数理解析研究所講究録
第 88 巻 1970 年 94-105

定係数対称双曲系方程式の依存領域と部分 lacunas について

阪大 教養 堤 陽

§1. 序

Maxwell の方程式 $E=\{u_i\ ;\ i=1,2,3\}$, $H=\{u_i\ ;\ i=4,5,6\}$

$u_i = u_i(t,x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$

$$\begin{cases} \partial_t E = \mathrm{curl}\, H \\ \partial_t H = -\mathrm{curl}\, E \end{cases}$$

の解は、

$$\begin{pmatrix} E(t,x) \\ H(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(0,x) \\ H(0,x) \end{pmatrix} + \mathrm{curl}\, t\, M_t \begin{pmatrix} H(0,x) \\ -E(0,x) \end{pmatrix} - \mathrm{curl}\,\mathrm{curl} \int_0^t \tau M_\tau \begin{pmatrix} E(0,x) \\ H(0,x) \end{pmatrix} d\tau$$

ここで $M_\tau(\varphi(x)) \equiv \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega_3} \varphi(x+\nu\tau)\, d\omega_{3,\nu}$

で表わされるので、初期 $t=0$ の空間内の半径 t の球全体は解 $\begin{pmatrix} E(t,x) \\ H(t,x) \end{pmatrix}$ の依存領域にふくまれる、すなわち、いわゆる wave cone 内には lacuna は存在しない。一方 $\mathrm{div}\,\mathrm{curl} \equiv 0$ 故 $\underline{\partial_t \mathrm{div}\, E = 0}$, $\underline{\partial_t \mathrm{div}\, H = 0}$ であり、又 Maxwell の方程式より

$\partial_t^2 \mathrm{curl}\, E = \mathrm{curl}\, \partial_t H = -\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\, E = \Delta\, \mathrm{curl}\, E - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\, E$

故、$\underline{(\partial_t^2 - \Delta)\,\mathrm{curl}\, E = 0}$, $\underline{(\partial_t^2 - \Delta)\,\mathrm{curl}\, H = 0}$ (componentwise) が成

立つ、すなわち 特性多項式 $\lambda^2(\lambda^2-|\xi|^2)$ の因子多項式 λ, $\lambda^2-|\xi|^2$ に対する微分作用素から作られる方程式 $\partial_t w=0$ 及び $(\partial_t^2-\Delta)w=0$ の解に $\mathrm{div}\,E$ 及び $\mathrm{curl}\,E$ 等が夫々なっている。これらからの自然な帰結として、$\mathrm{div}\,E(t,x)$ は、その初期空間上の一点 $(0,x)$ に於ける値にのみ依存し、$\mathrm{curl}\,E(t,x)$ 等は、その初期空間 $(t=0)$ 上の半径 t の球面上の値丈に依存することがわかる、すなわち 元の Maxwell の方程式の解の依存領域内に lacuna をもっている。言ひ換えれば、Maxwell の方程式にあっては、解(ベクトル)の空間変数に関する偏導関数の或る一次結合は、元の方程式の依存領域内に lacunas をもつ。そこで一般に、定係数対称双曲型方程式に於いて、その特性多項式の各因子多項式から作られる方程式に対して、元の方程式の解(ベクトル)の空間変数に関する偏導関数の適当な一次結合で、その方程式の解になっているものを作ることを主に問題にし、その帰結として、それらの一次結合は、特性多項式の因子多項式に対応する依存領域をもつことを導こうというわけです。

§2. 因子方程式

$$(2.1)\qquad \partial_t u = A(\partial)\,u$$

$$A(\partial)=\sum_{\nu=1}^{N} A_\nu\,\partial_{x_\nu}\ .$$

A_ν : 定数要素の (m, m) エルミット行列。

方程式の特性多項式に次の条件を課す : $A(\xi) = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu \xi_\nu$ として

$$\Delta(\lambda, \xi) = det\left(\lambda E - A(\xi)\right) = \{P_1(\lambda, \xi)\}^{\gamma_1} \cdots\cdots \{P_K(\lambda, \xi)\}^{\gamma_K}$$

