

Sélimanowski の定理について

法政大 工 田 中 尚 夫

§1. 序 論

筆者は [6] において, Π_1^1 set E に対しその組成分を E_ν ($\nu < \Omega$) とするとき

$$(1) \quad \mu(E) = \mu(\bigcup \{E_\nu \mid \nu < \omega_1\})$$

が成り立つことを示し, 補解析集合に関する Sélimanowski の定理 [4] の精密化を述べたが, 当時 Σ_1^1 set の場合にも上の (1) に対応する形が成立するものと予想した為議論がうまく展開できず Σ_1^1 の場合は未解決であった。所が最近 Martin-Löf の random sequences の概念の拡張を取扱っている際, 偶然 Σ_1^1 の場合は否定的であることが判明したので, それを報告する。すなわち:

1/ $\mu(E)$ は E の Lebesgue measure を, ω_1 は the first non-constructive ordinal を表わす。

定理. Σ_1^1 set A で, $\mu(A) \neq \mu(\bigcup \{A_\nu \mid \nu < \omega_1\})$ なるものが存在する. ここに A_ν は A を篩う recursive sieve に關する A の組成分である.

ここでは Baire's zero-space ${}^N N$ において議論を展開するが本稿のすべての結果は 2^N においても成立する. 説明なしの Notation 及用語については, 例えは "[5], [6]" を参照されたい.

§ 2. Constituents.

E を N^N の一つの Π_1^1 set とし, A をその補集合とする: $A = CE$. E に対し

$$\alpha \in E \iff (\forall \beta)(\exists x) R(\alpha, \bar{\beta}(x))$$

なる recursive predicate $R(\alpha, u)$ が存在する. また \mathcal{U} を sequence numbers の集合とし, \prec は \mathcal{U} 上のいわゆる Kleene-Brouwer ordering とする.

$$\text{Sieve } S \subseteq N^N \times \mathcal{U} \text{ を}$$

$$\langle \alpha, \bar{\beta}(x) \rangle \in S \iff (\forall y)_{y < x} \bar{R}(\alpha, \bar{\beta}(y))$$

によって定義し, $S^{(\alpha)} = \{u \mid \langle \alpha, u \rangle \in S\}$ とおく. よく知られているように

$$\alpha \in E \iff S^{(\alpha)} \text{ is well-ordered by } \prec$$

が成り立つ。

$I^{<\alpha>}$ を $S^{<\alpha>}$ の well-ordered な maximal initial segment とする。高々 ω^2 級の順序数 ν (すなわち $\nu < \Omega$) に対し E_ν, A_ν を次式で定義し、それぞれ E, A の S に関する 組成分 (constituent) という:

$$\alpha \in E_\nu \iff \alpha \in E \text{ \& } \tau(I^{<\alpha>}) = \nu = \tau(S^{<\alpha>}),$$

$$\alpha \in A_\nu \iff \alpha \in A \text{ \& } \tau(I^{<\alpha>}) = \nu,$$

こゝに $\tau(*)$ は $*$ の order-type を表わす。

§ 3. Derived sieves. 各 $\alpha \in O$ に対し ²⁾

Transfinite derived sieves と呼ばれる $S(\alpha)$ を定義する。

$$(1) \quad \alpha = 1. \quad S(\alpha) = S,$$

$$(2) \quad \alpha = 2^k \neq 1. \quad S(\alpha) = \{ \langle \alpha, u \rangle \mid \langle \alpha, u \rangle \in S(k) \text{ \& } (\exists v)[v < u \text{ \& } \langle \alpha, v \rangle \in S(k)] \},$$

$$(3) \quad \alpha = 3 \cdot 5^k. \quad S(\alpha) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S(\{k\}(n_0)).$$

Lemma 1. $\alpha, k \in O$ に対し,

$$(4) \quad |\alpha| \leq |k| \implies S(\alpha) \supseteq S(k),$$

²⁾ O および ω 下には現われる H については, Rogers

[2; §11.7, §16.8] を参照せよ。

$$(5) \quad |a| = |b| \Rightarrow S(a) = S(b).$$

証明. (5) は (4) の直接結果. (4) は b に関する induction に よる.

Lemma 2. $a \in O$ に対し $S(a)$ は HA set である.

