直ぐわかる。これこそがLinnikやRényiが苦心惨憺のすえに発見したことであった。

定理1.5は，まことに驚くべきものである。拡張されたRiemann予想のもとでは，よく知られているように，

$$\pi(y;q,l)=\varphi(q)^{-1}\,Li(y)+O(y^{\frac{1}{2}}\log(y+2))$$

となり，残余項はqに無関係である。即ち，これを定理1.5の形にかけば，$B=A+1$ということになる。定理1.5では単にBの値が少々大きいだけのことになる。多くの，素数のからんだ加法的な問題に於て，定理1.5が決定的であるのは，この様にほぼ，Riemann予想と同等である，という事によるのである。なお，$N(\log N)^{-A}$という評価は，「Siegelのゼロ」(参照[37，p139])によるものであり，改良は(現在の所)不可能であろう。

§3. 定理1.5の証明.

定理1.5は，定理1.4から容易に証明される。しかし，Gallagher [18]が大変面白い証明を発表したので，彼の方針に従おう。これは，言わば「直接証明」であり，Large Sieve(定理1.3)の応用が鮮明である。証明は数段にわかれる。

(i) 次のことを証明すればよい。即ち，$\Lambda(n)$をvon Mangold函数として，

$$\psi(y;q,l)=\sum_{n\le y,\ n\equiv l\ (\mathrm{mod}.q)}\Lambda(n)$$

とするとき

$$\sum_{q\le N^{\frac12}(\log N)^{-B}} \max_{y\le N} \max_{(q,l)=1} \left|\psi(y;q,l) - \varphi(q)^{-1}y\right| \ll N(\log N)^{-A}.$$

(ii) これを証明するために、先ず次の函数を導入する。

$$\psi_k(y;q,l) = \frac{1}{k!}\sum_{n\le y,\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,q)} \Lambda(n)\left(\log\frac{y}{n}\right)^k,$$

$$\psi_k(y;\chi) = \frac{1}{k!}\sum_{n\le y}\chi(n)\Lambda(n)\left(\log\frac{y}{n}\right)^k.$$

明らかに

$$\psi_k(y;q,l) = \varphi(q)^{-1}\sum_{\chi \bmod q}\bar{\chi}(l)\psi_k(y;\chi).$$

χ を導びく原始指標を χ^* とすれば

$$\psi_k(y;q,l) = \varphi(q)^{-1}\sum_{\chi \bmod q}\bar{\chi}(l)\psi_k(y;\chi^*) + O\left((\log y)^{k+1}\log q\right)$$

とくに、χ が単位指標ならば

$$\psi_k(y;\chi^*) = y + O\left(y e^{-\sqrt{\log y}}\right)$$

であるから、任意の Q に対して、

$$\sum_{q\le Q}\max_{y\le N}\max_{(q,l)=1}\left|\psi_k(y;q,l)-\varphi(q)^{-1}y\right| \ll N\log Q\, e^{-\sqrt{\log N}} + Q\log Q(\log N)^{k+1}$$
$$+ (\log Q)^2\sum_{q\le Q}\frac{1}{q}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le N}\left|\psi_k(y;\chi)\right|.$$

この右辺の第3項を $E(Q)$ とおこう。

(iii) 所で Siegel の定理 [37, p. 144] により、C_0 を任意にとるとき、$q\le(\log N)^{C_0}$ に対しては、$\max_{y\le N}\left|\psi_k(y;\chi)\right| \ll N e^{-\sqrt{\log N}}$ であるから、

$$E(Q) \ll (\log N)^{C_0} N e^{-\sqrt{\log N}} + \sum_{(\log N)^{C_0}<q\le Q}\frac{1}{q}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le N}\left|\psi_k(y;\chi)\right|.$$

この和を $E_1(Q)$ と書くことにする。$E_1(Q)$ の評価に Large Sieve（定理1.3）が援用されるのである。

(iv) さて、$\psi_k(y;\chi)$ は次のように積分表示される。（但し以下においては、一応 $k\ge 3$）

$$\psi_k(y;\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \left\{-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\} y^s s^{-(k+1)} ds.$$

ここに $\alpha = 1 + (\log N)^{-1}$ この積分を，函数

$$U(s,\chi) = \sum_{n \le H} \mu(n)\chi(n)n^{-s}$$

を用いて変形する。これは「Density Theorem」を証明する際に使われるのと，同じ技法である。Hは後で適当に定める。変形はつぎのようにする。

$$\psi_k(y;\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \left\{-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\}\left\{1-L(s,\chi)U(s,\chi)\right\}^2 y^s s^{-(k+1)} ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{(\beta)} \left\{L(s,\chi)L'(s,\chi)U^2(s,\chi) - 2L'(s,\chi)U(s,\chi)\right\} y^s s^{-(k+1)} ds.$$

ここに $\beta = \frac{1}{2} + (\log N)^{-1}$ である。積分路を (α) から (β) に移っせるのは，あとでわかることであるが $k \ge 3$ に於て，積分が絶対収束するからである。

従って，

$$E_1(Q) \ll N\log N\int_{(\alpha)} A(s)\,|s|^{-(k+1)}\,|ds| + N^{\frac{1}{2}}\int_{(\beta)} B(s)\,|s|^{-(k+1)}\,|ds|.$$