(仮, 1) $P_\ell(\lambda, \xi)$ は次数 m_ℓ の (λ, ξ) についての斉次多項式であって、実数体で irreducible である。λ^{m_ℓ} の係数は 1 にとっておく。

(仮, 2) $P_\ell(\lambda, \xi) = 0$ の根 $\lambda_1^{(\ell)}(\xi), \cdots, \lambda_{m_\ell}^{(\ell)}(\xi)$ は $\ell = 1, 2, \cdots, K$ に対しても、すべて $|\xi| = 1$ 上で相異る。

定理を述べる前準備として

<u>補題</u> 各 $\ell = 1, 2, \cdots, K$ に対して、γ_ℓ この異った (m, m_ℓ) 行列 $T_\ell^{(k)}$ $k = 1, 2, \cdots, \gamma_\ell$ で

$$A(\xi)\, T_\ell^{(k)} = T_\ell^{(k)} D_\ell$$

ここで $D_\ell = diag(\lambda_1^{(\ell)}, \cdots, \lambda_{m_\ell}^{(\ell)})$

を充し、$T_\ell^{(k)}$ の列ベクトルは、その各要素が (λ, ξ) の多項式であるベクトル $T_\ell^{(k)}(\lambda, \xi)$ に於いて、$\lambda = \lambda_j^{(\ell)}(\xi)$ $j = 1, 2, \cdots, m_\ell$ を代入したもので、ベクトルの内積 $\left(T_\ell^{(k)}(\lambda_j^{(\ell)}(\xi), \xi), T_\ell^{(k)}(\lambda_r^{(\ell)}(\xi), \xi)\right) = 0$ $j \neq r$ を充すものをとることが出来る。

<u>証明</u> 先ず $\gamma_\ell = 1$ のときを述べよう。$\lambda_1^{(\ell)}(\xi) = \lambda_1^{(\ell)}$ は単根故、行列 $\delta(\lambda, \xi) = \lambda E - A(\xi)$ の階数は $m-1$ 故、$\xi = \xi_1$ を固定すれば、$\delta(\lambda_1^{(\ell)}, \xi_1)$ の或る (i_1, j_1) 余因子は 0 ではない。そこで、

$\delta(\lambda,\xi)$ の i_1 行余因子を要素とする列ベクトルを $\mathbb{T}_\ell^{(k)}(\lambda,\xi)$（この場合 $k=1$ のみ）とすればよい、$\mathbb{T}_\ell^{(k)}(\lambda,\xi)$ はそのとり方より $\delta(\lambda,\xi)\,\mathbb{T}_\ell^{(k)}(\lambda,\xi)=0$ を充す故、$(\mathbb{T}_\ell^{(k)}(\lambda_j^{(\ell)}(\xi),\xi),\ \mathbb{T}_\ell^{(k)}(\lambda_{j'}^{(\ell)}(\xi),\xi))=0$ も充す。$\gamma_\ell>1$ のときは、(仮.2)より $\delta(\lambda_1^{(\ell)}(\xi_1),\xi_1)$ の階数は $m-\gamma_\ell$ 故、γ_ℓ このベクトル $\mathbb{T}_\ell^{(k)}(\lambda,\xi)$ $k=1,\cdots,\gamma_\ell$ がとれるからそれらを Schmidt の方法で直交化（normalize はしない）するとよい。

次に、$\mathbb{T}_\ell^{(k)}(\lambda,\xi)$ の各要素 $T_{\ell,\nu}^{(k)}(\lambda,\xi)$ $\nu=1,2,\cdots,m$ を λ の多項式として、$\Delta(\lambda,\xi)$ の因子多項式 $P_\ell(\lambda,\xi)$ を modulo として

$$T_{\ell,\nu}^{(k)}(\lambda,\xi)\equiv\sum_{\kappa=1}^{m_\ell} t_{\ell,\nu,\kappa}^{(k)}(\xi)\,\lambda^{m_\ell-\kappa}\quad \text{modulo } P_\ell(\lambda,\xi),$$

