数理解析研究所講究録
第88巻 1970年 21-44

Pseudo-differential Operatars on Sobolev Space $H^{s,p}$, $-\infty<s<\infty$, $1<p<\infty$

阪大.理 熊ノ郷 準

§0. 序

Singular integral operatars, 'SIOp', の理論が常に L^p-空間, $1<p<\infty$, 上で議論されて来たのに対し, Pseudo-differential operatars, 'PsDOp', の理論は主に L^2-空間上で議論され, L^p-空間上での一般論はまだ出来ていないようである. この理由としては, PsDOp の理論は Fourier 変換と Plancherel の公式が土台となっており, L^p-空間上, $p\neq 2$, ではこれが最早通用しないこと, 今一つは PsDOp の algebra を考えると登場する'正則化作用素 (smoothing operatars)' は $H^{s,2}$-空間固有のもので, $H^{s,p}$ 空間, $p\neq 2$, では一般に L^p から それ自身への有界作用素 とさえなり得ない事実 (Hörmander [1], p.106) に基づくと思われる.

筆者は最近の論文[4]に於て，Hörmander [2] の $S^m_{\rho,\delta}$-class，$0<\rho\leqq 1$，$0\leqq\delta<1$，の PsDOp が急減少函数族 $\mathcal{S}$ をそれ自身へ写す作用素として exact な (modulo class の現れない) algebra を作っていることを証明した。一方 Kagan [3] は $\rho=1$ に対する $S^0_{1,\delta}$-class の PsDOp は L^p-空間，$1<p\leqq 2$，からそれ自身への有界作用素になっていることを証明している。

こゝでは筆者[4]と Kagan [3] の結果を基にして，$H^{s,p}$-空間，$1<p<\infty$，上で，$S^m_{1,\delta}$-class の PsDOp の基礎的理論を展開したい。§1 では PsDOp の定義および本稿で必要とされる筆者[4]の結果を，こゝで使いやすい形にして述べ，§2 では Kagan [3] の定理の証明（原論文では完全な形で与えられていない）を Hörmander [1] の方針に沿って行なう。§3 では本稿の主題である $H^{s,p}$-理論を Kumano-go–Nagase [5] をもとに解説する。この節の定理 3.2 の系として Hörmander の問題 ([2], p.163) が典型的な $\rho=1$ の場合には肯定的に解ける。しかし一般の $0<\rho<1$ の場合には表象 (symbol) が x に depend しない場合でさえも未解決のようである。

§1. PsDOp の基本公式. $\mathcal{B}$ を R^n で定義された C^∞-函数でそのすべての微係数が有界となる函数族とし, $\mathcal{S}$ はその部分集合ですべての微係数が急減少するものの全体とする. $\mathcal{S}'$ は $\mathcal{S}$ の共役空間を表わす.

$\mathcal{S}$ の元 $u(x)$ に対し, その Fourier 変換 $\hat{u}(\xi)$ を

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,dx$$

で定義すると, その逆変換 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x)$ は

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \int e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\,đ\xi$$

で定義される, ここで

$$x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n, \quad đ\xi = (2\pi)^{-n}d\xi, \quad i=\sqrt{-1}.$$

以下次のような記号を用いる.

非負整数を元とする多重指標を

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\ \alpha'=(\alpha_1',\cdots,\alpha_n'),\ \beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$$

として,

$$\partial_{x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j},\ \partial_{\xi_j}=\frac{\partial}{\partial\xi_j};\ D_{x_j}=-i\frac{\partial}{\partial x_j},\ D_{\xi_j}=-i\frac{\partial}{\partial\xi_j}, \quad (j=1,\cdots,n)$$

$$\partial_x^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n},\ \partial_\xi^\beta=\partial_{\xi_1}^{\beta_1}\cdots\partial_{\xi_n}^{\beta_n},\ D_x^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n},\ D_\xi^\beta=D_{\xi_1}^{\beta_1}\cdots D_{\xi_n}^{\beta_n},$$

$$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},\ \langle x\rangle=\sqrt{1+|x|^2},\ x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\ \xi^\beta=\xi_1^{\beta_1}\cdots\xi_n^{\beta_n},$$

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\ \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$$

$\alpha\geq\alpha'$ は $\alpha_j\geq\alpha_j'$, $j=1,\cdots,n$, を意味し このとき $\binom{\alpha}{\alpha'}=\binom{\alpha_1}{\alpha_1'}\cdots\binom{\alpha_n}{\alpha_n'}$, $\binom{\alpha_j}{\alpha_j'}=\dfrac{\alpha_j!}{\alpha_j'!(\alpha_j-\alpha_j')!}$, $j=1,\cdots,n.$

さて，$u \in \mathcal{S}$ と実数 s に対し $\langle D_x\rangle^s u$ を

$$\langle D_x\rangle^s u(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\langle\xi\rangle^s \hat{u}(\xi)\,d\!\!\!{}^-\xi$$

で定義し，norm $\|u\|_{s,p}$ を

$$\|u\|_{s,p} = \left\{\int |\langle D_x\rangle^s u(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

で定義する．明らかに $\langle D_x\rangle^s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ は連続，従って

$$\langle\langle D_x\rangle^s u, v\rangle \overset{def.}{=} \langle u, \langle D_x\rangle^s v\rangle \quad , u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S}$$

によって，$\langle D_x\rangle^s : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ に一意的に拡張出来る．特に $s = 2l$, $l = 1, 2, \cdots$ のときは

$$\langle D_x\rangle^{2l} = (1 - \Delta_x)^l, \quad \Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2 .$$