但し，

$$A(s) = \sum_{(\log N)^{c_0} < q \le Q} \frac{1}{q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |1 - L(s,\chi)U(s,\chi)|^2 \quad (\sigma = \alpha)$$

$$B(s) = \sum_{(\log N)^{c_0} < q \le Q} \frac{1}{q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \left\{|L(s,\chi)L'(s,\chi)U^2(s,\chi)| + |L'(s,\chi)U(s,\chi)|\right\}$$
$$(\sigma = \beta).$$

(V) Large Sieve（定理1.3）によって，$A(s)$ を評価しよう。

$$L(s,\chi) = \sum_{n \le H} \chi(n)n^{-s} + s\int_H^\infty \left\{\sum_{H<n\le \xi} \chi(n)\right\} \xi^{-(s+1)} d\xi$$

であり，χ は原始指標であるから，Pólya–Vinogradov の定理により，

$$L(s,\chi) = \sum_{n \le H} \chi(n)n^{-s} + O\left\{|s|\,H^{-1} q^{\frac{1}{2}} \log(q+2)\right\}.$$

従って，

$$1 - L(s,\chi)V(s,\chi) = \sum_{H<n\leq H^2} c(n)\chi(n)n^{-s} + O\{|s|H^{-1}q^{\frac{1}{2}}\log H\log(q+2)\}$$

但し $|c(n)|\leq\tau(n)$：約数函数 である。そこで Vを任意の数として，

$$\sum_{q\leq V}\sum_{\chi \bmod q}^{*}|1-L(s,\chi)V(s,\chi)|^2 \ll \log H \sum_{k\ll\log H}\sum_{q\leq V}\sum_{\chi \bmod q}^{*}\left|\sum_{n=2^kH}^{2^{k+1}H} c(n)\chi(n)n^{-s}\right|^2$$
$$+H^{-2}V^3\log^2(V+2)\log^2 H\cdot|s|^2.$$

しかるに定理1.3 により

$$\sum_{k\ll\log H}\sum_{q\leq V}\sum_{\chi \bmod q}^{*}\left|\sum_{n=2^kH}^{2^{k+1}H} c(n)\chi(n)n^{-s}\right|^2$$
$$\ll \sum_{k\ll\log H}(V^2+2^kH)\sum_{n=2^kH}^{2^{k+1}H}\tau^2(n)n^{-2}$$
$$\ll(\log H)^3\sum_{k\ll\log H}\left\{1+\frac{V^2}{2^kH}\right\}\ll(\log H)^4\left\{1+\frac{V^2}{H}\right\}.$$

従って部分和法により，直ちに次の不等式を得る。

$$A(s)\ll(\log H)^5\{(\log N)^{-C_0}+H^{-1}Q\}+|s|^2H^{-2}Q^2(\log Q)^2(\log H)^2.$$

ここで $H = Q(\log N)^{C_0}$ とすれば

$$A(s)\ll(\log Q)^5(\log N)^{-C_0}|s|^2.$$

(vi) 今度は，$B(s)$に Large Sieve を援用するのであるが，$A(s)$とほぼ同じであるので概略を示すにとどめる。 Vを任意の数として，

$$\sum_{q\leq V}\sum_{\chi \bmod q}^{*}\{|L(s,\chi)L'(s,\chi)V^2(s,\chi)|+|L'(s,\chi)V(s,\chi)|\}$$
$$\ll\left\{\sum_{q}\sum_{\chi}^{*}|L(s,\chi)|^4\right\}^{\frac{1}{4}}\left\{\sum_{q}\sum_{\chi}^{*}|L'(s,\chi)|^4\right\}^{\frac{1}{4}}\left\{\sum_{q}\sum_{\chi}^{*}|V^4(s,\chi)|\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

しかるに

$$\sum_{q\leq V}\sum_{\chi \bmod q}^{*}|L(s,\chi)|^4\ll V^2|s|^2\log^4(V|s|) \qquad (\sigma\geq\tfrac{1}{2})$$

及び

$$\sum_{q\leq V}\sum_{\chi \bmod q}^{*}|V^4(s,\chi)|\ll(H^2+V^2)\log^4 H \qquad (\sigma\geq\tfrac{1}{2})$$

は (V) と同じようにして証明できる。

として，又

$$L'(s,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma L(\zeta,\chi)(\zeta - s)^{-2}\,d\zeta$$

（但し γ は，s を中心として，半径 $(\log N)^{-1}$ の円である）だから，

$$|L'(s,\chi)|^4 \ll (\log N)^5 \oint_\gamma |L(\zeta,\chi)|^4\, |d\zeta|$$

よって上記 $L^4(s,\chi)$ についての不等式から，

$$\sum_{q\le V}\ \sum^*_{\chi \bmod q} |L'(s,\chi)|^4 \ll V^2|s|^2\log^4(V|s|)\log^4 N.$$

従って部分和法により

$$B(s)\ll |s|\, Q\, (\log N)^{2+c_0}(\log Q)^2 \log^2(Q|s|+2).$$

(vii) さて，(iv) の議論にもどって，(v) 及び (vi) の結果から，$k=3$ として，

$$E_1(Q)\ll N(\log N)^{1-c_0}(\log Q)^5 + N^{\frac{1}{2}}Q(\log N)^{2+c_0}(\log Q)^4.$$

