数理解析研究所講究録
第 86 巻 1970 年 41-51

Metarecursion theory における Sacks の問題について

明大 工 大橋 健八郎

§1. 序

[1] で, Kleene は relative recursiveness に関し, つぎのような定義を与えた。

1つの関数 f は関数 $g_1, \ldots, g_\ell$ から f を recursively に定義するような1つの E (system of equations) が存在するとき, (general) recursive in $g_1, \ldots, g_\ell$ であるという。

自然数の集合Aに対して, f is recursive in A を f is recursive in C_A であるとした。こゝで C_A は A の representing function である。

recursively enumerable sets 全体の standard enumeration を $W_0, W_1, \ldots$ として,

e is consistent iff $\forall x, y, u, v\, (\langle x, y, u, v\rangle \in W_e \rightarrow D_u \cap D_v = \emptyset)$

e is regular iff (e is consistent)

$\& \ \forall x, y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2\ [$

$$[\langle x, y_1, u_1, v_1\rangle \in W_e \ \& \ \langle x, y_2, u_2, v_2\rangle \in W_e$$
$$\& \ (D_{u_1} \cup D_{u_2}) \cap (D_{v_1} \cup D_{v_2}) = \emptyset \rightarrow y_1 = y_2 \,]$$

とする。

[2] で，Rogers は

f is recursive in A iff $(\exists e)[e$ is regular &

$$\forall x, y\, [f(x) = y \leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(\langle x, y, u, v\rangle \in W_e$$
$$\& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A})]]$$

とおいた。

Rogers も指摘している如く（証明はない）つぎの命題が成立する。

<u>命題</u>　f is recursive in A (Kleene) $\Leftrightarrow$ f is recursive in A (Rogers)

証明

$$\exists e \forall x, y\, [f(x) = y \leftrightarrow (\exists u, v)[\langle x, y, u, v\rangle \in W_e \ \& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A})]$$

$\Leftrightarrow$ f is recursive in A (Rogers)

を示せば十分である。

$\Leftarrow$ は明らか。

$\Rightarrow$ の証明。

$$\forall x, y\, [f(x) = y \leftrightarrow (\exists u, v)(\langle x, y, u, v\rangle \in W_e \ \& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A})]$$

を仮定する。このとき，W_e は infinite であるから recursive (total) function $h_e(x)$ で enumerate されていると仮定してよい。

B^s を定義する。（この定義の形は e に依存していない）

1. Step 0. $B^0 = \{ R_e(0) \}$

2. Step s. finite set B^{s-1} が定まったとして, $R_e(s) = \langle x_s, y_s, u_s, v_s \rangle$ とする.

Case 1. $D_{u_s} \cap D_{v_s} \neq \emptyset$. $B^s = B^{s-1}$

Case 2. $D_{u_s} \cap D_{v_s} = \emptyset$.

Subcase 2.1. $\forall y, u, v \, (\langle x_s, y, u, v \rangle \in B^{s-1} \,\&\, (D_u \cup D_{u_s}) \cap (D_v \cup D_{v_s}) = \emptyset$

$\rightarrow y = y_s)$

のとき, $B^s = B^{s-1} \cup \{ R_e(s) \}$

Subcase 2.2. 2.1 以外のとき.

$\langle x_s, y, u, v \rangle \in B^{s-1} \,\&\, (D_u \cup D_{u_s}) \cap (D_v \cup D_{v_s}) = \emptyset \,\&\, y \neq y_s$ であるような $\langle x_s, y, u, v \rangle$ を

$\langle x_s, y^0, u^0, v^0 \rangle, \langle x_s, y^1, u^1, v^1 \rangle, \ldots, \langle x_s, y^{k-1}, u^{k-1}, v^{k-1} \rangle$

とかく。

$U_s = \bigcup_{i<k} D_{u^i}$, $V_s = \bigcup_{i<k} D_{v^i}$ とおけば, U_s, V_s は finite.

従って

$D_\mu = D_{u_s} \cup S \,\&\, D_\nu = D_{v_s} \cup T \,\&\, S \subset U_s \,\&\, T \subset V_s$

$\&\, \forall y, u, v \, (\langle x_s, y, u, v \rangle \in B^{s-1} \,\&\, (D_u \cup D_\mu) \cap (D_v \cup D_\nu) = \emptyset \rightarrow y = y_s)$

であるような $\langle x_s, y, \mu, \nu \rangle$ 全体の集合を B_0^s とし,

$B^s = B^{s-1} \cup B_0^s$

とおくと, B^s は finite.

以上で定義された B^s に対して

$W_{e'} = \bigcup_{s<\omega} B^s$ とおく.

(i) 定義から明らかに e' は regular.