Sobolev 空間 $H^{s,p}$, $1 < p < \infty$, を

$$H^{s,p} = \{u \in \mathcal{S}' ; \langle D_x\rangle^s u \in L^p(R^n)\}$$
$$= \{u \in \mathcal{S}' ; u = \langle D_x\rangle^{-s} u_0 \text{ for some } u_0 \in L^p(R^n)\}$$

で定義する．

$u \in H^{s,p}$, $v \in H^{-s,p'}$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, に対して その内積 (u, v) を

$$(u, v) = \int \langle D_x\rangle^s u(x) \cdot \overline{\langle D_x\rangle^{-s} v(x)}\; dx$$

で定義すると，$H^{s,p}$ と $H^{-s,p'}$ はこの内積によって次の意味で互いに共役な関係にある：

$$|(u,v)| \leqq \|u\|_{s,p}\|v\|_{-s,p'}$$

かつ

$$\|u\|_{s,p} = \sup_{0\neq v\in H^{-s,p'}}\left\{\frac{|(u,v)|}{\|v\|_{-s,p'}}\right\} = \sup_{0\neq v\in \mathcal{S}}\left\{\frac{|(u,v)|}{\|v\|_{-s,p'}}\right\}。$$

$$H^{-\infty,p} = \bigcup_s H^{s,p}, \quad H^{\infty,p} = \bigcap_s H^{s,p}$$

とおく．

<u>定義1.1</u>．$R^n_x \times R^n_\xi$ で定義された C^∞－函数 $g(x,\xi)$ が次の条件をみたすとき，$g(x,\xi)$ を $S^m_{\rho,\delta}$ － class，$0<\rho\leqq 1$，$0\leqq\delta<1$，の表象であるという：任意の α,β に対し定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して．

$$(1.1) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$$

をみたす．

表象 $g(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$ を持つ PsDOp $g(X,D_x):\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{S}$ を

$$(1.2) \quad g(X,D_x)u(x) = \int e^{ix\cdot\xi} g(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,đ\xi$$

で定義し $g(X,D_x)\in \mathbb{S}^m_{\rho,\delta}$ と書く．

$$S^{-\infty} = \bigcap_m S^m_{1,0} \left(= \bigcap_m S^m_{\rho,\delta}\right), \quad S^\infty_{\rho,\delta} = \bigcup_m S^m_{\rho,\delta}$$

とおき，対応する PsDOp の class を，それぞれ $\mathbb{S}^{-\infty}$，$\mathbb{S}^\infty_{\rho,\delta}$ で表わす．

われわれは，$S^0_{\rho,\delta}$ − class の PsDOp が L^p を L^p へ有界に写すことを要求するが，このため Hörmander [2], p.163, の注意から $S^m_{1,\delta}$ − class 即ち $\rho = 1$ の場合のみを対象とする．

<u>補題 1.1.</u> (Hörmander). $\psi_0(\xi) \geqq 0$ を，$\{\xi ; \psi_0(\xi) > 0\}$ の測度が零でない有界可測函数とする．このとき，$1 < p < \infty$, $p \neq 2$ なる任意の p に対して，$|\psi_p(\xi)| \leqq \psi_0(\xi)$ なる可測函数 $\psi_p(\xi)$ が存在して，$\widehat{\Psi_p u}(\xi) = \psi_p(\xi)\hat{u}(\xi)$, $u \in \mathcal{S}$, で定義される作用素 Ψ_p は L^p からそれ自身への有界作用素に拡張出来ない．

今任意に R^n_ξ の点 ξ_0 を固定し，ξ_0 を中心とした半径 $d > 0$ の球の特性函数を $\psi_0(\xi)$ とすると，対応する $\psi_p(\xi)$ の台はこの球に含まれかつ $|\psi_p(\xi)| \leqq 1$．従って Plancherel の定理を用いれば Ψ_p は $H^{-\infty,2}$ を $H^{\infty,2}$ へ写すことがわかり Ψ_p は $H^{s,2}$ に於ける正則化作用素となる．このことは通常 PsDOp の algebra で現れる正則化作用素は $H^{s,2}$ − 空間固有のもので一般の $H^{s,p}$ では L^p を L^p へ有界に写さないことも起こり得ることを示す．

補題 1.2 (Hörmander[1]). $\psi(\xi) \in L^\infty(R^n)$ が定数 B に対して

$$(1.3)\quad \int_{\frac{t}{2}\le|\xi|\le 2t} |t^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha \psi(\xi)|^2 d\xi \Big/ t^n \le B^2,\ 0<t<\infty,\ |\alpha|\le\kappa$$

$(\kappa > n/2,\ 整数)$

をみたすとすると、$\widehat{\Psi u}(\xi) = \psi(\xi)\hat{u}(\xi)$ で定義される Ψ は、有界作用素 $\Psi: L^p \longrightarrow L^p$, $1<p<\infty$, に拡張される。

系 1°. $S^0_{1,0} \ni g(\xi)$ なら $g(\xi)$ は条件 (1.3) をみたす。従って $g(D_x): L^p \longrightarrow L^p$, $1<p<\infty$, は有界。

系 2°. $s \le s'$ なら $H^{s,p} \supset H^{s',p}$ かつある定数 $C_{s,s'}$ に対し

$$(1.4)\quad \|u\|_{s,p} \le C_{s,s'}\|u\|_{s',p},\quad u \in H^{s',p}.$$

注. $p=2$ の場合は Plancherel の定理より $C_{s,s'}=1$.

