数理解析研究所講究録
第 88 巻 1970 年 86-93

一階双曲型方程式の混合問題に対する解の局所減衰

京大 数研　　岩崎 敦久

Ωを$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$における外部領域(すなわち, $\Omega \supset \{|x| \geq \rho\}$なる$\rho$が存在する)、境界は適当になめらかとする。このΩの上で 次の様な混合問題を考える。

$$
(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) = A u(x,t) \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x,t) + C(x) u(x,t) \\ u(x,t)\Big|_{x \in \partial\Omega} \in B(x) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}
$$

Condition I.　A : formally dissipative な微分作用素.

(i.e)　A_i : Hermitian symmetric

$$C + C^* - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x) \leq 0 \qquad , x \in \Omega.$$

Condition II.　A : uniformly elliptic

(i.e)　$$\left| \sum_{j=1}^{n} A_j \xi_j \right| \geq \delta |\xi| \quad , \delta > 0 \quad {}^{\forall}\xi \in \mathbb{R}^n .$$

Condition III　$B(x)$: maximal non-positive

(i.e.) $A_n = \sum_{j=1}^{n} A_j(x) n_j(x)$ が $B(x)$ 上で non-positive となる $\mathbb{C}^m$ の subspace で極大なもの。($(n_j(x))$: $\partial\Omega$ の外法線)

Condition IV　$(A(x), B(x))$: coercive.

(i.e.) $B \cap \mathcal{E}(\xi) = \{0\}$　$\forall \xi$; $\sum_{j=1}^{n} \xi_j n_j = 0$

, $\mathcal{E}(\xi)$: $M(\xi) = A_n^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_j \xi_j$ の root vectors で張られる subspace.

Condition V　ある ρ があって

$$A = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{at } |x| \geq \rho$$

; A_j : constant matrices

$D(\mathcal{A}) \equiv \{ u \,;\, u \in H^1(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} \in B \}$ とおく.
I, II, III, IV, V の条件から coercive estimate

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\| \leq \text{Const} \{ \| Au \| + \| u \| \}$$

が $u \in D(\mathcal{A})$ に対して成り立つ。又 $(\lambda - A)$ は $D(\mathcal{A})$ から $L^2(\Omega)$ への 1対1 onto な作用素で

$$\| u \| \leq \frac{1}{\lambda} \| (\lambda - A) u \| \quad (\forall \lambda > 0)$$

を満す。従って $\mathcal{A}$ を その定義域を $D(\mathcal{A})$ とし
$\mathcal{A}u = Au$ ($u \in D(\mathcal{A})$) なる $L^2(\Omega)$ 上の閉作用素とすれ

ば、 $\mathcal{A}$ は Contraction semi-group の成生作用素である。 この Contraction semi-group を $U(t)$ で表わすと、任意の $f \in D(\mathcal{A})$ に対して．

$$\frac{d}{dt}U(t)f = \mathcal{A}U(t)f, \quad U(t)f \in D(\mathcal{A})$$

が成り立ち（Hille-Yosida の定理）、そして この方程式は (*) の混合問題をあらわしている。 又 $\|U(t)\| = 1$ である。

このことより $\forall f \in L^2(\Omega)$ に対して

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda t}U(t)f\,dt = a_\lambda$$

は存在するが，

Λ を $\lambda \in \Lambda \Leftrightarrow {}^\exists f\ ;\ a_\lambda \neq 0$

P : Projection on $L^2(\Omega)$ を ; $Pf \equiv \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$

で定義すれば

定理 1　Λ は $i\mathcal{A}$ の実軸上にある固有値の全体であるが $\mathbb{R}$ の discrete な集合であり、

$$\lim_{t\to\infty}\|U(t)f - U(t)Pf\|_{L^2_{loc}(\Omega)} = 0$$

$$U(t)Pf = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda_j t} f_j, \quad \lambda_j \in \Lambda \quad (\text{in } L^2(\Omega))$$

特に A が一意接続の定理の成り立つ様な微分作用素のとき

$$\Lambda = \{0\}$$

さらに Condition VI (Strictly dissipative) を (A, B) に仮定するなら

$$\Lambda = \phi$$

が示される。

Condition VI. (A, B) : strictly dissipative

i.e.) 次の i) 又は ii) のいずれかが成り立つ.

i) $u \in B$ かつ $\int_{\partial\Omega} u \cdot A_m \bar{u}\, dS = 0$ なら $\partial\Omega$ の open set ω が存在して ω 上で $u \equiv 0$ 。

ii) ある実 x_0 の近傍 $\subset \bar{\Omega}$ で $C + C^* - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j$ は negative matrix.