証明. Recursion theorem に よって 次の ような partial recursive functions f, g を作る: $a \in O$ ならば " $f(a, u), g(a)$ は defined "

$$\langle \alpha, u \rangle \in S(a) \Leftrightarrow f(a, u) \in H^\alpha(g(a)).$$

$a = 1$. $S(1) = S$ であるから

$$S(1) = \{ \langle \alpha, u \rangle \mid \varphi_0(u) \in H^\alpha(2) \}$$

なる recursive function φ_0 がある.

$$(6) \quad \{f\}(g, 1, u) = \varphi_0(u), \quad \{g\}(f, 1) = 2 \quad \text{とせよ.}$$

$a = 2^k \neq 1$. このときは

$$\langle \alpha, u \rangle \in S(a) \Leftrightarrow \langle \alpha, u \rangle \in S(b) \ \& \ (\exists v)[v \prec u \ \& \ \langle \alpha, v \rangle \in S(b)]$$

$$\Leftrightarrow \{f\}(g, b, u) \in H^\alpha(\{g\}(f, b)) \ \&$$

$$(\exists v)[v \prec u \ \& \ \{f\}(g, b, v) \in H^\alpha(\{g\}(f, b))]]$$

であるから, 適当な partial recursive functions φ_1, ψ_1 に 対し

$$\Leftrightarrow \varphi_1(f, g, b, u) \in H^\alpha(\psi_1(f, g, b))$$

が成り立つ。

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \{f\}(g, a, u) &= \varphi_1(f, g, (a)_0, u) \\ \{g\}(f, a) &= \psi_1(f, g, (a)_0) \end{aligned} \right\} \text{とせよ.}$$

$$\alpha = 3 \cdot 5^k. \quad S(\alpha) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S(\{k\}(n_0)) \quad \text{であるから}$$

$$\langle \alpha, u \rangle \in S(\alpha) \Leftrightarrow (\forall n) [\langle \alpha, u \rangle \in S(\{k\}(n_0))]]$$

$$\Leftrightarrow (\forall n) [\{f\}(g, \{k\}(n_0), u) \in H^\alpha(\{g\}(f, \{k\}(n_0)))]]$$

であるから、適当な partial recursive functions φ_2, ψ_2 :

対し

$$\Leftrightarrow \varphi_2(f, g, k, u) \in H^\alpha(\psi_2(f, g, k))$$

となる。よって

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} \{f\}(g, a, u) &= \varphi_2(f, g, (a)_1, u) \\ \{g\}(f, a) &= \psi_2(f, g, (a)_1) \end{aligned} \right\} \text{とせよ.}$$

(6) ~ (8) を Double recursion theorem 註 3 に

よって解けば、所要の partial recursive functions

f, g が得られる。□

Lemma 3. 各 $\nu < \omega_1$ に対し E_ν, A_ν は共に HA sets である。

3/ Rogers [2; p. 190]

証明. $\nu = |a|$ $a \in O$ なる a をとる. 例えは,
Ljapunow et al [1; p. 51] に於ては

$$\alpha \in E_\nu \Leftrightarrow (\forall h) [h <_0 a \Rightarrow (\exists u) (\langle \alpha, u \rangle \in S(h))]$$

$$\& \neg (\exists u) [\langle \alpha, u \rangle \in S(a)].$$

$\alpha \in A_\nu \Leftrightarrow (\exists u) [\langle \alpha, u \rangle \in S(a)] \& (\forall u) [\langle \alpha, u \rangle \in S(a)]$
 $\Rightarrow (\exists v) \{v \triangleleft u \& \langle \alpha, v \rangle \in S(a)\} \& (\forall h) [h <_0 a \Rightarrow$
 $(\exists u) \{\langle \alpha, u \rangle \in S(h) \& (\forall v) [v \triangleleft u \Rightarrow \langle \alpha, v \rangle \notin S(h)]\}].$
 が成り立つ. 之れ故 Lemma 2 の証明の uniformity
 によつて, E_ν, A_ν は HA sets である. \square

Corollary 4. 各 $\nu < \omega_1$ に対し $\bigcup_{\sigma < \nu} E_\sigma$ と

$\bigcup_{\sigma < \nu} A_\sigma$ は HA sets である. 更に $\bigcup_{\nu < \omega_1} E_\nu$ および

$\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu$ は Π'_1 sets である.