(iii) によって $E(Q)$ についても同じ不等式が成立することがわかる。即ち，(ii) にもどって，

$$\sum_{q\le Q}\ \mathrm{Max}_{y\le N}\ \mathrm{Max}_{(q,l)=1}|\psi_3(y;q,l) - \varphi(q)^{-1}y|$$
$$\ll N(\log N)^{1-c_0}(\log Q)^7 + N^{\frac{1}{2}}Q(\log N)^{2+c_0}(\log Q)^6$$

を得る。

(viii) 所で，$\psi_k(y;q,l)$ は y の非減少函数であるから，$0<\lambda<1$ として，

$$\int_{e^{-\lambda}y}^{y}\psi_{k-1}(\xi;q,l)\frac{d\xi}{\xi} \le \lambda\psi_{k-1}(y;q,l)\le\int_y^{e^\lambda y}\psi_{k-1}(\xi;q,l)\frac{d\xi}{\xi}.$$

いま $\psi_k(y;q,l) = \varphi(q)^{-1}y + r_k(y;q,l)$ とすれば，この2つの積分は

ともに，$(\lambda + O(\lambda^2))\varphi(q)^{-1}y + O(\max_{y\le N}|r_{k-1}(y;q,l)|)$ である。従って

$$\sum_{q\le Q}\ \mathrm{Max}_{y\le N}\ \mathrm{Max}_{(q,l)=1}|r_{k-1}(y;q,l)|\ll \lambda N\log Q + \lambda^{-1}\sum_{q\le Q}\mathrm{Max}\,\mathrm{Max}\,|r_k(y;q,l)|$$

となる。よって $k=3$ からはじめて，$k=2$ では $\lambda^{\frac{1}{2}}$，$k=1$ については，$\lambda^{\frac{1}{4}}$ を用いれば

$$\sum_{q\le Q}\ \mathrm{Max}_{y\le N}\ \mathrm{Max}_{(q,l)=1}|r_0(y;q,l)| \ll \lambda^{\frac14}N\log Q+\lambda^{-\frac74}\{N(\log N)^{1-C_0}(\log Q)^5+ + N^{\frac12}Q(\log N)^{2+C_0}(\log Q)^6\}$$

を得る。ここで $\lambda=(\log N)^{-4(A+1)}$, $C_0=8A+13$, $Q=N^{\frac12}(\log N)^{-4(4A+7)}$ とすれば

(1)を得る。よって定理 1.5 の証明は終る。

§4 最小2次非剰余について

この節では、定理 1.2 の応用を示そう。素数 p を法として、最小の2次非剰余を $k_2(p)$ とするとき、任意の ε に対して $k_2(p)\ll p^{\varepsilon}$ であろうと Vinogradov が予想している。この予想に最も迫ったのは、次の Linnik の定理であろう。実は、これを証明するために、彼は Large Sieve（定理1.2 の形のもの）を展開したのであった。（[29]）

<u>定理 4.1</u>（Linnik）

$N^{\varepsilon}<p\le N$, $k_2(p)>N^{\varepsilon}$ なる素数 p の数は、ε のみで定まる、ある常数よりも小である。

<u>証明</u>　そのような素数の数を $S(N)$ としよう。$n_1,n_2,\cdots,n_Z\le N^2$ を、その素因数が全て N^{ε} より小なるもの全体としよう。すぐわかるように、これらは全て $k_2(p)>N^{\varepsilon}$ なる p について 2次剰余となっている。従ってこの場合（定理1.2における）$Z(p,a)$ は 高々 $\frac{p+1}{2}$ 個の a についてのみ零でない。従って、

$$\begin{aligned}\frac14 Z^2 S(N) &\le \sum_{p\le N,\ k_2(p)>N^{\varepsilon}}\frac1p\left(p-\frac{p+1}{2}\right)Z^2 \le \sum_{p\le N} p\sum_{\substack{a\\ Z(p,a)=0}}\left(\frac{Z}{p}\right)^2\\ &\le \sum_{p\le N} p\sum_{a\le p}\left\{Z(p,a)-\frac{Z}{p}\right\}^2\\ &\ll N^2 Z.\end{aligned}$$

すなわち、$S(N)\ll N^2Z^{-1}$。この値が ε のみに関係するのは、よく知られた事実である。

(A.I. Vinogradov [47] を参照のこと)

所で、一方 Erdös [13] は、この Linnik の定理を用いて、次の美しい事実を発見した。

定理 4.2 (Erdös)

p_k は k 番目の素数とすると、

$$\sum_{p \le N} h_2(p) = (1+o(1))\pi(N) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} p_k .$$

更に高次の最小非剰余についても同様のことが Elliott [10] によって証明されている。

又、素数を法とする「最小原始根」の大きさを評価することが、Vinogradov によって問題にされている。定理 4.2 に相当するようなことを証明するのは、極めて困難であるが、ある程度の「平均的」な結果は、やはり Large Sieve によって証明されている。これについては、Burgess − Elliott [6] を見られたい。更に又、原始根についての Artin [27; 序文] の有名な予想も「平均」の意味で、Large Sieve の射程内に入っている (Goldfeld [19])。なお、Artin 予想は、最近 C. Hooley [25] によってある種の Kummer 体の Dedekind zeta 函数に対する Riemann 予想下に、肯定的に解決された。

§5. Titchmarsh の約数問題及び Hardy-Littlewood の予想「J」.

