数理解析研究所講究録
第 85 巻 1970 年 81-91

On differential equations with quasiperiodic coefficients

京大 数研　三井斌友

periodic coefficients をもつ微分方程式系について、periodic solutionがえられる条件、解の性質などについてはすでに多くの研究がなされている．しかしquasiperiodic（後述）の場合は、物理的現象の実例はあるようであるが、あまり研究は進んでいないようにみうけられる．当面periodic caseでなりたつことがどの程度analogousに拡張できるか，興味の対象となるであろう．B. X. Xapacaxaл（Алма-Ата）は、数年来quasiperiodic solutionの解析的性質について、いくつかの論文を発表している（[2]、[3]）が、linguistic unpopularityからその内容は知られていないようなので、これを報告するのが、今回の目的である．

§1. quasiperiodic functions

quasiperiodic の概念は、periodic と almost periodic のそれ

それの中間に位置するものである．すなわち

Def. 1.1 $f(t)$ が quasiperiodic function (of order n) であるとは，n 変数函数で各変数 ξ_i について周期 $\tau_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ の周期函数 $F(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ が存在して

$$f(t) = F(t, \cdots, t)$$

がなりたつことである．

但，以下すべて実数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ の間には，次のような rational independency の関係がなりたつものとする：

$$(j, \omega) \equiv j_1\omega_1 + \cdots + j_n\omega_n \ , \ j : \text{integer vector},$$

$$(j, \omega) = 0 \ \Rightarrow \ j = 0 .$$

このような $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を base of frequency という．

上のように定義した quasiperiodic function は（Bohr の意味の）almost periodic function であって，従ってそれについてなりたつことが知られていること (e.g. [1]) は適用することができる．そして quasiperiodic function は finite base をもった almost periodic function であるという特徴づけもできて，次のことが分る．

Prop. 1.1 continuous quasiperiodic function $f(t)$ は一様収束の意味で，Fourier 展開

$$(1.1) \qquad f(t) = \sum_j F_j \, e^{i(j,\omega)t}$$

が可能であって，かつ

(1.2) $M\{|f(t)|^2\} \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_j |F_j|^2$

がなりたつ．

Prop. 1.2 continuous quasiperiodic functions の一様収束列の極限はやはり continuous quasiperiodic である．

その他細かいことは，ここでは省略する．

§2. 線形系の場合の解の性質

quasiperiodic matrix を係数とする次のような線形微分方程式系を考える．

(2.1) $\frac{dx}{dt} = P(t)x$

但，$P(t)$ は m 次行列で，各要素 $p_{kl}(t)$ は同じ base of frequency をもつ quasiperiodic function で，x は m 次元ベクトル．

$P(t)$ に対しては，各変数 ξ_i について周期 $\tau_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ の periodic matrix $F(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ が存在して

$P(t) = F(t, \cdots, t)$

となっている．

D を，n 変数の m 次ベクトル函数 $y(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ に作用する operator で

$Dy = \frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial \xi_n}$

とする．偏微分方程式

(2.2)　$Dy = F(\xi_1, \cdots, \xi_n)y$

を考えて，この方程式の解 y に対して，$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = t$ とおいたとき（$\xi_1 = \cdots = \xi_n$ を n 次元空間の diagonal とよぶことにする）$x(t) = y(t, \cdots, t)$ が (2.1) の解を与える．従って方程式 (2.2) の解を調べようというのが Харасахал の基本的な考え方である．

Def. 2.1　方程式 (2.2) の m 個の特殊解 $y^{(1)}, \cdots, y^{(m)}$ が fundamental system であるとは，次の条件をみたすこととする：

(2.2) の任意の解 y に対して，differentiable function $A_k(\xi_2 - \xi_1, \cdots, \xi_n - \xi_1)$ $(k = 1, \cdots, m)$ が存在して

$$y = A_1 y^{(1)} + \cdots + A_m y^{(m)}$$

がなりたつ．

Prop. 2.1　$y^{(1)}, \cdots, y^{(m)}$ を列とする行列を $Y(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ とする．

$$\det Y(\xi_1, \cdots, \xi_n) \neq 0 \quad \text{for } {}^{\forall}\xi$$

ならば，$y^{(1)}, \cdots, y^{(m)}$ は fundamental system である．（このとき Y を fundamental matrix という.）

上のように，変数の差 $\xi_k - \xi_1$ $(k = 2, \cdots, n)$ にのみよる函数 $f(\xi_2 - \xi_1, \cdots, \xi_n - \xi_1)$ を constant on diagonal とよぶことにする．