とかき、行列

$$\mathcal{T}_\ell^{(k)}(\xi)=\left(t_{\ell,\nu,\kappa}^{(k)}(\xi)\ ;\ \begin{matrix}\nu\downarrow 1\cdots m\\ \kappa\to 1\cdots m_\ell\end{matrix}\right)$$

とすれば、

$$\mathbb{T}_\ell^{(k)}=\mathcal{T}_\ell^{(k)}(\xi)\cdot\Lambda_\ell(\xi),\quad ここで\ \Lambda_\ell(\xi)=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \lambda_1^{(\ell)}(\xi) & & \lambda_{m_\ell}^{(\ell)}(\xi)\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{(\ell)m_\ell-1}(\xi) & & \lambda_{m_\ell}^{(\ell)m_\ell-1}(\xi)\end{pmatrix}$$

とかける。

そこで

<u>定理</u>

(1) (方.1)の特性多項式 $\Delta(\lambda,\xi)$ の各既約因子 $P_\ell(\lambda,\xi)$ に対して、$Q_\ell^{(k)}(\xi)=\Lambda_\ell(\xi)\,\Lambda_\ell(\xi)\cdot\mathcal{T}_\ell^{(k)*}$ は、ξ について多項式要素の (m_ℓ,m) 行列（恒等的には0でない）となり、(方,1)の解 u に対して、

ベクトル $Q_\ell^{(k)}(\partial_x)u$ の各要素 $w_j=\left(Q_\ell^{(k)}(\partial_x)u\right)_j$ $j=1,2,\cdots,m_\ell$ は、因子方程式 $P_\ell(\partial_t,\partial_x)w_j=0$ を充す。

(2) ($Q_\ell^{(k)}(\xi)$ の minimality について)

(仮定) $\Pi_\ell^{(k)}$ の各列ベクトル $\Pi_\ell^{(k)}(\lambda_j(\xi),\xi)$ $j=1,2,\cdots,m_\ell$ が ξ の関数として恒等的には0ベクトルでない、とする。

このとき、(m_ℓ,m) 行列作用素 $R(\partial_x)$ が(方,1)の解 u に対して、$R(\partial_x)u$ が componentwise に、$P_\ell(\partial_t,\partial_x)\left(R(\partial_x)u\right)_j=0$ $j=1,\cdots,m_\ell$ を充すならば、多項式 $\pi(-i\xi)$ と、多項式要素の (m_ℓ,m_ℓ) 行列 $S(-i\xi)$ が存在して、$\pi(\partial_x)R(\partial_x)=S(\partial_x)Q_\ell^{(k)}(\partial_x)$ が成立つ。

(3) 各 $P_\ell(\lambda,\xi)$ $\ell=1,\cdots,K$ に対応する $Q_\ell^{(k)}(\xi)$ から作られる (m,m) 行列を $Q=\left(Q_\ell^{(k)}(\partial_x);k=1,\cdots,\nu_\ell,\ \ell=1,2,\cdots,K\right)$ とおくとき、$v_j=(Qu)_j$ $j=1,2,\cdots,m$ に対して、c.h = convex hull

$$c.h.\bigcup_{j=1}^{m}\mathrm{supp}\,u_j=c.h.\bigcup_{j=1}^{m}\mathrm{supp}\,v_j,\quad c.h.\bigcup_{j=1}^{m}\mathrm{sing.supp}\,u_j=c.h.\bigcup_{j=1}^{m}\mathrm{sing.supp}\,v_j$$