(証明) $u \in H^{s',p}$ のとき、$\langle D_x\rangle^s u = \langle D_x\rangle^{-(s'-s)}(\langle D_x\rangle^{s'}u)$ と書けば、$\langle\xi\rangle^{-(s'-s)} \in S^{-(s'-s)}_{1,0} \subset S^0_{1,0}$. 従って系 1° より $\|\langle D_x\rangle^s u\|_{L^p} \le C_{s,s'}\|\langle D_x\rangle^{s'}u\|_{L^p} < \infty$。

補題 1.3 (Kumano-go[4]). i) $g_j(x,\xi) \in S^{m_j}_{1,\delta}$, $j=1,2$, に対し

$$g(x,\xi) = \int \langle D_\zeta\rangle^{n_0} g_1(x,\xi+\zeta)\left(\int e^{-iz\cdot\zeta}\langle z\rangle^{-n_0} g_2(x+z,\xi)\,dz\right) đ\zeta$$

$(n_0 \ge n+1,\ 偶数)$

とおくと、

$$g(x,\xi)\in S^{m_1+m_2}_{1,\delta} \quad \text{かつ} \quad g(X,D_x)=g_1(X,D_x)\,g_2(X,D_x).$$

また 任意 の N に 対して, $R_N(x,\xi)\in S^{m_1+m_2-(1-\delta)N}_{1,\delta}$ が 存在して,

$$g(x,\xi)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha g_1(x,\xi)(-i\partial_x)^\alpha g_2(x,\xi)+R_N(x,\xi)$$

と書ける.

ii) $g(x,\xi)\in S^m_{1,\delta}$ に対して,

$$g^*(x,\xi)=\int\left(\int e^{-iz\cdot\zeta}\langle z\rangle^{-n_0}\langle D_\zeta\rangle^{n_0}\overline{g(x+z,\xi+\zeta)}\,dz\right)đ\zeta$$

とおくと, $g^*(x,\xi)\in S^m_{1,\delta}$ かつ

$$(g(X,D_x)u,\ v)=(u,\ g^*(X,D_x)v),\quad u,v\in\mathcal{S}.$$

また 任意 の N に 対して, $R^*_N(x,\xi)\in S^{m-(1-\delta)N}_{1,\delta}$ が 存在して

$$g^*(x,\xi)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}(-i\partial_x)^\alpha\partial_\xi^\alpha\overline{g(x,\xi)}+R^*_N(x,\xi)$$

と書ける.

<u>補題1.4</u> (Kumano-go [4]). $g(x,\xi)\in S^m_{1,\delta}$ に対して, 定数 C, C' が 存在して,

(1.5) $\|g(X,D_x)u\|_{s,2}\leqq C\|u\|_{s+m,2},\quad u\in H^{s+m,2},$

より詳しく

(1.6) $$\|g(X,D_x)u\|_{s,2}\leqq\sup_{x,\xi}\{|g(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{-m}\}\|u\|_{s+m,2}+C'\|u\|_{s+m-(1-\delta)/2,2},\quad u\in H^{s+m,2},$$

ここで 定数 C, C' は 十分大きな l を固定して

$$|g|_{l,m} = \operatorname*{Max}_{|\alpha+\beta|\leqq l} \sup_{x,\xi}\{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{-(m+\delta|\alpha|-|\beta|)}\} < \infty$$

にのみ関係する.

次に C^∞ 変換 $x(y): R_y^n \longrightarrow R_x^n$ を考える.
$x(y)$ の Jacobian matrix を $\partial_y x(y) = (\partial_{y_j} x_k(y))$, その行列式を $\det(\partial_y x(y))$ で表わす.

今変換 $x(y)$ がある定数 $C > 0$ に対して条件:

(1.7) $\partial_{y_j} x_k(y) \in \mathcal{B}$, $j, k = 1, \cdots, n$, $C^{-1} \leqq |\det(\partial_y x(y))| \leqq C$

をみたすとすると, 次の補題が成り立つ.

補題 1.5 (Kumano-go [4]). $g(x,\xi) \in S^m_{1,\delta}$ に対して, $h(y,\eta) \in S^m_{1,\delta}$ が存在して,

(1.8) $h(Y, D_y)\, w(y) = (g(X, D_x)u)(x(y))$,

$$w(y) = u(x(y)) \in \mathcal{S}.$$

§2. Kagan の定理.

<u>補題 2.1</u>. $g(x,\xi) \in S^{-\infty}$ に対し

$$K(x,z) = \int e^{iz\cdot\xi} g(x,\xi)\, đ\xi$$

とおくと,

i) 任意の l, α, β に対して

$$(2.1) \qquad \sup_{x,z}\{\langle z\rangle^{2l} |\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x,z)|\} < \infty$$

となり

$$(2.2) \qquad g(X,D_x)u(x) = \int K(x, x-x')u(x')dx', \quad u \in \mathcal{S}$$

と書ける. 逆に $R_x^n \times R_z^n$ での C^∞-函数 $K(x,z)$ が任意の l, α, β に対し (2.1) をみたすとすると

$$g(x,\xi) = \int e^{-iz\cdot\xi} K(x,z)\, dz$$

とおけば, $g(x,\xi) \in S^{-\infty}$ となり (2.2) が成り立つ.

ii) 任意の $1<p<\infty$, 実数 s_1, s_2 に対し, 定数 C_{p,s_1,s_2} が存在して,

$$(2.3) \qquad \|g(X,D_x)u\|_{s_1,p} \leq C_{p,s_1,s_2}\|u\|_{s_2,p}, \quad u \in H^{s_2,p},$$

が成り立ち, $g(X,D_x)$ は $H^{s,p}$, $1<p<\infty$, 上の正則化作用素 '$g(X,D_x): H^{-\infty,p} \longrightarrow H^{\infty,p}$' となる.