Prop. 2.2　方程式 (2.2) の係数 F が constant on diagonal 又は

everywhere constant ならば

(2.3) $\quad Y = \exp\left[\dfrac{\alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_n \xi_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} F\right] \qquad (\alpha_k : \text{constant})$

は解の fundamental matrix である．

ここまではFは一般的なものとしてきたが，(2.1)の $P(t)$ が quasiperiodic であるとき，これに対応する方程式(2.2)の条件は，

(2.4) $\quad F(\xi_1 + \omega_1, \cdots, \xi_n + \omega_n) = F(\xi_1, \cdots, \xi_n)$

である．((2.4)をみたすとき，n変数函数として periodic といい，紛らわしくない限り単に periodic という．）この条件のもとで，さらにFが constant on diagonal 又は everywhere constant ならば，Prop. 2.2 によって解の形は完全に決ってしまう．

Prop. 2.3 $\;Y_0(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ を periodic system (2.2) の解の或る fundamental matrix とする．A を nonsingular, constant on diagonal matrix として

(2.5) $\quad Y(\xi_1, \cdots, \xi_n) = Y_0(\xi_1, \cdots, \xi_n) A$

もやはり fundamental matrix である．逆に解のすべての fundamental matrix は (2.5) の形にかける．

さらに periodic system (2.2) では，任意の fundamental matrix

$Y(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ に対して、$Y(\xi_1+\omega_1, \cdots, \xi_n+\omega_n)$ もまた fundamental matrix であるから、上の Prop. によって

(2.6) $\quad Y(\xi_1+\omega_1, \cdots, \xi_n+\omega_n) = Y(\xi_1, \cdots, \xi_n)C$

がなりたつ. C は constant on diagonal matrix. (2.5) における A に対して、$A_+ = A(\xi_1+\omega_1, \cdots, \xi_n+\omega_n)$ とおいて λ に関する方程式

(2.7) $\quad \det.(C - \lambda A^{-1}A_+) = 0$

を、方程式 (2.2) の characteristic equation という.

Prop. 2.4 characteristic equation の解は fundamental matrix のとり方によらない.

方程式 (2.2) を

(2.8) $\quad y = B(\xi_1, \cdots, \xi_n)z$

によって変換する. 但, B は nonsingular matrix. すると z についての方程式

(2.9) $\quad Dz = [B^{-1}FB - B^{-1}\cdot DB]z$

がえられる. B 及び DB は diagonal で bounded とする (このような B を、常微分方程式の場合からの類推で Lyapunov matrix という).

Def. 2.2 方程式 (2.2) が reducible であるとは、Lyapunov matrix によって変換 (2.8) を行ったとき、(2.9) の $B^{-1}FB-B^{-1}\cdot DB$

が constant on diagonal or everywhere constant matrix となることをいう.

Theorem 2.1 (Н.П. Еругин)

方程式 (2.2) が reducible である必要十分条件は, 解の fundamental matrix が

$$(2.10)\qquad Y = B(\xi_1, \cdots, \xi_n)\exp\left[\frac{\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}A\right]$$

と表わされることである. 但, B は Lyapunov matrix, α_n は定数. A は constant on diagonal or everywhere constant matrix.

§3. 線形系の quasiperiodic solution の決定

線形系の解を決めるのに, 関係式 (2.6) での C が重要な役割をもつことになる.

1°. C が everywhere constant の場合.

Floquet の定理に対応して, 次の定理がなりたつ.

Theorem 3.1 方程式 (2.2) が periodic Lyapunov matrix によって, everywhere constant matrix を係数とする方程式に reduce される必要十分条件は, matrix C が everywhere constant であることである.

ゆえに C が everywhere constant である場合は, 変換 (2.8) を用いて, 解の fundamental matrix は

$$Y(\xi_1, \cdots, \xi_n) = K(\xi_1, \cdots, \xi_n)\exp\left[\frac{\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}M\right],$$

但 K は periodic, M は everywhere constant, α_j は定数になる．従って方程式 (2.1) に対しては，fundamental matrix が

(3.1) $\quad X(t) = \Phi(t)\exp(tM)$

とかける．但 Φ は $\Phi(t) = K(t, \cdots, t)$ なる quasiperiodic matrix.

2°. C が "diagonal form"

(3.2) $\quad C = \mathrm{diag.}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, λ_k は constant on diagonal function

である場合.