§4. Main Theorem.

Theorem 5. Σ'_1 set A である, $\mu(A) \neq \mu(\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu)$
 なるものが存在する.

証明. $A (\subseteq N^N)$ を

$$\alpha \in A \iff \alpha \text{ is not a HA function}$$

によって定義する. よく知られているように A は Σ_1^1 set
であり, かつ当然 $\mu(A) = 1$.

$$\text{今} \quad \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu\right)$$

と仮定せよ. そのとき

$$\mu\left(\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu\right) = 1.$$

Corollary 4 によって $\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu$ は Π_1^1 であるから, Sacks
- Tanaka の結果 [3; Theorem 3.9], [6; Theorem C]
によって $\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu$ は HA function を含まなければなら
ない. このことは A の定義と矛盾する. \square

そこでどんな ordinal σ に対し

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\nu < \sigma} A_\nu\right)$$

が成立するであろうか?

$\beta \in N^N$ と $\alpha \in O^\beta$ に対し $S(\alpha, \beta)$ を §3 のよ
うに定義すると $S(\alpha, \beta)$ は HA-in- β となり, 従っ
て $\bigcup \{A_\nu \mid \nu < |\alpha|^\beta\}$ ($\alpha \in O^\beta$) も HA-in- β で
ある. 所以て Sélivanowski [4; p. 24] によれば

$$(\exists \beta)(\exists \alpha) [\alpha \in O^\beta \ \& \ \mu(A - \bigcup \{A_\nu \mid \nu < |\alpha|^\beta\}) = 0]$$

が成り立つ。この square bracket 内の条件は Π_1^1 である [5; Theorem 8] から, Kondô-Addison の定理によってこの条件をみたす Δ_2^1 function β が存在する。かくて

Theorem 6. 各 Σ_1^1 set A に対し

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\nu < \sigma} A_\nu\right)$$

なる Δ_2^1 ordinal σ が存在する。

§5. Remark.

Π_1^1 set E に対し, $\alpha \in E$ ならば " $\tau(I^{(\alpha)}) = \tau(S^{(\alpha)})$ は recursive-in- α ordinal であるか"; Σ_1^1 set については必ずしもそうでない。即ち

Theorem 7. 次のような Σ_1^1 set A が存在

する:

- (1) $(\exists \alpha) [\alpha \in A \ \& \ \{ \tau(I^{(\alpha)}) \text{ is not a recursive-in-} \alpha \text{ ordinal} \}]$.

証明. A として Theorem 5 の証明における Σ_1^1 set A をとれ。これに対し (1) が成立しないと仮定すれば:

(2) $(\forall \alpha) [\alpha \in A \Rightarrow \{ \tau(I^{\langle \alpha \rangle}) \text{ is a recursive-in-}\alpha \text{ ordinal} \}]$

となる。

$$A' = \bigcup_{\nu \geq \omega_1} A_\nu$$

とおくと

$\alpha \in A' \Rightarrow \tau(I^{\langle \alpha \rangle}) \text{ is not a recursive ordinal,}$

$$\Rightarrow \omega_1^\alpha \neq \omega_1 \quad \text{註 4'}$$

となる。Sacks [3; Corollary 3.10] によれば

$$\mu(\{ \alpha \mid \omega_1^\alpha \neq \omega_1 \}) = 0$$

であるから $\mu(A') = 0$ が得られ、従って

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu\right)$$

となってしまふ。これは Theorem 5 の証明に反す。□

註 4' もし $\omega_1^\alpha = \omega_1$ ならば “ $\tau(I^{\langle \alpha \rangle})$ is not a rec. ordinal” かつ “ $\tau(I^{\langle \alpha \rangle})$ is not a rec.-in- α ordinal” が生ずるから、(2) と矛盾する。

§ 6. Baire category case. Theorems 5, 6 は
measure の代りに Baire category を用いても成立する.

先づ Thomason [8] と Hinman [7] から次の定理を引
用する:

[TH] $K = \{\alpha \mid \omega_1^\alpha \neq \omega_1\}$ は first category (meager)
である.

Corollary 8. Π_1^1 set E に対し, $\bigcup_{\nu \geq \omega_1} E_\nu$ は first
category である.