が成立つ。

(4) a,b を $a\leq b$ である自然数とする、u の適当な a コの要素からなるベクトルを μ, Qu の b コの要素からなるベクトルを f とおく、今、(a,a) 楕円型作用素 $A(\partial_x)$ と、(a,b) 準楕円型作用素 $B(\partial_x)$ が存在して、$A(\partial_x)\mu=B(\partial_x)f$ ならば

$$\bigcup_{i=1}^{a}\mathrm{sing\,supp}\,\mu_i=\bigcup_{j=1}^{b}\mathrm{sing\,supp}\,f_j$$ である。

証明を述べる前に、

定理の系　$w_j=(Q_\ell^{(k)}(\partial_x)u)_j$　$j=1,\cdots,m_\ell$　の依存領域は作用素 $P_\ell(\partial_t,\partial_x)$ に対応する依存領域である、ここで、依存領域とは初期の空間（$t=0$ に対応する x-空間）の点の集合であって、その上で、w_j の初期値 $w_j(0,x)$ が 0 ならば、解 $w_j=w_j(t,x)$ が 0 となる様な最小の閉集合のことである。

それらの補集合として、

定義　方程式系（方，1）の解 $u=u(t,x)$ の lacuna とは、初期の空間に於ける u の依存領域の補集合のことである。そして、$Q_\ell^{(k)}(\partial_x)u$ の lacunas も同様に定義される、$Q_\ell^{(k)}(\partial_x)u$ の lacunas を、元の方程式系（方，1）の解 u の因子 $P_\ell(\lambda,\xi)$ に対する部分 lacuna という。又 $Q_\ell^{(k)}(\partial_x)u$ を $P_\ell(\lambda,\xi)$ に関する differential lacunary components という。

注　初期値問題の基本解（[6] p.113）の立場から上のことは、次の様に定義することも出来る、方程式（作用素）に対応する ray surface（[1] p.586）は x-空間を或る個数の連結な領域にわける、そして、その方程式の初期値問題の基本解が、これらの領域のいくつかの上では 0 であることがある、この様な領域を、lacuna という、そこで、因子 $P_\ell(\lambda,\xi)$ の lacuna を、元の方程式系（方，1）の部分 lacuna という。

定理の証明　(1)（方，1）を x について Fourier 変換する（依存領域

の存在から、x についての supp u は有界としてよい)

$$\partial_t \tilde{u} = -iA(\xi)\tilde{u}.$$

$\Pi_\ell^{(\lambda)*}$ を左からかける:

$$\partial_t \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u} = -i\Pi_\ell^{(\lambda)*}A(\xi)\tilde{u},$$

補題により $\quad \partial_t \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u} = -i D_\ell \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u},$

Λ_ℓ を左からかける: $\quad \partial_t \Lambda_\ell \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u} = -i\Lambda_\ell D_\ell \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u}.$

一方 $\quad P_\ell(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^{m_\ell} + \sum_{s=0}^{m_\ell} a_{\ell,s}(\partial_x)\partial_t^{m_\ell - s}$ に対して

$$\mathcal{D}_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_{\ell,m_\ell}(\xi) & \cdots & & & -a_{\ell,1}(\xi) \end{pmatrix}$$ とすれば

(*) $\qquad \Lambda_\ell D_\ell = \mathcal{D}_\ell \Lambda_\ell \qquad$ であるから

(* *) $\qquad \partial_t \Lambda_\ell \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u} = -i\mathcal{D}_\ell \Lambda_\ell \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u}$

そこで、$\quad Q_\ell^{(\lambda)}(\xi) = \Lambda_\ell \Pi_\ell^{(\lambda)*} = \Lambda_\ell {}^t\Lambda_\ell \Pi_\ell^{(\lambda)*} \quad$ の各要素は、$\lambda_j^{(\ell)}(\xi)$