(証明). i) (2.1) は $\langle z\rangle^{2l} e^{iz\cdot\xi} = \langle D_\xi\rangle^{2l} e^{iz\cdot\xi}$ と書いて ξ について部分積分すれば,

$$\langle z\rangle^{2l}\left(\partial_x^\alpha\partial_z^\beta K(x,z)\right)$$
$$=\int e^{iz\cdot\xi}\langle D_\xi\rangle^{2l}\{(i\xi)^\beta\partial_x^\alpha g(x,\xi)\}\,d\xi$$

となることよりわかる．(2.2) は $\hat{u}(\xi)$ を $u(x')$ で直接書いて積分順序を交換すればよい．逆は

$$\langle\xi\rangle^{2l}\{\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta g(x,\xi)\}$$
$$=\int e^{-iz\cdot\xi}\langle D_z\rangle^{2l}\{(-iz)^\beta\partial_x^\alpha K(x,z)\}\,dz$$

なることに注意すればよい．

ii) $2l\geqq \mathrm{Max}\{s_1,-s_2\}$ なる正整数 l を固定し，$u\in\mathcal{S}$ に対して (2.2) を用いて

$$\langle D_x\rangle^{2l}g(x,D_x)u(x)=\int\langle D_x\rangle^{2l}\langle D_{x'}\rangle^{2l}K(x,x-x')\cdot\langle D_{x'}\rangle^{-2l}u(x')\,dx'$$

と書けば，(2.1) より

$$|\langle D_x\rangle^{2l}g(x,D_x)u(x)|\leqq C_l\int\langle x-x'\rangle^{-(n+1)}|\langle D_{x'}\rangle^{-2l}u(x')|\,dx'$$

を得る．ここで Hausdorff−Young の不等式より

$$\|g(x,D_x)u\|_{2l,p}\leqq C'_l\|u\|_{-2l,p},\quad u\in\mathcal{S},$$

が出る．$\mathcal{S}$ が $H_{-2l,p}$ で dense なることに注意すれば，これと補題 1.2 の系 2° より (2.3) を得る．

<u>定理 2.1</u> (Kagan [3]). $g(x,\xi)\in S^0_{1,\delta}$ に対して，定数 C_p, $1<p\leqq 2$, が存在して

(2.4) $\|g(x, D_x)u\|_{0,p} \leqq C_p \|u\|_{0,p}$, $u \in \mathcal{S}$

が成り立つ.

(証明). 方針は weak-type の L^1-評価を出し, (L^1, L^2) で Marcinkiewicz の補間定理[8]を用いる. 今 C_0^∞-函数 $\psi(\xi)$ を $\psi(\xi) = 1$ for $|\xi| \leqq 1$, $\psi(\xi) = 0$ for $|\xi| \geqq 2$ となるように取ると, $g(x, \xi)\psi(\xi) \in S^{-\infty}$. 従って補題 2.1 より $g(x, D_x)\psi(D_x)$ に対しては, 勿論 (2.4) が成立する. $g(x, \xi)(1-\psi(\xi)) \in S^0_{1,\delta}$ かつ $= 0$ for $|\xi| \leqq 1$ なることと $g(x, \xi) = g(x, \xi)\psi(\xi) + g(x, \xi)(1-\psi(\xi))$ と書けることから, 一般性を失うことなく

(2.5) $g(x, \xi) = 0$ for $|\xi| \leqq 1$

なる $g(x, \xi) \in S^0_{1,\delta}$ について, (2.4) をいえばよい.

I) Hörmander [1], p.121, で構成された C_0^∞-函数 $\varphi(\xi)$:

(2.6) $\operatorname{supp} \varphi \subset \{\xi ; 2^{-1} < |\xi| < 2\}$, $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$ $(\xi \neq 0)$

を取ると, (2.5) より

$$g(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} (g(x, \xi)\varphi(2^{-j}\xi)) .$$

(2.7) $f_j(x, z) = \displaystyle\int e^{iz\cdot\xi} g(x, \xi)\varphi(2^{-j}\xi)\, d\xi$, $(j = 0, 1, 2, \cdots)$

とおくと，$x^\alpha e^{ix\cdot\xi} = (-i\partial_\xi)^\alpha e^{ix\cdot\xi}$ と書いて部分積分すると，

$$(2^j x)^\alpha f_j(x+x^0, x)$$
$$= 2^{j|\alpha|}\sum_{\alpha'\leqq\alpha}\binom{\alpha}{\alpha'}\int e^{ix\cdot\xi}\left((i\partial_\xi)^{\alpha'} g(x+x^0,\xi)\cdot|\xi|^{|\alpha'|}\right)$$
$$\cdot\left((i\partial_\xi)^{\alpha-\alpha'}\varphi(2^{-j}\xi)\cdot|\xi|^{-|\alpha'|}\right)d\xi .$$

こゝで (2.5) に注意すると

$$g_{\alpha'}(x,\xi) = (i\partial_\xi)^{\alpha'} g(x,\xi)\cdot|\xi|^{|\alpha'|}\in S^0_{1,\delta} .$$