(或は上記 Theorem 7 のせれ)
(証明) [6] の Theorem B の証明と全く平行する.

$$E' = \bigcup_{\nu \geq \omega_1} E_\nu$$

とあけは

$\alpha \in E' \Rightarrow \tau(S^{(\alpha)})$ is not a recursive ordinal

$\Rightarrow \omega_1^\alpha \neq \omega_1$ ($\because \tau(S^{(\alpha)})$ は recursive-in- α
ordinal である.)

従って

$$E' \subset K. \quad \square$$

[HI] E が Π_1^1 τ , second category ならば, E は
HA-function を含む.

Theorem 9. 次のような Σ_1^1 set A が存在する:

A は residual (= co-meager) であるが $\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu$ は meager である。

証明. A として定理5の証明における Σ_1^1 set A をとれ. A は明かに co-meager である. もし $\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu$ が not meager ならば, (それは Corollary 4 によつて Π_1^1 set であるから) 上の [HI] によつて HA-element を含まなければならぬ. これは A の定義に反す. \square

Theorem 10. 各 Σ_1^1 set A に対し, $\bigcup_{\nu > \alpha} A_\nu$ が meager となるような Δ_2^1 ordinal α が存在する. (Σ_1^1 sets は可算個しかなく, しかも effective に並べられるから, この α は全ての Σ_1^1 sets に対し共通にとれる. このことは Theorem 6 に対しても同様である.)

証明. Selivanowski [4] によれば,

($\exists \beta$) ($\exists \alpha$) [$a \in O^\beta$ & $\{ \bigcup_{\nu \geq |a|^\beta} A_\nu \text{ is of first category} \}$] が成り立つ. Corollary 4 の相対化によれば, $a \in O^\beta$ の下で $\bigcup_{\nu \geq |a|^\beta} A_\nu$ は a, β に関し Σ_1^1 -form で書けるから $\{ \quad \}$ 内は Σ_2^1 predicate となる. ^{註5/} 従つて Kondô-Addison の定理が適用出来る. \square

注5/ $P(M)$: "M は first category である."

M が Σ_1^1 ならば $P(M)$ は Σ_2^1 である.

(証明)

$P(M) \Leftrightarrow \{ M \text{ は } \bigcup_n S_n \text{ の 部分集合 である; ここに 各 } S_n$
 $\text{は 閉集合 であり、かつ nowhere dense である} \}$

$\Leftrightarrow (\exists \alpha) [(\forall n) \{ F(\lambda_i \alpha \langle n, i \rangle) \text{ は nowhere dense}$
 $\text{である} \} \text{ かつ } M \subseteq \bigcup_n F(\lambda_i \alpha \langle n, i \rangle)]$

ここに $F(\alpha)$ は 閉集合 に対する universal set であり、それ自身 Π_1^0 である。ところで、" $F(\alpha)$ が nowhere dense である" は Π_1^1 であるから、上記の $P(M)$ は Σ_2^1 である。

文 献

- [1] Ljapunow et al., *Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre*, Berlin (1955).
- [2] H. Rogers, Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw Hill, (1967).
- [3] G. E. Sacks, *Measure-theoretic uniformity in recursion theory and set theory*, to appear.
- [4] E. Sélivanowski, *Sur les propriétés des constituantes des ensemble analytiques*, F. M. 21 (1933), 20-28.
- [5] H. Tanaka, *Some results in the effective descriptive set theory*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A vol 3 (1967), 11-52
- [6] H. Tanaka, *A basis result for Π_1^1 -sets of positive measure*, Comment. Math. Univ. St. Paul. 16 (1968), 115-127.

- [7] P. G. Hinman, Some applications of forcing to hierarchy problems in arithmetic, to appear.
- [8] S. K. Thomason, The forcing method and the upper semilattice of hyperdegrees, Trans. A.M.S., 129 (1967), 38-57.

追記

G. E. Sacks は, Theorem 6 を ^{「殆んど」} 最良の形で 次のように改良した:

Σ_1^1 set A に対し

$$\mu(A) = \mu(\bigcup \{A_\nu \mid \nu < \omega_1 + 2\}).$$

Theorem 10 に対しても同様のことが言えるようである。