$j=1,\dots,m_\ell$ についての対称式である故、ξ の多項式となる。その上、$Q_\ell^{(\lambda)}(\xi)\tilde{u}$ の第一要素は、$P_\ell(\partial_t, -i\xi)\tilde{w}_1 = 0$ を充す故、$\tilde{w}_j = (-i\partial_t)^{j-1}\tilde{w}_1 \quad j=2,\dots,m_\ell$ によって、すべての要素がこの方程式を充す. よって $\quad Q_\ell^{(\lambda)}(\partial_x)u$ の各要素は

$$P_\ell(\partial_t, \partial_x)w = 0 \quad を充す。$$

(2) $\quad \tilde{v} = \Pi_\ell^{(\lambda)*}\tilde{u}$ とおくと (*), (* *) より $\tilde{v}$ は、

(* * *) $\qquad \partial_t \tilde{v} = -iD_\ell \tilde{v} \qquad$ を充す、

又：$\tilde{W} = \Lambda_\ell \tilde{V}$ とおくと、$\tilde{W} = Q_\ell^{(k)} \tilde{u}$ であって、

$\tilde{W}$ の Wronskian は (＊＊＊) より

$$\mathcal{W}[\tilde{W}] = |\Lambda_\ell| \mathcal{W}[\tilde{V}] = |\Lambda_\ell|^2 (-i)^{\frac{m_\ell(m_\ell-1)}{2}} \tilde{v}_1 \cdots \tilde{v}_{m_\ell}$$ 、そこで、

$\tilde{v}_j$ として $\tilde{v}_j = c_j(\xi) e^{-i\lambda_j(\xi)t}$ で $c_j(\xi) \neq 0$ $j=1,\cdots,m_\ell$ にえらべば、$\tilde{W}$ は $P_\ell(\partial_t, -i\xi)\tilde{W} = 0$ の基本解系となる。よって、Cauchy の一意性の定理から、或る (m_ℓ, m_ℓ) 行列 $S_1(-i\xi)$ が存在して、

$$R(-i\xi)\hat{u} = S_1(-i\xi)\tilde{W} = S_1(-i\xi) Q_\ell^{(k)}(\xi)\tilde{u}$$

$$\therefore \quad R(-i\xi) = S_1(-i\xi) Q_\ell^{(k)}(\xi)$$ 、

一方 $\Pi_\ell^{(k)}$ に課した仮定及 $|\Lambda_\ell| \neq 0$ より、rank $Q_\ell^{(k)}(\xi) = m_\ell$、よって、$S(-i\xi)$ の行ベクトルを未知数とする一次連立方程式は、ξ について有理函数解をもつ、よって、ある多項式 $\pi(-i\xi)$ をとれば $S(-i\xi) = \pi(-i\xi) S_1(-i\xi)$ は、多項式要素の行列となる。

(3) $Q(\partial_x)u = f$ の両辺に、$Q(\partial_x)$ の余因子行列をかけることによって、単独の作用素に帰着し、R^N が、$|Q(\partial_x)|$ 及び $Q(\partial_x)$ の余因子作用素について、strongly pseudo convex であることによって、得られる。

(4) Ω_i を u_i がそこで C^∞ となる開集合の和集合として、ω_j を f_j のそれとする。このとき、$A(\partial_x)$ の内部での regularity から

$$\bigcap_{j=1}^{k} \omega_j \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$ が成立つ。

なぜならば、$f \in C^\infty(\mathcal{O})$ ならば $\mathbb{B}(\partial_x) f \in C^\infty(\mathcal{O})$、よって $\mu_i \in C^\infty(\mathcal{O})$.

又、$\mathbb{B}(\partial_x)$ の準楕円性より

$$\bigcap_{j=1}^{b} \omega_j \supseteq \bigcap_{i=1}^{a} \Omega_i \quad \text{が成立つ.}$$

なぜならば $\mu_i \in C^\infty(\mathcal{O})$ ならば $\mathbb{A}(\partial_x)\mu \in C^\infty(\mathcal{O})$、よって $f_j \in C^\infty(\mathcal{O})$.