(ii) $\exists u,v\,(\langle x,y,u,v\rangle \in W_{e'}\ \&\ D_u \subset A\ \&\ D_v \subset \bar{A}) \rightarrow f(x)=y$

であることは、2つの subcases に分けて考えるとすぐわかる。

(ii)′ $\langle x,y,u,v\rangle \in W_e\ \&\ D_u \subset A\ \&\ D_v \subset \bar{A}$ ならば明らか。

(ii)″ $\langle x,y,u,v\rangle \in (W_{e'} - W_e)\ \&\ D_u \subset A\ \&\ D_v \subset \bar{A}$ であるとき、e' の定義から、$\langle x,y,u',v'\rangle \in W_e\ \&\ D_{u'} \subset D_u\ \&\ D_{v'} \subset D_v$ であるような $\langle x,y,u',v'\rangle$ が存在する。このとき、仮定から $f(x)=y$

(iii) $f(x)=y$ と仮定する。

$h_e(s)=\langle x,y,u,v\rangle \in W_e\ \&\ D_u \subset A\ \&\ D_v \subset \bar{A}$ である最小の s を s_0 とする。

(iii)′ $h_e(s_0) \in W_{e'}$ ならば、$\exists u,v\,(\langle x,y,u,v\rangle \in W_{e'}\ \&\ D_u \subset A\ \&\ D_v \subset \bar{A})$.

(iii)″ $h_e(s_0)=\langle x,y,u,v\rangle \notin W_{e'}$ とする。

$\sim\exists t\,(h_e(t)=\langle x,y_t,u_t,v_t\rangle \in W_e\ \&\ D_{u_t} \subset A\ \&\ D_{v_t} \subset \bar{A}\ \&\ t<s_0)$ であるから、

$h_e(t)=\langle x,y_t,u_t,v_t\rangle \in W_e\ \&\ y_t \neq y \rightarrow (D_{u_t} \not\subset A \vee D_{v_t} \not\subset \bar{A})$.

従って $\langle x,y,\mu,\nu\rangle \in W_{e'}\ \&\ D_\mu \subset A\ \&\ D_\nu \subset \bar{A}$ である μ,ν がある。

このとき、再び

$\exists u,v\,(\langle x,y,u,v\rangle \in W_{e'}\ \&\ D_u \subset A\ \&\ D_v \subset \bar{A})$.

以上で命題の証明は終った。

§2. 定理

[3] その他におけるつぎの定義は自然に思われる。

Kleene の T に対応する metarecursion theory における T-predicate

$T_1^1(B, e, x, s) \leftrightarrow t(e,s) = \langle e, M, N, x, y\rangle \,\&\, M \subseteq B \,\&\, N \subseteq \bar{B}$,

ここで e = the Gödel n. of a finite system of equations E,

$t(e,s)$ = special metarec. f. which indexes "deductions" from E.

さらに $U(e,s) = y \leftrightarrow t(e,s) = \langle e, M, N, x, y\rangle$,

$\{e\}_s^B(x) = y \leftrightarrow T_1^1(B, e, x, s) \,\&\, U(e,s) = y$,

$\{e\}^B(x) = y \leftrightarrow \exists s(\{e\}_s^B(x) = y) \,\&\, \forall s(\{e\}_s^B$ is defined $\to U(e,s) = y)$.

ordinary recursion theory における §1 の regular に対応するものとして "intrinsically consistent" がある.

e is intrinsically consistent iff $\forall x, s_1, s_2\, [t(e,s_1) = \langle e, M_1, N_1, x, y_1\rangle$

$\& \; t(e,s_2) = \langle e, M_2, N_2, x, y_2\rangle \,\&\, (M_1 \cup M_2) \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset \to y_1 = y_2]$

これに対して，つぎの定理が成立する.

定理. あらゆる intrinsically consistent な e^* に対して (i) or (ii) のいずれか1つが成立するような metarecursively enumerable set A が存在するような $\bar{e}$ がある.

(i) $\{\bar{e}\}^A(e^*) \neq \{e^*\}^A(e^*)$,

(ii) $\{\bar{e}\}^A(e^*)$ is defined , $\{e^*\}^A(e^*)$ is undefined.

上は [3] の問題 Q5 に対する解答になっている。

Q5: 各 e に対して，すべての A に対して $\{e\}^A \simeq \{e^*\}^A$ であ

るような intrinsically consistent e^* が存在するか？

ordinary recursion theory において有限を上に対応する形で定義すると、§1命題の証明からみられるように、Q5 が肯定的に解かれるから、定理は ordinary recursion theory の直線的拡張としてでない metarecursion の性質の1つを指摘していることとなる。

定理の証明、

用いられる記号を挙げておく。

$$M(e,s)=M \,\&\, N(e,s)=N \,\&\, x(e,s)=x \,\&\, y(e,s)=y$$

$$\leftrightarrow \quad t(e,s)=\langle e, M, N, x, y\rangle.$$

$$q(s)=\mu n\, \exists t\,(t<\omega_1 \,\&\, n<\omega \,\&\, s=\omega t+n)$$

$$r(s)=\mu t\,(s=\omega t+q(s))$$

明らかに、$M(e,s)$, $N(e,s)$, $x(e,s)$, $y(e,s)$, $q(s)$, $r(s)$ は metarecursive.