従って $s=m=0$ に対する (1.5) と Plancherel の定理より

$$\|(2^j x)^\alpha f_j(x+x^0,x)\|^2_{L^2} \leqq C_\alpha\, 2^{2j|\alpha|}\sum_{\alpha'\leqq\alpha}\|(i\partial_\xi)^{\alpha-\alpha'}\varphi(2^{-j}\xi)\cdot|\xi|^{-|\alpha'|}\|^2_{L^2}$$
$$\leqq C'_\alpha 2^{nj},$$

こゝで定数 C_α, C'_α は x^0 に depend しない．

κ を $>n/2$ なる整数とすると，

$$\int|f_j(x+x^0,x)|\,dx$$
$$(2.8)\qquad \leqq\left(\int(1+2^{2j}|x|^2)^{-\kappa}dx\right)^{1/2}\left(\int(1+2^{2j}|x|^2)^{\kappa}|f_j(x+x^0,x)|^2dx\right)^{1/2}$$
$$\leqq C_1,$$

特に $t>0$ に対しては

$$\int_{|x|\geqq t}(1+2^{2j}|x|^2)^{-\kappa}dx \geqq 2^{-2j\kappa}\int_{|x|\geqq t}|x|^{-2\kappa}dx = C'_1 2^{-2j\kappa}t^{-2\kappa+n},$$

従って

$$(2.9)\quad \int_{|x|\geq t} |f_j(x+x^0, x)|\,dx \leq C_2 (2^j t)^{(\frac{n}{2}-\kappa)}$$

を得る．これより

$$(2.10)\quad \int_{|x|\geq 2t} |f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x)|\,dx \leq 2C_2 (2^j t)^{(\frac{n}{2}-\kappa)}$$

$$(|x'|\leq t).$$

次に $|x'|\leq t$, $2^j t \leq 1$ とすると，

$$|e^{-ix'\cdot\xi} - 1| \leq |x'||\xi| \leq 2t2^j \quad \text{on } \operatorname{supp} \varphi(2^{-j}\xi),$$

$$|\partial_\xi^{\alpha'}(e^{-ix'\cdot\xi} - 1)| = |\partial_\xi^{\alpha'} e^{-ix'\cdot\xi}| \leq |x'|^{|\alpha'|} \leq t^{|\alpha'|}$$

$$= t\cdot t^{|\alpha'|-1} \leq t2^j 2^{-j|\alpha'|} \quad \text{for } \alpha' \neq 0,$$

従って (2.8) に於て，$f_j(x+x^0, x)$ の代りに $(f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x))$ を入れて

$$(2.11)\quad \int |f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x)|\,dx \leq C_3 2^j t$$

$$(|x'|\leq t,\ 2^j t \leq 1)$$

を得る．

$F_N(x, z) = \sum_{j=0}^{N} f_j(x, z)$ とおくと，(2.10) と (2.11) より

$$(2.12)\quad \begin{aligned} &\int_{|x|\geq 2t} |F_N(x+x^0, x-x') - F_N(x+x^0, x)|\,dx \\ &\leq C_4 \sum_{j=0}^{\infty} \min\{(2^j t)^{(\frac{n}{2}-\kappa)}, 2^j t\} \leq C_4' \end{aligned}$$

$$(|x'|\leq t)$$

を得る．

II) $u \in L^1$ でその台がコンパクトとする．

$$g_N(x,\xi) = \sum_{j=0}^{N} \left(g(x,\xi)\,\varphi(2^{-j}\xi) \right) \quad (\in S^{-\infty} \subset S^{0}_{1,\delta})$$

とおけば，$F_N(x,z)$ の定義より

(2.13) $\quad g_N(x, D_x)u(x) = \int F_N(x, x-x')\,u(x')\,dx'$

と書ける．

今任意の $s>0$ に対し，Calderón－Zygmund の分解（[1], p.115）：

$$(2.14)\quad \begin{cases} u = v + \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \quad \mathrm{supp}\, v,\ \mathrm{supp}\, w_k \subset K \\ \|v\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\|_{L^1} \leqq 3\|u\|_{L^1}, \\ |v(x)| \leqq 2^n s, \quad \text{a.e.}, \\ \text{ある disjoint な cubes } I_k \text{ に対して} \\ \int_{I_k} w_k\,dx = 0, \quad w_k(x) = 0 \ \text{ if } x \notin I_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leqq s^{-1}\|u\|_{L^1} \end{cases}$$

を行なう，ここで K は R^n のコンパクト集合，$m(I_k)$ は I_k の（Lebesgue）測度を表わす．

このとき

$$\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_k(\xi), \quad |\hat{v}(\xi)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{w}_k(\xi)| \leqq 3\|u\|_{L^1}$$

となり，従って

(2.15) $\quad g_N(x, D_x)u(x) = g_N(x, D_x)v(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_N(x, D_x)w_k(x)$

と書ける．$x^{(k)}$ を各 I_k の中点として，I_k^* を

$$I_k^* = \{ x;\ x - x^{(k)} = 2\sqrt{n}\,(x' - x^{(k)}),\ x' \in I_k \}$$

とおくと，ある $t_k > 0$ に対し，

$$(2.16)\begin{cases} I_k \subset \{x;\ |x-x^{(k)}| \leqq t_k\}, \\ I_k^{*c} \subset \{x;\ |x-x^{(k)}| \geqq 2t_k\} \end{cases}$$

