数理解析研究所講究録
第 86 巻 1970 年 13-26

Generalized recursion theory.

立教大理　高橋元男

§1.　公理系RBGとそのsyntax.

Bernays-Gödelの公理系BGを弱めたRBGを次のように定義する:

A, B, D群の公理はそのままとしC群の公理から, 巾集合の公理　と無限の公理を除き, 空集合の存在公理をつけ加える.

(Cls, $\mathfrak{M}$ の代りに Class, Set を用いる以外は, Gödelのmonographのnotationに概ね従う.)

定理1.(類の存在定理.)　$\varphi(x; X_1, \cdots, X_n)$ を任意のformula($x, X_1, \cdots, X_n$ のみを自由変数とする)とすれば

$$\vdash \forall X_1 \cdots \forall X_n \exists ! Y \forall x [x \in Y \equiv \varphi(x; X_1, \cdots, X_n)].$$

これはGödelのmonographの通りである.

定理2.(帰納法の原理.) $\varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, X_1, \cdots, X_n)$

をΣ_1（bounded formula（集合についての bounded quantifier 以外の quantifier を含まない式）の前に（unbounded）existential quantifier をつけた形の式）で，X は $t \in X$ の形で φ の positive parts にのみ現われる，とする．このとき

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_m \forall Y_1 \cdots \forall Y_n \exists ! X [\forall x [x \in X \equiv \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)] \wedge \forall Z [\forall x [\varphi(x, Z; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n) \supset x \in Z] \supset Y \subseteq Z]].$$

証明の outline．φ を定理の仮定をみたすものとすれば，

(1). $X_1 \subseteq X_2 \wedge \varphi(x, X_1; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n) \supset \varphi(x, X_2; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$.

及び

(2). $\varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n) \supset \exists z [z \subseteq X \wedge \varphi(x, z; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)]$

が証明される．以下[ ]参照．

注）上の X を

$x \in X \overset{ind}{\equiv} \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$,

$X \overset{ind}{=} \{x \mid \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)\}$

等と書き，φ によって帰納的に定義された類と呼ぶ．また以下においては，もっと省略した書き方もする．

§2. Formal Recursion Theory.

先ず，類Wを帰納的に（即ち定理2を用いて）次の様に定義する：

D. 1. $W \overset{ind}{=} \{\langle\langle 0, a\rangle, x\rangle \mid x \in a\}$

$\cup\{\langle\langle 1,0\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid x \in y\}$

$\cup\{\langle\langle 1,1\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid x \notin y\}$

$\cup\{\langle\langle 2ab\rangle, x\rangle \mid \langle ax\rangle \in W \wedge \langle bx\rangle \in W\}$

$\cup\{\langle\langle 3ab\rangle, x\rangle \mid \langle ax\rangle \in W \vee \langle bx\rangle \in W\}$

$\cup\{\langle\langle 4a\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid \forall t \in x[\langle a\langle ty\rangle\rangle \in W]\}$

$\cup\{\langle\langle 5a\rangle, x\rangle \mid \exists y[\langle a\langle yx\rangle\rangle \in W]\}$

$\cup\{\langle\langle 6a\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle ay\rangle \in W\}$

$\cup\{\langle\langle 7a\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle a, \langle yx\rangle\rangle \in W\}$

$\cup\{\langle\langle 8a\rangle, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, \langle xzy\rangle\rangle \in W\}$

$\cup\{\langle\langle 9a\rangle, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, \langle yzx\rangle\rangle \in W\}$.