Titchmarsh [43] は後で述べる Hardy-Littlewood の予想の変形として、和

$$D_a(N) = \sum_{p \le N} \tau(p-a) \qquad (N \to \infty)$$

の asymptotic-formula を求めることを問題にした。この和の下からの評価は、Erdös [12], Haselgrove [22] らによって研究されてた。しかし Linnik [32; p.164 下から 5 行目] も注意しているように、古い Large Sieve によれば $D_a(N) \gg N$ はすぐ出る。

$D_a(N)$ の asymptotic formula の最初の証明は, Linnik [32] によってなされたが, そこにおいては, Weil [51] による Kloosterman 和の評価が決定的である。しかるに, Bombieri の定理 (定理 1.5) によれば単純明解である。

<u>定理 5.1</u> (Linnik)

$$D_a(N) = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} N \prod_{p\mid a} \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} + O\left(N \frac{\log\log N}{\log N}\right).$$

<u>証明</u>.

$$D_a(N) = \sum_{p\le N} \sum_{p-a=lm} 1$$

$$= \sum_{\substack{p-a=lm,\ l<N^{\frac12}(\log N)^{-B}\\ p\le N}} 1 + \sum_{\substack{p-a=lm,\ m<N^{\frac12}(\log N)^{-B}\\ p\le N}} 1 + \sum_{\substack{p-a=lm,\ l,m\ge N^{\frac12}(\log N)^{-B}\\ p\le N}} 1$$

$$- \sum_{\substack{p-a=lm,\ l,m<N^{\frac12}(\log N)^{-B}\\ p\le N}} 1$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 - \sum\nolimits_4 .$$

ここで

$$\sum\nolimits_3 \ll N \frac{\log\log N}{\log N}, \quad \sum\nolimits_4 \ll N(\log N)^{1-2B}$$

は容易にわかる。そして, 定理 1.5 により

$$\sum\nolimits_1 = \sum\nolimits_2 = \sum_{l\le N^{\frac12}(\log N)^{-B},\ (l,a)=1} \sum_{\substack{p\equiv a\ (\mathrm{mod}\ l)\\ p\le N}} 1 + O(N^{\frac12}(\log N)^{-B})$$

$$= \mathrm{Li}(N) \sum_{l\le N^{\frac12}(\log N)^{-B},\ (l,a)=1} \varphi(l)^{-1} + O(N(\log N)^{-A}).$$

従って Landau の有名な asymptotic-formula により証明は終る。

Barban [1] には, $\sum_{p_1 p_2\le\sqrt{N}} \tau(p_1p_2-1)$ なる和の asymptotic-formula が Large Sieve によって証明されている。

次に Hardy-Littlewood の予想「J」についてのべよう。

Hardy と Littlewood は，彼らの有名なシリーズ「Partitio Numerorum」の第III論文[20]に於て，素数のからんだ加法的数論に於る多くの予想を提出した。因に，彼らの提出した予想のうち，完全に解決されたのは，I. M. Vinogradov の「3素数定理」と，これからのべる「予想J」のみである。　この予想は，1923年に提出されたまま，実に35年の間，誰一人として手をつけていなかったのであるが，1957年 Hooley [24] は，拡張された Riemann 予想下に，これを解した。実は，この問題においては，Riemann 予想は「万能」ではないのであって，Hooley の重大な発見は，ある種の和の評価に，Brun Sieve が極めて有効なことを示したことにある。この Brun Sieve の用い方は，Erdös [12] による所が大きいと思われる。　Hooley の研究は，「quasi-prime」という，binary-additive な問題に大変有効な概念を通して，直ちに，Linnik [31, 32] の完全証明に結実した。これは，第2次大戦後の数論における最大の収穫の1つであろう。Linnik の証明は，まことに力にあふれたものであるが，主な武器は，Chebychev の不等式，Weil の Kloostermann 和の評価及び $L(s,\chi)$ の6乗の平均値の評価である。この $L(s,\chi)$ の評価が A. I. Vinogradov の結果 [48] に負うのである。

しかるに，Bombieri の発見は Hooley の仮定した Riemann 予想にかわり得るものであり，従って Hooley の方法は全面的に支持されることとなったのである。

<u>定理 5.2</u> (Hooley-Linnik)

充分大きな整数 N を，1つの素数と2つの平方数の和にわける仕方の数を $Q(N)$ とすれば

$$Q(N) = \pi \frac{N}{\log N} \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{\rho(p)}{p(p-1)}\right) + O\left(N (\log N)^{-(1+\delta)}\right)$$