となり

$$(2.17)\quad m(I_k^*)/m(I_k) = \gamma\ (=(2\sqrt{n})^n).$$

さて，$\displaystyle\int_{I_k} w_k\, dx = 0$ に注意すると，(2.13) より

$$g_N(x, D_x)w_k(x) = \int_{I_k}(F_N(x, x-x') - F_N(x, x-x^{(k)}))w_k(x')dx'$$

と書ける．ここで $x - x^{(k)} = y$，$x' - x^{(k)} = y'$ と

おくと，(2.12) と (2.16) より

$$\int_{I_k^{*c}} |g_N(x, D_x)w_k(x)|dx \leqq \int_{|y|\geqq 2t_k} |g_N(x, D_x)w_k(y+x^{(k)})|dy$$

$$(2.18)\leqq \int_{|y|\geqq 2t_k}\int_{|y'|\leqq t_k} |F_N(y+x^{(k)}, y-y') - F_N(y+x^{(k)}, y)|$$

$$\cdot|w_k(y'+x^{(k)})|dy'dy \leqq C_4'\|w_k\|_{L^1}.$$

今 $O^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^*$ とおくと，(2.14) と (2.17) より

$$(2.19)\quad m(O^*) \leqq \gamma s^{-1}\|u\|_{L^1}.$$

また，$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$ とおくと (2.18) より

$$(2.20)\quad \int_{O^{*c}} |g_N(x, D_x)w(x)|dx \leqq 3C_4'\|u\|_{L^1}.$$

一方 v は台がコンパクトかつ有界函数で

あることより $v \in L^2$. このとき (1.5) と (2.14) より

$$\|g_N(x, D_x)v\|_{L^2}^2 \leqq C_5 \|(\sum_{j=0}^{N} \varphi(2^{-j}\xi))\hat{v}(\xi)\|_{L^2}^2$$

(2.21)

$$\leqq C_5 2^n s \int |v| dx \leqq 3 \cdot 2^n C_5 s \|u\|_{L^1},$$

ここで C_5 は N に depend しない定数.

III) $m\{x; |g_N(x, D_x)u(x)| > s\}$ を考える.

(2.20) より

(2.22) $\frac{s}{2} m\{x \in O^{*c}; |g_N(x, D_x)w(x)| > \frac{s}{2}\} \leqq 3 C_4' \|u\|_{L^1}$,

また (2.21) より

(2.23) $(\frac{s}{2})^2 m\{x; |g_N(x, D_x)v(x)| > \frac{s}{2}\} \leqq 3 \cdot 2^n C_5 s \|u\|_{L^1}$.

もし, $|g_N(x, D_x)u(x)| > s$ なら $|g_N(x, D_x)w(x)| > s/2$ か $|g_N(x, D_x)v(x)| > s/2$ となることに注意すれば, (2.19), (2.22), (2.23) より

(2.24) $m\{x; |g_N(x, D_x)u(x)| > s\} \leqq C_6 s^{-1} \|u\|_{L^1}$,

ここで, C_6 は N に depend しない定数.

一方 (1.5) より

(2.25) $\|g_N(x, D_x)u\|_{L^2} \leqq C_7 \|(\sum_{j=0}^{N} \varphi(2^{-j}\xi))\hat{u}(\xi)\|_{L^2} \leqq C_7 \|u\|_{L^2}$.

従って Marcinkiewicz の補間定理より, N に depend しない定数 C_p, $1<p<2$, が存在して

$$\|g_N(x, D_x)u\|_{L^p} \leqq C_p \|u\|_{L^p}, \quad u \in L^p.$$

$u \in \mathcal{S}$ とすると, $\lim_{N\to\infty} g_N(x, D_x)u(x) = g(x, D_x)u(x)$ より (2.4)を得る.

§3. $H^{s,p}$－理論．先ず一般化されたPoincaréの不等式を証明する．

定理3.1．実数 $s>0$ と $1<p<\infty$ に対して，定数 $C_{s,p}$ が存在して

(3.1) $\|u\|_{0,p} \leqq C_{s,p}\, d^s \|u\|_{s,p}, \quad u \in C_0^\infty(|x|<d),\ d>0.$

(証明)．$d \geqq 1$ のときは補題1.2の系2°より明らか．故に $0<d<1$ とする．

C_0^∞－函数 $\psi(\xi)$：

(3.2) $\psi(\xi)=1$ for $|\xi| \leqq 1$, $=0$ for $|\xi| \geqq 2$

を取り，$\psi_{\varepsilon,d}(\xi)=\psi(\varepsilon^{-1}d\xi)$, $\varepsilon>0$；とおく．明らかに $\psi_{\varepsilon,d}(\xi) \in S^{-\infty}$, $(1-\psi_{\varepsilon,d}(\xi)) \in S^0_{1,0}$，かつ

(3.3) $u(x)=\psi_{\varepsilon,d}(D_x)u(x)+(1-\psi_{\varepsilon,d}(D_x))u(x).$

このとき

$$|\psi_{\varepsilon,d}(D_x)u(x)|^p = \left|\int_{|x'|<d} \hat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x)\,u(x')\,dx'\right|^p$$

$$\leqq \left(\int_{|x'|<d} |\hat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x)|\,dx'\right)^{p/p'} \left(\int_{|x'|<d} |\hat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x)|\,|u(x')|^p\,dx'\right)$$

$(p^{-1}+p'^{-1}=1)$.