以下、$e, m, n<\omega$, $s<\omega_1$ である e, m, n, s に対して定義する。

$$\mu(e,s)=\mu m\,(\forall s')(s'<s \rightarrow T(e,m,0,s')=\emptyset)$$

$$\hbar(e,m,n,s) = \begin{cases} \mu t\ \exists u\,(\,(\overline{V}(e,m,n,s) \cup M(e,t)) \cap N(e,t) = \emptyset \\ \quad \& \ x(e,t) = e \ \& \ y(e,t) = m \ \& \ \overline{V}(e,m,0,s) \subseteq M(e,t) \subseteq \overline{V}(e,m,n,s) \\ \quad \& \ t = r(u) \ \& \ e = q(u) \ \& \ m < \mu(e,s) \ \& \ u \leq s\ ) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if such } t \text{ exists,} \\ s+1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\overline{W}(e,s) = \begin{cases} (\bigcup_{s'<s} \overline{W}(e,s')) \cup (\bigcup_{\hbar(e,\mu(e,s)-1,n,s) \leq s} (M(e,\hbar(e,\mu(e,s)-1,n,s)) \\ \quad \cup\ N(e,\hbar(e,\mu(e,s)-1,n,s)))) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } s>0 \text{ and } \mu(e,s)<\omega \\ \bigcup_{s'<s} \overline{W}(e,s') \qquad\qquad \text{if } s>0 \text{ and } \mu(e,s)=\omega \\ \emptyset \qquad\qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

τ^k, π_i^k $(i \leq k)$ は [2] における関数とする。

$$\lambda(e,m,s) = \begin{cases} \mu u\ \forall t\,(t<s \rightarrow \lambda(e,m,t) \leq u) \qquad \text{if } m<\mu(e,s),\ 0<m, \\ \mu y[\forall x\,(x \in \overline{W}(e,s) \rightarrow x<y) \ \& \ (y \text{ is a limit ordinal}) \\ \quad \& \ \forall t \forall x\,(t<s \ \& \ x<\mu(e,s) \rightarrow \lambda(e,x,t)<y\,)\,], \\ \qquad\qquad \text{if } m=\mu(e,s) \ \& \ \forall m',n\,(m'<m \ \& \ n<\omega \rightarrow \hbar(e,m',n,s) \leq s) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

$$
V(e,m,n,s)=\begin{cases}
\{x \mid 0 \le x < \omega\} & \text{if } m=0 \,\&\, n<\omega \,\&\, 0=s \\
V(e,m,n,t_0) & \text{if } \exists t\,(t<s \,\&\, V(e,m,n,t)\neq\emptyset) \\
 & \quad \&\, t_0=\mu t\,(t<s \,\&\, V(e,m,n,t)\neq\emptyset) \\
\{x \mid \lambda(e,m,s)\le x<\lambda(e,m,s)+\omega\} & \text{if } 0<\lambda(e,m,s) \\
 & \quad \&\, m=\mu(e,s) \,\&\, n=0 \\
V(e,m,0,s)\cup\{\lambda(e,k,s)+\Pi_k^m(n) \mid k<m<\omega \,\&\, 0<\Pi_k^m(n)\} & \\
 & \text{if } 0<\lambda(e,m,s) \,\&\, m=\mu(e,s)<\omega \,\&\, 0<n \\
\emptyset & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

関数 f をつぎのように定義する.

$f(V,\emptyset,x,s)=y$ if

(f1) $s=0 \,\&\, V=V(e,0,0,0) \,\&\, x=e \,\&\, y=0$ or

(f2) $y(e,r(s))<\mu(e,s) \,\&\, M(e,r(s)) \neq V(e,y(e,r(s)),0,s)$

$\&\, V(e,y(e,r(s)),0,s)\cap N(e,r(s))=\emptyset$

$\&\, a(e)=\mu x\,(x\in V(e,y(e,r(s)),0,s)\cap \overline{M(e,r(s))})$

$\&\, V=V(e,y(e,r(s)),0,s)\cap\overline{\{a(e)\}} \,\&\, x=e \,\&\, y=y(e,r(s))+1$ or

(f3) $y(e,r(s))=\mu(e,s)=\omega \,\&\, 0<\lambda(e,\omega,s) \,\&\, V=V(e,\omega,0,s)$

$\&\, x=e \,\&\, y=\omega$ or

(f4) $f(V,\emptyset,x,t)=y$ for some $t<s$.