ここに $\rho(n)$は mod 4 での non-principal character. 又 δ は $1/35$ より大きいある常数である。

証明（概略）

まず $r(n)$を，nを2つの平方数にわける仕方の数とすれば，よく知られているように。

$$r(n) = 4\sum_{n=lm}\rho(l)$$

従って
$$Q(N) = \sum_{p\leq N} r(N-p) = 4\sum_{p\leq N}\sum_{N-p=ml}\rho(l)$$

$$=4\Bigl\{\sum_{\substack{l\leq N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B},\ N-p=lm \\ p\leq N}}\rho(l) + \sum_{\substack{l\geq N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{B},\ N-p=lm \\ p\leq N}}\rho(l) + \sum_{\substack{N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B}<l<N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{B} \\ N-p=lm,\ p\leq N}}\rho(l)\Bigr\}$$

$$=4\Bigl\{\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3\Bigr\}.$$

定理1.5を用いて，容易に

$$\sum\nolimits_1 = \frac{\pi}{4}\frac{N}{\log N}\prod_{p\nmid N}\Bigl(1+\frac{\rho(p)}{p(p-1)}\Bigr) + O\bigl(N(\log N)^{-A}\bigr)$$

$$\sum\nolimits_2 = O\bigl(N(\log N)^{-A}\bigr).$$

そこで問題は，$\sum_3$をいかに鋭く評価するか，ということになる。Hooleyは次のように$\sum_3$を分解した；

$$D(n) = \sum_{l|n,\ N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B}<l<N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{B}} 1, \quad F(n) = \sum_{l|n,\ N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B}<l<N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{B}}\rho(l)$$

として，

$$\Bigl|\sum\nolimits_3\Bigr| \leq \Bigl\{\sum_{p\leq N,\ D(N-p)\neq 0} 1\Bigr\}^{\frac{1}{2}}\Bigl\{\sum_{p\leq N} F^2(N-p)\Bigr\}^{\frac{1}{2}}$$

とするのである。この右辺の2つの和の評価には，それ自身としても大変興味深い補題が用いられる。

補題1 (Hooley)

$\Omega(n)$は重複も数えての，nの素因数の数。又 $\frac{1}{2}\leq\alpha<1<\beta\leq\frac{3}{2}$ として，

$\gamma_u = u - u\log u$, $y > \exp(e)$ とすると,

$$\text{(i)} \quad \sum_{m\le y,\ \Omega(m)\ge \beta\log\log y - 1} m^{-1} \ll (\log y)^{\gamma_\beta}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{y^{\frac{1}{2}}(\log y)^{-B-2} < m < y^{\frac{1}{2}}(\log y)^{B},\ \Omega(m)\le\alpha\log\log y} m^{-1} \ll (\log y)^{\gamma_\alpha - 1}\log\log y .$$

補題 2 (Hooley)

$x = N^{(\log\log N)^{-2}}$, $P = \prod_{p\le x} p$ とし,

$$g(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu : \text{prime} \le x \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad h(\nu) = \begin{cases} 1 & (\nu, P) = 1 \\ 0 & (\nu, P) > 1 \end{cases}$$

とする. この $g(\nu)$, $h(\nu)$ から $f(\nu) = g(\nu) + h(\nu)$ とおく。このとき $y \le N$, $q \le N^{1-\varepsilon}$ (εはいくらでも小さくてよい) に対して.

$$\sum_{\nu\le y,\ \nu\equiv a \pmod q} f(\nu) = \begin{cases} \varphi(q)^{-1}B(N)y + O(q^{-1}(\log N)^{-5}N), & (a^{(1)}, q) = 1 \\ O(q^{-1}(\log N)^{-5}N) & , (a^{(1)}, q) > 1 \end{cases}$$

但し, ここに, $B(N)$は, Nのみによって定まり

$$B(N) \ll (\log N)^{-1}(\log\log N)^2.$$

更にま, $a^{(1)} = \prod_{p\mid a,\ p\le x} p$.

補題 1 は Erdös [12] のアイディアで証明される. 又補題 2 は, Brun sieve の簡単な変形で証明される. 補題2はとくに興味深い。と言うのは, 素数 $p \le N$ は, $f(\nu) \neq 0$ なる ν の集合に入っており, しかも, この ν の集合は, 算術級数中に, きわめて「滑らか」に分布している。それに, 素数定理からのずれもあまり大きくなり。この故に Linnik) は「quasi-prime」という名をつけたのである。

さて, 問題の和において, 素数の所を qusi-prime に拡げることにより, あとは,

補題 1, 2 の援助のもとに，複雑ではあるが，本質的には困難でない計算のすえに，

$$\sum_{p\le N,\ D(N-p)\ne 0} 1 \ll N(\log N)^{-(1+\delta')}(\log\log N)^4$$

$$\sum_{p\le N} F^2(N-p) \ll N(\log N)^{-1}(\log\log N)^7$$

$$\delta' = 1-\frac{1}{2}e\log 2 \quad (>0)$$

が結論されるのである。これによって定理 5.2 が確定するのである。

全く同様にして

定理 5.3 (Hooley - Linnik)

固定した $a\ (\ne 0)$ に対して

$$\sum_{p\le N} r(p-a) = \pi\frac{N}{\log N}\prod_{p\nmid a}\left(1+\frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) + O\left(N(\log N)^{-(1+\delta)}\right)$$

従って，x^2+y^2+a という形の素数が無限に存在する。

所で，この定理 5.3 について，つぎの問題が考えられる。それは「重み」$r(p-a)$ をつけないで，本当に x^2+y^2+a の形の素数を数え上げたら一体どうなるか，というのである。