ここで；$|\hat{\psi}_{\varepsilon,d}(x)|=(\varepsilon d^{-1})^n|\hat{\psi}(\varepsilon d^{-1}x)| \leqq (\varepsilon d^{-1})^n C$,

$$\|\hat{\psi}_{\varepsilon,d}\|_{L^1} = \|\hat{\psi}\|_{L^1} < \infty$$

なることに注意すれば

$$\|\psi_{\varepsilon,d}(D_x)u\|_{0,p} \leqq C'_p\, \varepsilon^{n/p'} \|u\|_{0,p}.$$

従って $C' \varepsilon_0^{n/p'} \leqq 2^{-1}$ なる $\varepsilon_0 > 0$ を固定して

$$(3.4) \quad \| \psi_{\varepsilon_0, d}(D_x) u \|_{0,p} \leqq \frac{1}{2} \| u \|_{0,p}$$

を得る。次に この ε_0 に対し

$$g_d(\xi) = d^{-s} \langle \xi \rangle^{-s} (1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))$$

を考える.

$$\partial_\xi^\alpha g_d(\xi) = d^{-s} \partial_\xi^\alpha \langle \xi \rangle^{-s} \cdot (1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)) + d^{-s} \sum_{0 \neq \alpha' \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \partial_\xi^{\alpha - \alpha'} \langle \xi \rangle^{-s} \cdot \partial_\xi^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))$$

であるから,

$$\begin{cases} \varepsilon_0^{-1} d |\xi| \geqq 1 & \text{on} \quad \operatorname{supp}(1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)), \\ 2 \geqq \varepsilon_0^{-1} d |\xi| \geqq 1 & \text{on} \quad \operatorname{supp}(\partial_\xi^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))) \quad (\alpha' \neq 0), \\ | \partial_\xi^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)) | \leqq C_{\alpha'} (\varepsilon_0^{-1} d)^{|\alpha'|} \end{cases}$$

に注意すると, $g_d(\xi)$ を $S_{1,0}^0$ の元と考えて

$|\partial_\xi^\alpha g_d(\xi)| \leqq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha|}$ を得る, ここで C_α は $0 < d < 1$ に depend しない定数. 従って補題 1.2 の系 1° より

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \| (1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(D_x)) u \|_{0,p} &= d^s \| g_d(D_x) (\langle D_x \rangle^s u) \|_{0,p} \\ &\leqq C_{p, \varepsilon_0} \| u \|_{s,p} \end{aligned}$$

を得る. (3.3) — (3.5) より (3.1) を得る.

<u>定理 3.2.</u> $g(x, \xi) \in S_{1,\delta}^m$ とすると, 任意の実数 s と $1 < p < \infty$ に対して, 定数

$C_{s,p}$ が存在して

(3.6) $\|g(x, D_x)u\|_{s,p} \leq C_{s,p}\|u\|_{s+m,p}, \quad u \in H^{s+m,p},$

が成り立つ.

系. $g_0(x,\xi) \in S^0_{1,\delta}$ とすると, 任意の $1<p \leqq q < \infty$ に対し, $s_0 = n(1/p - 1/q)$ とおくと, 定数 $C_{p,q}$ に対して

(3.7) $\|g_0(x, D_x)u\|_{-s_0,q} \leq C_{p,q}\|u\|_{0,p}, \quad u \in H^{0,p},$

が成り立つ.

注. これは Hörmander の問題 ([2], p.163) が $\rho = 1$ の場合には肯定的であることを示す.

(系の証明). $\psi(\xi)$ を条件 (3.2) をみたす C_0^∞-函数として,

$$
\begin{aligned}
\|g_0(x, D_x)u\|_{-s_0,q} &= \|\langle D_x\rangle^{-s_0} g_0(x, D_x)u\|_{0,q} \\
&\leqq \|\psi(D_x)\langle D_x\rangle^{-s_0} g_0(x, D_x)u\|_{0,q} + \||D_x|^{-s_0}(|D_x|^{s_0}(1-\psi(D_x))\langle D_x\rangle^{-s_0}) \\
&\quad \cdot g_0(x, D_x)u\|_{0,q} \equiv I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

を得る, こゝで $|D_x|$ は $\widehat{|D_x|u}(\xi) = |\xi|\hat{u}(\xi)$ で定義される.

$\psi(\xi)\langle\xi\rangle^{-s_0} \in S^{-\infty}$ であるから 補題1.3 の i) より $g_\infty(x,\xi) \in S^{-\infty}$ が存在して,

$$g_\infty(x, D_x) = \psi(D_x)\langle D_x\rangle^{-s_0} g_0(x, D_x).$$

補題 2.1 に於て, $g_\infty(x,\xi)$ に対応する核を $K_\infty(x,z)$ とおけば,

(3.8) $I_1 = \| g_\infty(x, D_x) u \|_{0,q} \leqq C_r \| u \|_{0,p}$,
こゝで, C_r は $r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1}$ なる r に対し

$$\mathrm{Max}\{ \sup_x \{\int |K_\infty(x, z)|^r dz\}, \sup_y \int |K_\infty(x, x-y)|^r dx\} \leqq C_r^r$$

をみたす定数. 一方 $|\xi|^{s_0}(1-\psi(\xi))\langle\xi\rangle^{-s_0} \in S^0_{1,0} \subset S^0_{1,\delta}$ であるから再び補題1.3 の i) より $g_1(x, \xi) \in S^0_{1,\delta}$ が存在して

$$g_1(x, D_x) = |D_x|^{s_0}(1-\psi(D_x))\langle D_x\rangle^{-s_0} g_0(x, D_x).$$

こゝで Hardy-Littlewood-Sobolev の Potential 評価式 ([7], p.99 & 348 参照) と定理3.2 を用いて

$$(3.9)\quad I_2 = \| |D_x|^{-s_0} g_1(x, D_x) u \|_{0,q}$$
$$\leqq C'_{p,q} \| g_1(x, D_x) u \|_{0,p} \leqq C''_{p,q} \| u \|_{0,p}$$

を得, (3.8), (3.9) より (3.7) を得る.