$\bar{e}$ をつぎの(最小の)ものとする。 $t(\bar{e},s)=\begin{cases}\langle \bar{e},M,N,x,y\rangle & \text{if } f(M,N,x,s)=y, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

e^*を勝手な intrinsically consistent finite ordinal とする。

Case 1. (f 2) holds for some s.

$$A = (\nabla(e^*, y(e^*, r(s)), 0, s) \cup M(e^*, r(s))) \cap \overline{\{a(e^*)\}}$$ とおくと

$\{\bar{e}\}^A(e^*) = y(e^*, r(s)) + 1$ しかし $\{e^*\}^A(e^*) = y(e^*, r(s))$.

Case 2. $\mu(e^*, s) < \omega$ for all $s < \omega$, and (f 2) holds for no s

$\forall m < \omega\ \exists s'\ (\mu(e^*, s') \geq m)$ と仮定すれば

$$g(m) = \begin{cases} \mu s\ \forall t\ (s \leq t \rightarrow \mu(e^*, t) \geq m) & \text{if } m < \omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる g に対して、$\{g(m) \mid m < \omega\}$ unbounded and $g(m)$ は metarec. f. これは不可能.

従って

$$\exists t_0 < \omega,\ \exists m_0 < \omega\ \forall t > t_0\ (\mu(e^*, t) = m_0 \ \&\ \nabla(e^*, m_0, 0, t) = \emptyset \ \&\ \lambda(e^*, m_0, t) = 0).$$

そこで λ の定義から

$$\forall s\ (m_0 = \mu(e^*, s) \ \&\ t_0 < s \rightarrow n_0 < \omega \ \&\ h(e^*, m_0 - 1, n_0, s) > s))$$

である n_0 がある。このとき、

$$\forall s, t, u\ [t_0 < s \ \&\ ((\nabla(e^*, m_0 - 1, n_0, s) \cup M(e^*, t)) \cap N(e^*, t) = \emptyset$$

$$\&\ x(e^*, t) = e^* \ \&\ y(e^*, t) = m_0 - 1 \ \&\ t = r(u) \ \&\ e^* = g(u) \ \&\ u \leq s$$

$$\rightarrow (\nabla(e^*, m_0 - 1, 0, s) \nsubseteq M(e^*, t) \vee M(e^*, t) \nsubseteq \nabla(e^*, m_0 - 1, n_0, t))).$$

ここで $A = \nabla(e^*, m_0 - 1, n_0, s)$ とおくと

$\{\bar{e}\}^A(e^*) = m_0 - 1$ であるが

$\{e^*\}^A(e^*)$ is defined ならば $\{e^*\}^A(e^*) \neq m_0 - 1$.

Case 3 $\mu(e^*, s_1) \geq \omega$ for some s_1 で $(\dagger 2)$ does not hold for all $s < \omega_1$.

このとき $\forall m, n < \omega\ \exists s_{m,n}\ \exists s_{\omega,0}\ [\, h(e^*, m, n, s_{m,n}) \leq s_{m,n}$

$\quad \& \ \nabla(e^*, m, n, s_{m,n}) \neq \emptyset \ \& \ A(0) = \nabla(e^*, \omega, 0, s_{\omega,0}) \neq \emptyset$.

$\{e^*\}^{A(0)}(e^*) = \{\bar{e}\}^{A(0)}(e^*) = \omega$ のときのみ考えれば十分.

$b(0) = \mu x\ (x \in \nabla(e^*, \eta(0), 0, s_{\eta(0),0}) \cap N(e^*, s_0))$

$A(1) = \{b(0)\} \cup A(0)$

$b(s) = \mu x\ (x \in \nabla(e^*, \eta(s), 0, s_{\eta(s),0}) \cap N(e^*, s'))$

$A(s+1) = \{b(s)\} \cup A(s)$

ここで

$s' = \mu s''\ (M(e^*, s'') \subseteq A(s) \ \& \ A(s) \cap N(e^*, s'') = \emptyset \ \& \ e^* \cdot x(e^*, s'')$

$\quad \& \ y(e^*, s'') = \omega)$

とする.

最后に

$$A = \Big(\bigcup_{s < \omega_1} \{b(s)\}\Big) \cup A(0)$$

とおくと

$\{\bar{e}\}^A(e^*) = \omega$ であるが $\{e^*\}^A(e^*)$ is undefined.

文　　献

[1]. S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, North-Holland, 1952.

[2]. H. Rogers Jr., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[3] G. E. Sacks, Post's problem, admissible ordinals, and regularity Trans. A.M.S (1966) pp. 1-28.