いま，n が x^2+y^2 とかけるとき $b(n)=1$，そうでないとき，$b(n)=0$ とすると

予想 ([35])

$$\sum_{p\le N} b(p-a) = (1+o(1))\mathfrak{S}(a)N(\log N)^{-\frac{3}{2}}$$

ここに

$$\mathfrak{S}(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\prod_{\substack{p\mid a\\ p\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\frac{p^2-1}{p^2-p+1}\prod_{p\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 4)}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)$$

私は，この予想を証明することは大変困難であると思う。部分的には次の結果を得た。

定理 5.4

$$\sum_{p\le N} b(p-a) \gg N(\log N)^{-2}$$

詳しいことは本橋[35]を見られたい。

§6. 「加法的約数問題」への応用

加法的約数問題とは，次の和の asymptotic-formula をもとめることである。

$k_1, k_2 \geq 2$ ，$a \neq 0$ について，

$$D_a(N; k_1, k_2) = \sum_{n \leq N} \tau_{k_1}(n)\tau_{k_2}(n+a) \qquad (N \to \infty)$$

$a=0$ ならば何の問題もないのであるが，$a \neq 0$ となると，たちまち困難になる。おそらく，主要項は，$C(a)N(\log N)^{k_1+k_2-2}$ という形であろう。

このような問題にはじめて手をつけたのは Ingham [26] であろう。(Ramanujan かも知れない。) 彼は $D_a(N; 2, 2)$ の asymptotic formula を証明した。Ingham の結果の大変面白い応用が Erdös [14] によって与えられている。又，Estermann は [15, 16] において，$D_a(N; 2, 2)$ 及びその Conjugate について深く研究し，この問題と，Kloosterman 和との関係を明らかにした。Estermann の結果によって Erdös の結果は少々深められる。これについては本橋[36]を見られたい。更に深い発展は Hooley [23] によってなされた。彼は $D_a(N; 2, 3)$ を計算したのである。彼の証明においては，Weil の Kloosterman 和の評価が決定的である。そして一挙に，任意の k について $D_a(N; 2, k)$ の asymptotic-formula が Linnik [32] によって証明された。再び Weil による Kloosterman 和の評価が本質的に作用している。

さて，前書きが長くなったが，ここで考えるのは，和

$$\sum_{n \leq N} \tau^2(n)\tau(n+1) \qquad (N \to \infty)$$

である。この和は，上記のいずれの方法でもとりあつかえないようである。ただ 1 つ

Large Sieve（定理1.3）のみが有効である。しかも，Kloosterman和を必要としない。

<u>定理 6.1</u>（[34]）

$$\sum_{n\le N}\tau^2(n)\tau(n+1) = \mathfrak{S}N(\log N)^4 + O(N(\log N)^3\log\log N)$$

ここに

$$\mathfrak{S} = \pi^{-2}\prod_p\left\{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\right\}.$$

証明の方針は定理1.5とよく似ているのであるが，つぎの補題を証明するのである。

<u>補題 3</u>（[34]）

$$\sum_{q\le N^{\frac12}(\log N)^{-B}}\ \max_{y\le N}\ \max_{(l,q)=1}\Big|\sum_{n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ q),\ n\le y}\tau^2(n) - \varphi(q)^{-1}\big(f_1(q)y(\log y)^3+f_2(q)y(\log y)^2$$
$$+ f_3(q)y(\log y) + f_4(q)y\big)\Big|$$
$$\ll N(\log N)^{-A}$$

但し $B=16A+52$.

又 $f_1(q),\cdots f_4(q)$ は q のみに関係する函数である。

この補題は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\tau^2(n)n^{-s} = L^4(s,\chi)L^{-1}(2s,\chi^2)$$

を用いて定理1.3のもとに証明される。又 Brun-Titchmarsh の定理に相当する A. I. Vinogradov - Linnik [49] の補題も必要となる。くわしくは，[34] を見られたい。

§7 Goldbach-Rényi の定理.

本来ならば，この節は，Large Sieve の応用の第1にもってくるべきであろうが，あとにのこしたのは，数論に於て，いかに多くの重要な問題が「average」な性格をもっている

かを示したかったからである。すなわちTitchmarshの約数問題にしても，Hardy–Littlewoodの予想にしても，$\pi(y;f,l)$そのものを深く知る必要はなく，それらの「ある多くのもの」を全体として考えれば充分であるということなのである。この「多くのものを同時に考える」という立場がはじめて具体化されたのがRényiの研究[38]なのであった。

さて，
$$D = D(N,\vartheta) = \prod_{p \le N^{\vartheta},\ (p,N)=1} p \qquad (\vartheta < 1)$$
として，Nを偶数とすれば　$N = p + p^*$　(但しp^*はϑ^{-1} $\underbrace{\text{個の}}_{\text{以下}}$素数の積)という表現の数は，
$$\sum_{(N-p,D)=1,\ p \le N} 1$$
より大である。しかるにBrun sieveによって
$$\sum_{(N-p,D)=1,\ p\le N} 1 \ \ge \sum_{Q \in \Omega} \mu(Q) \sum_{\substack{p \equiv N \,(\mathrm{mod}\, Q) \\ p \le N}} 1$$
となる但し，Ωは，Dの約数の，ある特殊な集合である（内山氏の論説を参照）そして，ϑを充分小さくとれば　$Q \le N^{\frac{1}{3}}$　とできる。