(定理3.2 の証明). I) $1 < p < 2$ のとき.

$$\| g(x, D_x) u \|_{s,p} = \| \langle D_x\rangle^s g(x, D_x) \langle D_x\rangle^{-(s+m)} (\langle D_x\rangle^{s+m} u) \|_{0,p}.$$

$\langle\xi\rangle^s \in S^s_{1,0} \subset S^s_{1,\delta}$, $p(x, \xi)\langle\xi\rangle^{-(s+m)} \in S^{-s}_{1,\delta}$ より, 補題1.3 の i) が適用出来て, ある $g_0(x, \xi) \in S^0_{1,\delta}$ に対し

$$g_0(x, D_x) = \langle D_x\rangle^s g(x, D_x) \langle D_x\rangle^{-(s+m)}.$$

従って定理2.1 より (3.6) を得る.

II) $2 < p < \infty$ のとき. $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ なる p' をとると, $1 < p' < 2$. 補題3.1 の ii) より $g^*(x, \xi) \in S^m_{1,\delta}$ が存在して,

$$(g(x, D_x)u, v) = (u, g^*(x, D_x)v), \quad u, v \in \mathcal{S}.$$

$p^*(x, D_x)$ に $1 < p' < 2$ に対する (3.6) を用いて

$$|(g(x, D_x)u, v)| \leqq \|u\|_{s+m,p} \|g^*(x, D_x)v\|_{-(s+m),p'}$$
$$\leqq \|u\|_{s+m,p} C_{s,p'} \|v\|_{-s,p'}.$$

このことは, $\|g(x, D_x)u\|_{s,p} \leqq C_{s,p'} \|u\|_{s+m,p}$ を意味する. $\mathcal{S}$ は $H^{s+m,p}$ で dense であるから $2 < p < \infty$ についても (3.6) を得る.

<u>定理 3.3</u>. $g(x, \xi) \in S^m_{1,\delta}$ に対し, 正の定数 C_0 でもって, $\langle\xi\rangle^m \leqq C_0 |g(x, \xi)|$ が成り立つとすると, 定数 $C_{s,p}$, $C'_{s,p}$ が存在して

$$(3.10) \quad \|u\|_{s+m,p} \leqq C_{s,p} \|g(X, D_x)u\|_{s,p} + C'_{s,p} \|u\|_{s+m-(1-\delta),p}$$

がいえる.

注. (1.6) を用いて, $\lim_{p \to 2} C_{s,p} = C_0$ となるよう定数 $C_{s,p}$ を取ることも出来る ([5] 参照).

(証明). $g_{-1}(x, \xi) = g(x, \xi)^{-1} (\in S^{-m}_{1,\delta})$ とおいて,

$$\|u\|_{s+m,p} \leqq \|(g_{-1}(X,D_x)\langle D_x\rangle^{s+m})g(X,D_x)u\|_{0,p}$$
$$+\|g_{-1}(X,D_x)\{g(X,D_x)\langle D_x\rangle^{s+m}-\langle D_x\rangle^{s+m}g(X,D_x)\}u\|_{0,p}$$
$$+\|\{(1-g_{-1}(X,D_x)g(X,D_x))\langle D_x\rangle^{s+m}\}u\|_{0,p}.$$

こゝで第1項には定理3.2を適用し，第2，第3項には補題1.3のi)の展開定理を$N=1$で用いて次数を$(1-\delta)$下げ，その後で定理3.2を適用して(3.10)を得る．

<u>定理3.4</u>．$x(y): R^n_y \longrightarrow R^n_x$ を条件(1.7)をみたす変換とする．このとき $g(x,\xi)\in S^{-s}_{1,0}$，$h(y,\eta)\in S^{-s}_{1,0}$ が存在して，

$$(3.11)\begin{cases} \text{i)}\ u=\langle D_x\rangle^{-s}u_0 \quad \text{for} \quad u_0\in L^p_x \\ \qquad \Longrightarrow w=h(Y,D_y)w_0 \quad \text{for} \quad w_0(y)=u_0(x(y)), \\ \text{ii)}\ w=\langle D_y\rangle^{-s}w_0 \quad \text{for} \quad w_0\in L^p_y \\ \qquad \Longrightarrow u=g(X,D_x)u_0 \quad \text{for} \quad u_0(x)=w_0(y(x)), \end{cases}$$

こゝで，$w(y)=u(x(y))$．従って空間$H^{s,p}$は $u\in H^{s,p} \Longleftrightarrow w\in H^{s,p}$ の意味で座標変換に関して不変である．

証明は補題1.5より明らか．Lions-Magenes [6] ではより一般な形で述べられているが，こゝではPsDO$_p$で対応関係を具体的に示している．

References

[1] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math., 104 (1960), 93-140.

[2] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc., 10 (1968), 138-183.

[3] V. M. Kagan, Boundedness of pseudodifferential operators in L_p , Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika, no.6 (73)(1968), 35-44 (in Russian).

[4] H. Kumano-go, Algebras of pseudo-differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), to appear.

[5] H. Kumano-go and M. Nagase, L^p-theory of pseudo-differential operators, Proc. Japan Acad., 46 (1970), to appear.

[6] J. L. Lions and E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei (III), Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Ser. 3, 15 (1961), 41-103.

[7] S. Mizohata, Theory of partial differential equations, Iwanami, Tokyo (1965) (in Japanese).

[8] A. Zygmund, Trigonometrical series II, Cambridge (1959).