D. 2. $A_a = \{x \mid \langle ax\rangle \in A\}$.

D. 3. $\mathcal{RE}(A) \equiv \exists a[A = W_a]$, ($A$は recursively enumerable)

$\mathcal{RC}(A) \equiv \mathcal{RE}(A) \wedge \mathcal{RE}(-A)$, ($A$は recursive)

$\mathcal{PRF}(A) \equiv \mathcal{U}n(A) \wedge \mathcal{RE}(A)$, ($A$は partial recursive function)

$\mathcal{RF}(A) \equiv \mathcal{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) = V$,

(Aは recursive function)

$$\mathcal{PRF}_n(A) \equiv \mathcal{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) \subseteq V^n,$$

（A は n 変数の *partial recursive function*），

$$\mathcal{RF}_n(A) \equiv \mathcal{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) = V^n$$

（A は n 変数の *recursive function*）．

T1. $W_{\langle 0a \rangle} = a$,

$W_{\langle 1,0 \rangle} = E$, $W_{\langle 1,1 \rangle} = \dot{E} = \{\langle xy \rangle \mid x \neq y\}$,

$W_{\langle 2,a,b \rangle} = W_a \cap W_b$, $W_{\langle 3,a,b \rangle} = W_a \cup W_b$,

$W_{\langle 4a \rangle} = W_a^{\pi}$ $(A^{\pi} = \{\langle xy \rangle \mid \forall t \in x[\langle ty \rangle \in A]\})$,

$W_{\langle 5a \rangle} = \mathcal{D}(W_a)$, $W_{\langle 6a \rangle} = V \times W_a$,

$W_{\langle 6+i, a \rangle} = Conv_i(W_a)$ $\quad i=1,2,3.$

は W の定義より明らか．さらに，これらを組合せると，

T2. $\mathcal{W}(W_a) = \mathcal{D}(W_a^{-1}) = W_{\langle 5,7,a \rangle}$,

$a^c (= V - a) = \dot{E}''\{a\} = \mathcal{W}(\dot{E} \cap (V \times \{a\}))$

$= W_{\langle 5,7,2,\langle 1,1 \rangle,6,0,\{a\} \rangle}$,

$W_a'' W_b = \mathcal{W}(W_a \cap (V \times W_b))$

$= W_{\langle 5,7,2,a,6,b \rangle}$,

$W_a \restriction W_b = W_{\langle 2,a,6,b \rangle}$,

$I = \{\langle xy \rangle \mid \forall t \in x[t \in y] \wedge \forall t \in y[t \in x]\}$

$= E^{\pi} \cap E^{\pi,-1} = W_{\langle 2,\langle 4,1,0 \rangle,\langle 7,4,1,0 \rangle \rangle}$.

$0 = E \cap \dot{E} = W_{\langle 2\langle 1,0 \rangle\langle 1,1 \rangle \rangle}$, $\qquad V = 0^c$.

$W_a \times W_b = (V \times W_a)^{-1} \cap (V \times W_b)$

$= W_{\langle 2, \langle 6\,\text{た}\rangle 7, 6, a\rangle}$.

定理3. $\varphi(x, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ を Σ_1, $Y_1, \cdots, Y_n$ について positive とすれば

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_m \forall Y_1 \cdots \forall Y_n \forall X [\forall x [x \in X \equiv \varphi(x, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)] \supset [\mathcal{RE}(Y_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{RE}(Y_n) \supset \mathcal{RE}(X)]]$$

証明. もっと一般に $\varphi(x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ を Σ_1, positive ($Y_1, \cdots, Y_n$ に関し) とするとき,

(*) $\mathcal{RE}(Y_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{RE}(Y_n)$

$$\supset \mathcal{RE}(\{\langle x_1, \cdots, x_\ell\rangle \mid \varphi(x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)\})$$

を証明する. これは φ の中の論理記号の数に関する帰納法による. (但し ¬ は prime formula にのみついているとする.)

Basis. φ は prime formula, 又はその否定とすると次のような場合に分れる. φ が

(1) $x_i \in x_j$ (2) $x_i \in y_j$ (3) $y_i \in x_j$ (4) $y_i \in y_j$ (5) $x_i \in Y_j$ (6) $y_i \in Y_j$

(1)′ $x_i \notin x_j$ (2)′ $x_i \notin y_j$ (3)′ $y_i \notin x_j$ (4)′ $y_i \notin y_j$.