ここで、両辺の補集合をとれば、定理(4)をうる。

§3. 例　$\mathbb{T} = (\mathbb{T}_\ell^{(k)}\ k \to 1, \cdots, d_\ell,\ \ell \to 1, \cdots, K)$ 及 $\mathbb{Q}$ は定理(3)にあるものとする。

(1) maxwell の方程式

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & -|\xi|\xi_2 & |\xi|\xi_2 & \xi_1\xi_3 & \xi_1\xi_3 \\ 0 & \xi_2 & |\xi|\xi_1 & -|\xi|\xi_1 & \xi_2\xi_3 & \xi_2\xi_3 \\ 0 & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_3^2-|\xi|^2 & \xi_3^2-|\xi|^2 \\ \xi_1 & 0 & \xi_1\xi_3 & \xi_1\xi_3 & |\xi|\xi_2 & -|\xi|\xi_2 \\ \xi_2 & 0 & \xi_2\xi_3 & \xi_2\xi_3 & -|\xi|\xi_3 & |\xi|\xi_1 \\ \xi_3 & 0 & \xi_3^2-|\xi|^2 & \xi_3^2-|\xi|^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_1\xi_3 & 2\xi_2\xi_3 & 2(\xi_3^2-|\xi|^2) \\ -2\xi_2|\xi|^2 & 2\xi_1|\xi|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\xi_1|\xi|^2 & 2\xi_2\xi_3 & 2(\xi_3^2-|\xi|^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_2|\xi|^2 & -2\xi_1|\xi|^2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \cdots \operatorname{div} H \\ \cdots \operatorname{div} E \end{array}\right\} P_1(\lambda,\xi) = \lambda \\ \left.\begin{array}{l} \cdots -2\operatorname{curl}\operatorname{curl} H \text{ の第3要素} \\ \cdots 2i\Delta\operatorname{curl} E \text{ の 〃 〃} \\ \cdots -2\operatorname{curl}\operatorname{curl} E \text{ の 〃 〃} \\ \cdots -2i\Delta\operatorname{curl} H \text{ の 〃 〃} \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_2(\lambda,\xi) \\ = \lambda^2 - |\xi \end{array} \end{array}$$

又、$(\partial_t^2 - \Delta)\cdot\Delta\operatorname{curl} E = \Delta(\partial_t^2 - \Delta)\operatorname{curl} E = 0$ であり $\operatorname{supp} E$ 有界故：

$(\partial_t^2 - \Delta)\operatorname{curl} E = 0$　も導ける。

又、$\mu = E$, $f_0 = \operatorname{div} E$　$(f_i : i \downarrow 1, 2, 3) = \operatorname{curl}\operatorname{curl} E$, $f = (f_i : i \downarrow 0, 1, \cdots 3)$

とすると、

$$A(\partial_x) = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}$$ は elliptic system ([2] p505) 及び

$$B(\partial_x) = \begin{bmatrix} \partial_1 & -1 & 0 & 0 \\ \partial_2 & 0 & -1 & 0 \\ \partial_3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ は準楕円系 ([6] p.530) であり、これらに

対して $A(\partial_x)u = B(\partial_x)f$ とかけ、定理(4) によって

$$\bigcup_{i=1}^{3} \operatorname{sing\,supp} u_i = \bigcup_{j=0}^{3} \operatorname{sing\,supp} f_j$$ をうる。