さて，上記不等式の右辺は，定理1.5によって
$$\mathrm{Li}(N) \sum_{Q \in \Omega} \mu(Q)\varphi^{-1}(Q) + O\Big\{ \sum_{Q \le N^{\frac{1}{3}}} |\pi(N;Q,N) - \varphi^{-1}(Q)\mathrm{Li}(N)| \Big\}$$
$$\ge C(\vartheta)\, N (\log N)^{-2}.$$
即ち，$N = p + p^*$　という表現は可能なのである。しかも表現の仕方は相当沢山あることもわかる。

上記の考察から明らかなように，Rényiの議論では，Large Sieveは定理1.5ほどには強くなくてもよく，何かある数αについて
$$\sum_{Q \le N^{\alpha}} |\pi(N;Q,N) - \varphi^{-1}(Q)\mathrm{Li}(N)|$$

の自明でない評価が出来さえすればよいのである。しかし，古典的な Siegel の定理とて，$Q \le (\log N)^A$ （A はいくら大でもよい）までしか力を有しないのである。Large Sieve 流の考えは，この点を突破したのであった。

§8. その他の応用

(i) 隣りあう素数の差について．

Hardy - Littlewood は P.N. 8 [21] の初最の頁の脚注で P.N. 7 の予告をしているのであるが，それによると，彼らは，拡張された Riemann 予想のもとに，

$$\liminf_{n \to \infty} (p_{n+1} - p_n)/\log p_n \le \frac{2}{3}$$

を証明したとのことである。しかし P.N. は発表されなかった。

多くの人々によって，この問題が取り上げられたが，Large Sieve（定理 1.5）による，次の結果には，とても及ばなかった。

定理 8.1 （Bombieri - Davenport）[5]

$$\liminf_{n \to \infty} (p_{n+1} - p_n)/\log p_n \le \frac{1}{8}(2+\sqrt{3}) = 0.4665\cdots$$

(ii) $L(1,\chi)$ の大きさについて．

Real character $\chi \bmod q$ について，$L(1,\chi)$ の大きさを評価することは，現在，残されている最大の問題の1つであろう。Chowla [7] は次のことを証明した。

無限に多くの q について

$$L(1,\chi) > (1+o(1))\frac{\pi^2}{6}e^{-\gamma}(\log\log q)^{-1}$$

又無限に多くの q について

$$L(1,\chi) < (1+o(1))e^{\gamma}\log\log q$$

但しγは Euler 常数である。

Bateman, Chowla 及び Erdös [2] は，上記において，qを素数に制限してもよいことを Large Sieve（定理1.2）のもとに証明した。これは大変深いことであると思われる。

(iii) Goldbach予想についての Turán の研究.

Linnik [30] は，ある簡単な考察のもとに，これらの問題においては，「大きな」法に対する character が本質的であろう，と予想している。一方 Turán は一連の研究 [44−46] において，全く別の観点から同じ結論に達した。彼の議論においては Large Sieve（定理1.4）が重要である。結果を標語的に言えば

「Goldbach予想及び双子素数の問題については「大きな」法に対する L-函数の「小さな」零点の分布を知れば充分である」

ここで「小さな」と言うのは，実軸に近い，という意味である。

以上の他にも，Hardy−Littlewood予想「H」についての Miech [33] の研究，Euler 函数 $\varphi(n)$ の値の分布についての Schinzel [41]，Wang [50] の研究など Large Sieve のからむ多くの話題があるが，あまりに特殊になるので，この位にしておく。又，Large Sieve から発生した問題で「一様分布性」の話があるが，いまだ機が熟していると思えないので割愛する。これについては Barban [1] を参照されたい。

最後に一言：Large Sieve の本性は，「average」，即ち確率論的な「何か」である。所で数論の本質は，あくまでも個別的な発想にあろう。自明なことでは

あるが，この点に Large Sieve の限界がある。「個別的」な $\pi(y;q,l)$ について我々はあまりに少ししか知らないのである！

文　献

[1] M. B. Barban : The large sieve method and its application in the theory of numbers. Russ. Math. Surveys 21 (1966), 49—103.

[2] P. T. Bateman, S. Chowla and P. Erdös : Remarks on the size of $L(1,\chi)$. Publ. Math. Debrecen 1 (1949-50), 165—182.

[3] H. Bilharz : Primdivisoren mit vorgegebener Primitivwurzel. Math. Ann. 114 (1937), 476—492.

[4] E. Bombieri : On the large sieve. Mathematika 12 (1965), 201—225.

[5] E. Bombieri and H. Davenport : Small differences between prime numbers. Proc. Royal Soc. 293 (1966), 1—18.

[6] D. A. Burgess and P. D. T. A. Elliott : The average of the least primitive root. Mathematika 15 (1968), 39—50.

[7] S. Chowla : Improvement of a theorem of Linnik and Walfish. Proc. London Math. Soc. (2) 50 (1949), 423—429.

[8] H. Davenport : Multiplicative number theory. Markham (Chicago) 1967.

[9] H. Davenport and H. Halberstam : The values of a trigonometrical polynomial at well spaced points. Mathematika 13 (1966), 91—96.

[10] P. D. T. A. Elliott : A problem of Erdös concerning power residue sums. Acta Arith. 13 (1968), 131 — 149.