このうち (3) (3)′ は $(\neg)\exists t \in x_j \forall s [s \in y_i \equiv s \in t]$ と書きなおせるから、prime の場合から除いてよい. 他の場合のうち (4), (4)′, (6) は φ が $x_1, \cdots, x_\ell$ を含まないから, φ が成り立つか, 成り立たないかに従って

$$\{\langle x_1 \cdots x_\ell\rangle \mid \varphi\} = V^\ell \text{ 又は } 0$$

であるから，いずれの場合も，T.2.により(*)は成り立つ．

φが(2)の形のときは

$$\{\langle x_1 \cdots x_l\rangle \mid \varphi\} = \underbrace{V\times\cdots\times V}_{i-1\text{個}} \times y_j \times \underbrace{V\times\cdots\times V}_{l-i\text{個}}$$

となる(但し×の結合は後からとする)のでやはりrec. enum.である．(3)′，(5)の場合も同様である．残った(1)(1)′の場合はGödelのmonographのM1の証明のようにやればよい．即ち，先ず($i<j$としてよい)

$$\{\langle x_{i'} x_{j'}\rangle \mid \varphi\} \quad (= E, E^{-1}, \dot{E}, \dot{E}^{-1}\text{のいずれか})$$

を作り、後を一ぺんにふやし　(i', j'は$\min(i,j)$, $\max(i,j)$)

$$\{\langle x_{i'} x_{j'} \langle x_{j'+1}\cdots x_l\rangle\rangle \mid \varphi\}$$

を作り、以下　順次

$$\{\langle x_{i'}\, x_s \cdots x_{j'-1}\, x_{j'} \cdots x_l\rangle \mid \varphi\} \quad (s = j'-1, j'-2, \cdots, i'+1)$$

$$\{\langle x_k\, x_{k+1} \cdots x_{i'} \cdots x_l\rangle \mid \varphi\} \quad (k = i', i'-1, \cdots, 1)$$

を作ればよい。　これらの操作は、すべてT1, T2の中の演算の結合で表現できるから、定理は成り立つ．なお、この場合の方法はφが$x_i = x_j$のときも通用することを、後のためここで注意する．

Induction Step.　一番外の論理記号が∧又は∨のときは帰納法の仮定を用いれば、容易に示される．一番外にquantifierがつく場合は、次の3通りに分れる．

(1) φ が $\exists x\, \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ の形のとき，

(2) φ が $\forall x \in y_j\, \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ の形のとき，

(3) φ が $\forall x \in x_i\, \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ の形のとき．

(1) の場合、$A = \{\langle x, x_1, \cdots, x_\ell \rangle \mid \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ とすれば，帰納法の仮定により

$$\mathcal{RE}(Y_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{RE}(Y_\ell) \supset \mathcal{RE}(A)$$

がえる．$\{\langle x_1 - x_\ell \rangle \mid \varphi\} = \mathcal{D}(A)$ であるから，上のこと及びT1 から(*) が示される．

(2)の場合．$A = \{\langle x, x_1, \cdots, x_\ell \rangle \mid \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ とすれば $A^\pi = \{\langle t\, x_1 \cdots x_\ell \rangle \mid \forall x \in t\ \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$

$$\{\langle x_1, \cdots, x_\ell \rangle \mid \varphi\} = A^{\pi, -1}{}''\{y_j\}$$

だから (1) の場合と同様に (*) が示される．

(3) の場合．$A = \{\langle x\, x_1 \cdots x_\ell \rangle \mid \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ とすれば $A^\pi = \{\langle t\, x_1, \cdots, x_\ell \rangle \mid \forall x \in t\ \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ 故に