関係式 (2.6) より

(3.3) $\quad y_{jk}(\xi_1 + \omega_1, \cdots, \xi_n + \omega_n) = \lambda_k y_{jk}(\xi_1, \cdots, \xi_n) \quad (j, k = 1, \cdots, m)$

がなりたつゆえ

(3.4) $\quad y_{jk} = \Phi_{jk}(\xi_1, \cdots, \xi_n)\exp[R_k(\xi_1, \cdots, \xi_n)] \quad (j, k = 1, \cdots, m)$

である．但，Φ_{jk} は periodic, R_k は，periodic function N_k によって

$$R_k = \int_0^{\xi_1} N_k(\tau, \xi_2 - \xi_1 + \tau, \cdots, \xi_n - \xi_1 + \tau)d\tau$$

とかける函数．従って (2.1) に対しては，fundamental matrix の各要素が

$$x_{jk}(t) = \varphi_{jk}(t)\exp[\int_0^t l_k(\tau)\,d\tau]$$

但，$\varphi_{jk}(t) = \Phi_{jk}(t, \cdots, t)$, $l_k(t) = N_k(t, \cdots, t)$

とかける．

3°. C が

$$(3.5)\quad C = \mathrm{diag}\,(I_{g_1}(\lambda_1), \cdots, I_{g_p}(\lambda_p)),\quad g_1 + \cdots + g_p = m$$

但

$$I_{g_k}(\lambda_k) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}}_{g_k},\quad \lambda_k \text{ は constant on diagonal function}$$

である場合．（Jordan canonical form に analogous な場合）

関係式(2.6)より Y の各要素の間には

$$y_{s,j}(\xi_1+\omega_1, \cdots, \xi_n+\omega_n) = \lambda_k y_{s,j}(\xi_1, \cdots, \xi_n),\quad s=1,\cdots,m,\ j=\sum_{i=1}^{k-1} g_i + 1,\ k=1,\cdots,p$$

$$y_{s,j}(\xi_1+\omega_1, \cdots, \xi_n+\omega_n) = y_{s,j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n) + \lambda_k y_{s,j}(\xi_1, \cdots, \xi_n),\quad s=1,\cdots,m,\ \sum_{i=1}^{k-1} g_i + 2 \leq j \leq \sum_{i=1}^{k} g_i,\ k=1,\cdots,p$$

がなりたつ．この関係式によれば，Y の各列は第一列から第 g_1 列，第 g_1+1 列から第 g_2 列，… というようにグループに分けられ，各グループ毎に解の形が決まる．

4°. C が (3.5) の形へ分解可能である場合．

(2.2) の解の fundamental matrix のうち

$Y_0(0, \xi_2, \cdots, \xi_n) = I$

をみたすものを normal という．normal fundamental matrix は必ず存在し，かつ一意的である．この normal matrix Y_0 から次のような fundamental matrix の集合を定義する．

$\{Y_0\} \equiv \{Y\ ;\ Y = Y_0 A$　但 A は everywhere constant matrix$\}$

すると，characteristic equation (2.7) は当然

$$(3.6)\qquad \det.(C-\lambda I)=0$$

になる. そこで characteristic equation の根の様子から, 各点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ において (3.5) への分解が可能になる. ただその分解は ξ に対しては不連続かもしれない. 問題とするのは diagonal の近傍だけであるから, 座標の一次変換

$$\xi_k = \zeta_k + \gamma_k \quad (\gamma_k : \text{constant},\ k=1, \cdots, n)$$

を用いて, 不連続点は避けることができる. このようにすれば, 3° の場合に帰着させられる.

§4. 付記

quasiperiodic coefficients をもつ線形系の場合の解の安定性・不安定性については Штокало[5] がある. そこでは安定性・不安定性の criterion が与えられている.

また線形系の場合の結果を基礎に, 非線形系を扱うことが考えられるが, この点については目下検討中である.

References

[1] Bohr, H.: Almost periodic functions (English tr.), 1951.

[2] Харасахал, В.Х.: О квазипериодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Прикл. Мат. Мех., 27 (1963), 672-682.

[3] Харасахал, В.Х.: О правильности линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, "Некоторые Проблемы Дифференциальных Уравнений", 1969, 3-6.

[4] Немыцкий, В.В. и Степанов, В.В.: Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949.

[5] Штокало, И.З.: Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами, Мат. Сб., 19(61)(1946), 263-286.