[11] P. Erdös : Some remarks on Euler's φ-function. Acta Arith. 4 (1958), 10 — 19.

[12] P. Erdös : On the normal number of prime factors of $p-1$ and some related problems concerning Euler's function. Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 205 — 213.

[13] P. Erdös : Remarks on number theory I. Math. Lapok 12 (1961), 10 — 17.

[14] P. Erdös : Asymptotische Untersuchungen über die Anzal der Teiler von n. Math. Ann. 169 (1967), 230 — 238.

[15] T. Estermann : On the representation of a number as the sum of two products. Proc. London Math. Soc. (2) 31 (1930), 123 — 133.

[16] T. Estermann : Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. 164 (1931), 173 — 182.

[17] P. X. Gallagher : The large sieve. Mathematika 14 (1967), 14—20.

[18] P. X. Gallagher : Bombieri's mean value theorem. Mathematika 15 (1968), 1— 6.

[19] M. Goldfeld : Artin's conjecture on the average. Mathematika 15 (1968), 223 — 226.

[20] G. H. Hardy and J. E. Littlewood : Some problems of " partitio

numerorum" III : On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. 44 (1923), 1–70

[21]. G.H. Hardy and J.E. Littlewood : Some problems of "partitio numerorum" VIII : The number $\Gamma(k)$ in Waring's problem. Proc. London Math. Soc. (2) 28 (1927), 518–542.

[22] C.B. Haselgrove : Some theorems in the analytic theory of numbers J. London Math. Soc. 26 (1951), 273–277

[23] C. Hooley : An asymptotic formula in the theory of numbers. Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 396–413.

[24] C. Hooley : On the representation of a number as the sum of two squares and a prime. Acta Math. 97 (1957), 189–210.

[25] C. Hooley : On Artin's conjecture. J. Reine Angew. Math. 225 (1967), 209–220.

[26] A.E. Ingham : Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. 2 (1927), 202–208.

[27] S. Lang and J. Tate : The collected papers of Emil Artin. Addison-Wesley (1965).

[28] Ju. V. Linnik : The large sieve. Dokl. Akad. Nauk SSSR 30 (1941), 292–294.

[29] Ju. V. Linnik : A remark on the least quadratic non-residue. Dokl. Akad. Nauk SSSR 36 (1942), 119–120.

[30] Ju. V. Linnik : Some conditional theorems concerning the binary Goldbach problem. Izv. Akad. Nauk SSSR s.M. 16 (1952), 503—520.

[31] Ju. V. Linnik : An asymptotic formula in an additive problem of Hardy and Littlewood. Izv. Akad. Nauk SSSR s.M 24 (1960), 629—706.

[32] Ju. V. Linnik : The dispersion method in binary additive problems Amer. Math. Soc., Trans. Math. Monog. 4 (1963).

[33] R. J. Miech : On the equation $n = p + x^2$. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 494—512.

[34] Y. Motohashi : An asymptotic formula in the theory of numbers to appear in vol. 16 no. 3 of Acta Arith.

[35] Y. Motohashi : On the distribution of the prime numbers which are of the form $x^2 + y^2 + 1$. to appear in vol. 16 no. 4 of Acta Arith.

[36] Y. Motohashi : On the sum of the number of divisors in a short segement. to appear.

[37] K. Prachar : Primzahlverteilung. Springer (Berlin 1957).

[38] A. Rényi : On the representation of an even number as the sum of a prime and an almost prime. Amer. Math. Soc., Trans. ser. II. Vol. 19, 299—321.

[39] A. Rényi : Un nouveau théorèm concernant les fonction

indépendantes et ses applications a la théorie de nombres. J. Math. Pures Appl. (9) 28 (1949), 137–149.

[40] K.F. Roth : On the large sieve of Linnik and Rényi. Mathematika. 12 (1965), 1–9.

[41] A. Schinzel : On functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$. Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 3 (1955), 415–419.

[42] T. Tatuzawa : On the zeros of Dirichlet's L-functions. Proc. Japan Acad. 26 (1950), 1–13.

[43] E.C. Titchmarsh : A divisor problem. Rend. Palermo 54 (1930), 414–429.

[44] P. Turán : On the twin-prime problem I. Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci. 9 (1964), 247–261.

[45] P. Turán : Some function theoretic sieve methods in the theory of numbers. Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 1661–1664.

[46] P. Turán : On the twin prime problem. Acta Arith. 13 (1967) 61–89 and 14 (1968), 399–407.

[47] A.I. Vinogradov : On numbers with small prime divisors. Dokl. Akad. Nauk SSSR 109 (1956), 683–686.

[48] A.I. Vinogradov : On the density hypothesis for Dirichlet's L-series. Izv. Akad. Nauk SSSR s.M. 29 (1965), 903–934.

[49] A.I. Vinogradov and Ju.V. Linnik : Estimate of the sum of the

number of divisors in a short segment of an arithmetic progression. Uspehi Mat. Nauk SSSR 12 (1957), 277–280.

[50] Y. Wang : A note on some properties of the arithmetical functions $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ and $d(n)$. Acta Math. Sinica 8 (1958), 1–11.

[51] A. Weil : On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34 (1948), 204–207.

（註） Barban [1] に大変よい文献表がある。