$\{\langle x_1 \cdots x_\ell \rangle \mid \varphi\} = \mathcal{D}(A^\pi \cap I_i^\ell)$ ここに

$$I_i^\ell = \{\langle x_i\, x_1 \cdots x_\ell \rangle \mid x_1, \cdots, x_n \in V\}$$
$$= \{\langle x_1 \cdots x_{\ell+1} \rangle \mid x_1 = x_{i+1}\}$$

でこれは r.e. であることが上の注意からわかる．あとは(1)

(2) の場合と同様に(∗)が示される．（証明終）

定理4．$\varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ が Σ_1 で $Y_1, \cdots, Y_n$ に関し positive とすれば

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_m \forall Y_1 \cdots \forall Y_n \forall X [\forall x [x \in X \overset{ind}{\equiv} \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)] \wedge \mathcal{RE}(Y_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{RE}(Y_n) \supset \mathcal{RE}(X)].$$

証明．定理3に，[ ] の Theorem 1 と同様な方法で reduce する．

上の一般的な定理3，4により次のことがわかる．

定理5．(i) 次の Class は rec. enum. である：任意の set a, V, E, I, O_n, W (ii) A, B が rec. enum. ならば次のものも r.e. である：$A \cup B$, $A \cap B$, $\gamma(A)$, $\mathcal{P}(A)$, $Conv_i(A)$ $(i=1, 2, 3)$, $A \times B$, A^n, A^π, A^σ, A_a, $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{M}(A)$, $A \circ B$.
(iii) 次のものは n 変数 recursive functions である．$(n \geq 1)$.

$$C^n_{(a)} \overset{df}{=} \{\langle a x \rangle \mid x \in V^n\} \quad (a \in V).$$

$$I^n_i \overset{df}{=} \{\langle x_i x_1 \cdots x_n \rangle \mid x_j \in V, j = 1, \cdots, n\}.$$

$$P_n \overset{df}{=} \{\langle\langle x_1 \cdots x_n \rangle x_1 \cdots x_n \rangle \mid x_j \in V, j = 1, \cdots, n\}.$$

(iv) A を n 変数の partial recursive function，$B_1, \cdots, B_n$ を m 変数の partial recursive functions とすれば

$$A \circ (B_1, \cdots, B_n) \overset{df}{=} \{\langle y x_1 \cdots x_m \rangle \mid \exists y_1 \cdots \exists y_m$$

$[\langle y\, y_1 \cdots y_n\rangle \in A \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} [\langle y_i\, x_1 \cdots x_m\rangle \in B_i]]\}$（合成関数）

も m 変数の partial recursive function である。

またPRF，RC，RF_n の定義より

T.3. $PRF(A) \wedge RC(\mathcal{D}(A)) \supset RC(A)$,

$RF_n(A) \supset RC(A)$,

が証明される。さて partial recursive function の理論はあとまわしにして recursively enumerable class の理論を先に展開する。

Wはそれ自身 r.e. であり，かつ任意の r.e. class A は適当な set a に対し $A = W_a$ と表わされるから，Wは r.e. の universal class とよぶ。対角線論法により

T.4. $\neg RC(W)$

が成り立つ。

$A = W_a$ のとき a を A の（r.e.）code とよぶ。

定理6. 定理5 (ii) で，(A，B が r.e. であるとき) r.e. なることの示された class の code は A（又は A，B）の code(s) の recursive function（1変数又は2変数）として求められる。例えば

$\vdash \exists X[RF_2(X) \wedge \forall a \forall b[W_{X'\langle ab\rangle} = W_a \cup W_b]]$.

（この場合 $X = \{\langle\langle 3ab\rangle ab\rangle \mid a, b \in V\}$ とすればよい）

T.5. $\exists S[RF_2(S) \wedge \forall e \forall a[W_{S'\langle ea\rangle} = W_{e,a}]]$

$(W_{e,a} = (W_e)_a.)$

証明. $W_{e,a} = W_e^{-1}``\{a\}$ であるから S を, $\mathcal{RF}_2(S)$ で $S`\langle ea\rangle = \langle 5, 7, 2, \langle 7, a\rangle, 6, 0, \{a\}\rangle$ である様なものとすればよい.