(2) Acoustic equation $v = (u_i : i \downarrow 1,2,3)$ $p = u_4$ $u = (u_i : i \downarrow 1,\cdots,4)$

$$\begin{cases} \partial_t v = -\operatorname{grad} p \\ \partial_t p = -\operatorname{div} v \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda,\xi) = \lambda^2(\lambda^2 - |\xi|^2)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_1\xi_3 & -\xi_1 & -\xi_1 \\ -\xi_1 & \xi_2\xi_3 & -\xi_2 & -\xi_2 \\ 0 & -(\xi_1^2+\xi_2^2) & -\xi_3 & -\xi_3 \\ 0 & 0 & |\xi| & -|\xi| \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{cl} Q = \begin{pmatrix} \xi_2 & -\xi_1 & 0 & 0 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & -(\xi_1^2+\xi_2^2) & 0 \\ -2\xi_1 & -2\xi_2 & -2\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \to \lambda \\ \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \lambda^2 - |\xi|^2 \end{array} \end{array}$$

によって $\operatorname{curl} v$, $\operatorname{curl}\operatorname{curl} v$ の依存領域は一点であり、

$\operatorname{div} v$, Δp したがって p のそれは、球面である。又、

$f_0 = \operatorname{div} v$, $f_i = (\operatorname{curl}\operatorname{curl} v)_i$ $i = 1,2,3$, $f_4 = \Delta p$, $f = (f_i : i \downarrow 1,\cdots,4)$

に対して

$$\mathbb{A}(\partial_x)=\begin{pmatrix}\Delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta\end{pmatrix},\qquad \mathbb{B}(\partial_x)=\begin{bmatrix}\partial_1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ \partial_2 & 0 & -1 & 0 & 0\\ \partial_3 & 0 & 0 & -1 & 0\\ \partial_4 & 0 & 0 & 0 & +1\end{bmatrix}$$

は、それぞれ 楕円，半楕円系作用素となり

$$\mathbb{A}(\partial_x)u=\mathbb{B}(\partial_x)f$$

が成立ち，定理(4)を適用出来る。

(5) Dirac の方程式

$$\sum_{k=1}^{4}\alpha_k(\partial_k-a_k)u=0$$

ここで α_k (4,4) 対称行列 ([1] p179)

a_k 定数

$$\Delta(\lambda,\xi)=(\lambda^2-|\xi|^2)^2,$$

$u=exp(\sum_{k=1}^{4}a_k x_k)v$ とすると、との方程式は、

$$\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\partial_k v=0$$

$$\mathbb{T}=\begin{bmatrix}\xi_3 & \xi_3 & \xi_1-i\xi_2 & \xi_1-i\xi_2\\ \xi_1+i\xi_2 & \xi_1+i\xi_2 & -\xi_3 & -\xi_3\\ |\xi| & -|\xi| & 0 & 0\\ 0 & 0 & |\xi| & |\xi|\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Q}=\begin{bmatrix}2\xi_3 & 2(\xi_1-i\xi_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2|\xi|^2 & 0\\ 2(\xi_1+i\xi_2) & -2\xi_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2|\xi|^2\end{bmatrix}$$

よって、例へば、$\partial_3 v_1 + (\partial_1 - i\partial_2)v_2$，$\Delta v_3$，したがって，$v_3$ 等の依存領域は球面である．又、定理(4)の適用に当っては，$\mathbb{A}(\partial_x) = \mathbb{Q}$ は楕円系であるから、$\mathbb{B}(\partial_x) =$ identity にとることが出来る。

文献

[1] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, II, Interscience, 1962.

[2] A. Douglis, L. Nirenberg, Interior Estimates for Elliptic Systems, Comm. Pure Applied Math. 8 (1955) 503-538.

[3] G.F.D. Duff, On the Riemann matrix of a Hyperbolic Sys., M.R.C. Rep. #246, Madison, Wisconsin, 1961.

[4] G.F.D. Duff, A. Tsutsumi, On Domain of Dependence and Partial Lacunas for Symm. Hyp. Sys., Jour. of Math. and Mech. 19 (1969) 219-238.

[5] L. Hörmander, Differentiability Property of Solution of Sys. of Diff. Equ. Ark. Math. 3 (1958) 527-535.

[6] ゲルファント，シーロフ，超関数論入門 I，共立出版，1963.