この定理1を証明するのに、混合問題(*)を 全空間($\Omega = \mathbb{R}^n$)で主要部のみからなる定数係数の System ($|x| > \rho$ で(*)の System と一致しているような)

$$(**) \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = A_0 u(x, t) \equiv \sum_{j=1}^{m} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t)$$

に対する Cauchy 問題の領域の有界な部分での、摂動と見る。そのために 定数係数の System に対する解の性質を調べると 次の定理が成り立つ。

定理2　$|x| \geq \rho$ で $f(x) \equiv 0$ であるとする。
領域Ωの次元nが奇数のとき，

$$U_0(t)f = 0 \qquad \text{in } |x| < C_{min}(t-\rho)$$

領域Ωの次元nが偶数のとき

$$|U_0(t)f|^2 \leq \rho_n \frac{\|f\|_{\frac{1}{2}}^2}{(C_{min}(t-\rho) - |x|)^{n-1}}$$

$$\text{in } |x| < C_{min}(t-\rho)$$

ここに，$U_0(t)$ は初期値 f に対し（**）の解 $u(\cdot, t)$ を対応させる作用素（L^2 上の作用素とみるとき unitary である）の 1-パラメーター - group である。又，C_{min} は A_0 によって定まる正（≠0）の定数である。

定理3.　u は $|x| \geq R$ で L^2 かつ

$$(A + i\mu)u = 0 \qquad (\mu : \text{零でない実数})$$

をみたすとする。このとき u は $|x| \geq R$ で恒等的に零である。

今 $\chi(x) \in C^\infty$ を　$|\chi(x)| \leq 1$ でかつ

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \geq \rho + 1 \\ 0 & : |x| \leq \rho \end{cases}$$

とする。

$$
\begin{aligned}
&U(T+s)f - U(T+t)f \\
&= U(T)(1-\chi(x))\{U(s)f - U(t)f\} \\
&\quad + [U(T)\chi(x)\{U(s)f - U(t)f\} - \chi(x)U_0(T)\chi(x)\{U(t)f \\
&\qquad - U(t)f\}] \\
&\quad + \chi(x)U_0(T)\chi(x)\{U(s)f - U(t)f\}
\end{aligned}
$$

なる分解に定理2 及び$(*)$と$(**)$の解の有限伝播性を使うと 次のLemma を証明することが出来る。

Lemma 1　任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し、
$\{M(U(s)f)\ ;\ 0 \le s < \infty\}$ は $B_{[0,\infty)}(L^2_{loc}(\bar{\Omega}))$ の中で Precompact な集合である。

ここに　$M(g) \equiv U(\cdot)g$　($[0,\infty)$ 上の $L^2(\Omega)$-valued これより $L^2_{loc}(\bar{\Omega})$-valued function)

$B_{[0,\infty)}(L^2_{loc}(\bar{\Omega}))$ は $[0,\infty)$ 上の $L^2_{loc}(\bar{\Omega})$ に値をとる有界な連続函数の作る空間で $[0,\infty)$ での一様位相を入れる。

又 定理3からは

Lemma 2　Λ が R の discrete な集合である。
又 Aに対し一意接続の定理が成りたてば $\Lambda = \{0\}$ である。

Lemma 1 と Lemma 2 から定理1が従うが この所は

以下のように抽象的な命題に書きかえることが出来る。

H : Hilbert space , F : Fréchet space

H ⊂ F : injective

さらに H と F とのあいだの関係は、

(1) $\{\rho_j(f) \equiv [\rho_j(f,f)]^{\frac{1}{2}},\ j=1,2,\cdots\}$ が F の semi-norms

(2) 任意の $f \in H$ に対し、

$$\rho_j(f) \leq \rho_{j+1}(f) \leq \|f\|,\quad \sup_j \rho_j(f) = \|f\| .$$

上の (1), (2) をみたす F 上の bilinear forms $\{\rho_j(\cdot,\cdot)\}$ が存在するとする。

$\mathcal{B}_{[0,\infty)}[F]$ を $[0,\infty)$ 上の F-valued な有界連続な函数全体の作る空間で 各 semi norm に関する一様位相をもつものとする。

又 $U(t)$ を H 上の Contraction semi-group f の Motion を

$$M(f) \equiv U(\cdot)f \in \mathcal{B}_{[0,\infty)}[F]$$

と定義する。　このとき、

定理 4. 次の様な H 上の Projection ($U(t)$ によってきまる) P がある。

。 $\{M(U(s)f)\,;\,0\leq s<\infty\}$ が $B_{[0,\infty)}[F]$ で precompact な集合であるとき

$$\lim_{t\to\infty} \rho_j(U(t)f - U(t)Pf) = 0\,, \quad j=1,2\cdots$$

。 $U(t)Pf$ は H-valued almost periodic function ふオである。

参考文献

Iwasaki, N : Local Decay of Solutions for Symmetric Hyperbolic Systems with dissipative and Coercive Boundary Conditions in Exterior Domains. Publ. RIMS Kyoto Univ. 5, 1969.

Lax, P.D. and Phillips, R.S. : Scattering Theory Academic Press, New York. 1967.