T.6. (i) $\forall F[\mathcal{RF}(F) \supset \exists a[W_{F`a} = W_a]]$.

(ii) $\forall X[\mathcal{RE}(X) \supset \exists a[W_a = X_a]]$.

証明. (ii)のみ行う.

$A = \{\langle ex\rangle \mid \langle S`\langle ee\rangle, x\rangle \in X\}$

は r.e. であるから, その code を f とし $a = S`\langle f, f\rangle$ とおけば

$$\begin{aligned} W_a &= W_{S`\langle ff\rangle} = W_{f,f} \\ &= \{x \mid \langle fx\rangle \in A\} = \{x \mid \langle S`\langle ff\rangle, x\rangle \in X\} \\ &= X_a. \end{aligned}$$

(T.6. は Strong recursion theorem とよばれる.)

D.4. $\Phi_a(X) \overset{\text{df}}{\equiv} \{x \mid \exists y[\langle xy\rangle \in W_a \wedge y \subseteq X]\}$

を enumeration operator とよぶ.

D.5. (i) $A \leq_e^{[a]} B$ (A is enumeration reducible to B with a code a) $\overset{\text{df}}{\equiv}$ $A = \Phi_a(B)$.

(ii) $A \leq_e B$ (A is enumeration reducible to B) $\overset{\text{df}}{\equiv}$ $\exists a[A \leq_e^{[a]} B]$.

$\leq_e$ は reflexive かつ transitive ~~な~~関係でありさらに

T.7. $A \leq_e B \wedge \mathcal{RE}(B) \supset \mathcal{RE}(A)$

である.

定理7. $\varphi(x, X)$ を Σ_1 で X に関して *positive* とすれば

$\vdash \forall x[x \in A \equiv \varphi(x, B)] \supset A \leq_e B]$.

証明. 定理3の証明を相対化すればよい.

D.6. (i) $A \upharpoonright^{[a]} B$ (*A is r.e. in B with code a*)

$\overset{\mathrm{df}}{\equiv}$ $A = \{x \mid \exists y \exists z [\langle x y z \rangle \in W_a \wedge y \subseteq B \wedge z \cap B = 0]\}$.

(ii) $A \upharpoonright B$ (*A is r.e. in B*) $\overset{\mathrm{df}}{\equiv} \exists a [A \upharpoonright^{[a]} B]$.

D.7. (i) $A \leq_T^{\langle a b \rangle} B \overset{\mathrm{df}}{\equiv} A \upharpoonright^{[a]} B \wedge -A \upharpoonright^{[b]} B$.

(ii) $A \leq_T B$ (*A is recursive in B*)

$\equiv \exists a \exists b [A \leq_T^{\langle a b \rangle} B]$.

§3. *partial recursive functions* と *uniformization of recursively enumerable classes.*

RBG の中では r.e. *class* の *uniformization principle* を証明できない. これを可能にするために $V = L$ を公理として付加する.

T.8. $RC(R) \wedge RC(S) \wedge RC(J) \wedge RC(F) \wedge RC(Od) \wedge RC(K_i)$ $i = 1, 2$. (R, S, J, F, K_i, Od は *Gödel* の *monograph* の通り).

証略.

D. 8. $\langle xy\rangle \in \prec (\equiv x \prec y) \overset{\mathrm{df}}{\equiv} Od'x < Od'y$.

T. 9. $RC(\prec) \wedge \prec$ is a well ordering of V.

T. 10. (Uniformization principle).

(i) $RE(A) \supset \exists B[PRF(B) \wedge B \subseteq A \wedge \mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(A)]$.

(ii) $\exists W'[RE(W') \wedge \forall e[W'_e \subseteq W_e \wedge Un(W'_e) \wedge \mathfrak{D}(W'_e) = \mathfrak{D}(W_e)]]$.

証明. $Q \overset{\mathrm{ind}}{=} \{\langle\langle 0a\rangle 0x\rangle \mid x \in a\}$

$\cup \{\langle\langle 1, 0\rangle, 0, \langle xy\rangle\rangle \mid x \in y\}$

$\cup \{\langle\langle 1, 1\rangle, 0, \langle xy\rangle\rangle \mid x \notin y\}$

$\cup \{\langle\langle 2ab\rangle, \langle uv\rangle, x\rangle \mid \langle aux\rangle \in Q \wedge \langle bvx\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 3ab\rangle, u, x\rangle \mid \langle aux\rangle \in Q \vee \langle bux\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 4a\rangle, z, \langle xy\rangle\rangle \mid \forall t \in x \exists s \in z[\langle as\langle ty\rangle\rangle \in Q]\}$

$\cup \{\langle\langle 5a\rangle, z, x\rangle \mid \exists u \in z \exists y \in z[\langle au\langle yx\rangle\rangle \in Q]\}$

$\cup \{\langle\langle 6a\rangle, z, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle azy\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 7a\rangle, z, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle a, z\langle yx\rangle\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 8a\rangle, u, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, u, \langle xzy\rangle\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 9a\rangle, u, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, u, \langle yzx\rangle\rangle \in Q\}$,

と定義すれば明らかに

$$\forall e[RC(Q_e) \wedge W_e = \mathfrak{D}(Q_e)].$$

そこで

$W' = \{\langle e\langle xy\rangle \mid \exists z[\langle ezxy\rangle \in Q \wedge \forall t \forall s[\langle ts\rangle \prec \langle zx\rangle$

$\supset \langle e t s y \rangle \notin Q]]\}$ と定義すればよい．定義の中の formula は $\exists z \exists u [\langle e z x y \rangle \in Q \land \forall t \in u \forall s \in u [\langle t s \rangle \prec \langle z x \rangle \supset \langle e t s y \rangle \notin Q]]\}$ と同値であるから W' は r.e. である．

このW′が(ii)をみたすことの証明は略す．

D. 9. (i) $\{e\}(x) \simeq z \equiv \langle e z x \rangle \in W'$,

(ii) $\{e\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq z \equiv \langle e z x_1 \cdots x_n \rangle \in W'$.

T. 11. (Enumeration Theorem).

$\lambda x \{e\}(x)$ は partial recursive functions の enumeration である：即ち

$\forall X [\mathcal{PRF}(X) \supset \exists e [X = W'_e = \{ \langle z x \rangle \mid \{e\}(x) \simeq z \}]]$.

多変数の場合も同様．

T. 12. (s-m-n 定理)

$\exists S^m_n [\mathcal{RF}_{m+n} (S^m_n) \land \forall x_1 \cdots \forall x_m \forall y_1 \cdots \forall y_n \forall e$
$[\{e\}(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) \simeq \{ S^m_n{}^{\backprime}\langle e x_1 \cdots x_m \rangle \}(y_1, \cdots, y_n)]]]$.

T. 13. (Strong recursion theorem).

$\forall X [\mathcal{PRF}_{n+1}(X) \supset \exists e \forall x_1 \cdots \forall x_n [\{e\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq X^{\backprime}\langle e x_1 \cdots x_n \rangle]]$.

これらの帰納関数論の基本定理の一般化により、帰納関数論が形式的に展開できる．しかし例えば $\Delta^1_1 = HA$ のような hierarchy の高い理論は、一般に成り立たない．

参考文献

[1] S. Kripke, Transfinite Recursion, Constructible sets and Analogues of cardinals preprint for 1967 UCLA Summer Institute for set theory.

[2] M. Takahashi, An Induction Principle in set theory I, to appear in Yokohama Mathematical Journal.