数理解析研究所講究録
第88巻 1970年 106-118

2次元非定常Navier-Stokes方程式の再帰性について

名大理 竹下 彬

§1. 序

2次元の非定常Navier-Stokes方程式を考える。

$$
\text{(E)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u\cdot\nabla)u + \nabla p + f & x\in G,\ t>0 \\
\nabla\cdot u = \mathrm{div}\, u = 0 \\
u(x,0) = a(x) \\
u|_{\partial G} = 0
\end{cases}
$$

ここで G は $\mathbb{R}^2$ に於ける滑らかな境界 ∂G を持つ有界領域で、u は流れを記述する速度ベクトル場、p は圧力でスカラー関数、f は外力である。
方程式(E)の正則解の一意存在定理は充分一般的な situation の下に得られているが[2],[4],[12]、此処で述べ様とするのは次の様な事柄である。
任意に時刻 $t_0>0$ が与えられたとき、$t=0$ に於ける

流れの場を適当に与えることにより(a(x)を与えること)時刻t_0に於いてそれと同じ流れが再現される様に出来るか? 又出来るとすれば、その様な流れの場はt_0により一意的に決まるか?

此処では第一の問題に対する答が肯定的であること及び、第二のそれが、外力fが小さいときに肯定的であることを示す。

§2. Notation と結果.

$$L^2 \equiv L^2(G) = \left\{ f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \text{ ; real } \|f\|^2 = \int_G (f_1(x)^2 + f_2^2(x))\, dx < \infty \right\}$$

とし $L^2(G)$ に於ける内積を$(\cdot,\cdot)$で記す。

次に$C^\infty_{0,s}(G)$はR^2-値関数$\phi \in C_0^\infty(G)$で$\nabla\cdot\phi = 0$であるものの全体とし、$L^2(G)$に於ける$C^\infty_{0,s}(G)$の closure をL^2_sとする。更に$L^2(G)$からL^2_sへの直交射影をPとし、L^2_sに於ける対称作用素Bを次の様に定義する。

$$\mathcal{D}(B) = \{ u \in C^2(G) \cap \bar{C}^1(\bar{G}) \,;\, \nabla\cdot u = 0,\ u|_{\partial G} = 0 \}.$$

$$Bu = -P\Delta u \quad , u \in \mathcal{D}(B).$$

然る後に self-adjoint operator A を B の Friedrichs 拡大として定義すると、方程式(E)は次の$\underbrace{\text{方程式}}_{L^2_s\text{に於ける発展}}$

$$(E_1) \quad \frac{du}{dt} = -Au - P(u\cdot\nabla)u + Pf, \quad u(0) = a$$

に変換される。
此の様に定式化したとき第一の問に対する答は次の定理1で与えられる。

<u>定理1.</u> $Pf(t)$ を L^2_σ-値関数として $(0,\infty)$ の任意のコンパクト集合の上で一様にHölder連続とし $\mu=\sup_{t>0}\|Pf(t)\|<\infty$ とする。このとき任意に与えられた $t_0>0$ に対して $a\in L^2_\sigma$ が存在して $u(t_0)=a$ となる。ここで $u(t)$ は a を初期値とする (E_1) の解である。

ここで後の記述の為にあと2, 3のnotationを導入しておく。
$C^\infty_{0,\sigma}([0,T)\times G)$ は R^2-値関数 ϕ で $\phi\in C^\infty_0([0,\infty)\times G)$ で $D\phi=0$ であるものの全体。X_γ は $\mathcal{D}(A^\gamma)$ にグラフノルム $\|u\|_\gamma=\|A^\gamma u\|$ を与えたHilbert空間。
最後に非線型作用素 S_{t_0} を $S_{t_0}a=u(t_0)$ で定義する。ここで $u(t)$ は a を初期値とする (E_1) の解とする。

S_{t_0} を用いれば、定理1の主張は S_{t_0} が少くとも一つの不動点を持つことと同値である。それをSchauderの不動点定理によって証明した後、S_{t_0} の不動点の分布（個数とか孤立不動点であるかどうかなど）を調べる目的で、写像 S_{t_0} の位相的性質を調べる。次の定理2, 3, 4はその方向に対する結果である。

定理 2. $r>0$ が存在して、S_{t_0} は $B_r=\{x\in L^2_\sigma ; \|x\|\leq r\}$ の内部にのみ不動点を持ち、∂B_r に関する S_{t_0} の rotation number は 1 に等しい。

定理 3. $\forall \gamma>0$ に対して、$S_{t_0}: X_\gamma \longrightarrow X_\gamma$ は X_γ の任意の有界集合上で一様に Fréchet 微分可能。

定理 4. $\mu=\sup_{0<t<t_0}\|Pf(t)\|$ が充分小さいとき定理 1 に云う $a\in L^2_\sigma$ は一意的に定まる。

§3. 定理1の証明

此の§で定理1の証明の為に8つの lemma を用意する。
先ず (E_1) の弱解の定義より始める。

定義. $u(t)$ が区間 $[0,T)$ に於ける (E_1) の弱解であるとは、殆んどすべての t に対して $u(t)\in\mathcal{D}(A^{1/2})$ で任意の $\phi\in C^\infty_{0,\sigma}([0,T)\times G)$ に対して

$$\int_0^T\left[-\left(u,\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+(A^{1/2}u,A^{1/2}\phi)-(u,(u\cdot\nabla)\phi)-(Pf,\phi)\right]dt=(a,\phi(0))$$

を満たすことを云う。

lemma 1. (J. L. Lions [7]) (E_1) の弱解は $L^\infty([0,T);L^2_\sigma)\cap L^2([0,T);X_{1/2})$ で一意である。

以後、$u(t)$ と書けば a を初期値とする (E_1) の解を、又

$u_n(t)$と書けば a_n に対するそれとすることにしておく。又すべての lemma に於いて定理1の $Pf(t)$ に対する仮定は満たされているものとする。

<u>lemma 2.</u> 任意の $t>0$ に対して $\|u(0)\| > \mu\|A^{-1/2}\|^2$ ならば $\|u(t)\| < \|u(0)\|$ である。

(証明) $u(t)$ と (E_1) の両辺とのスカラー積をとると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = -(Au(t), u(t)) - (P(u(t)\cdot\nabla)u(t), u(t)) + (Pf(t), u(t))$$
$$= -\|A^{1/2}u(t)\|^2 + (Pf(t), u(t)) \leqq -\|A^{1/2}u(t)\| + \mu\|u(t)\|$$
$$\leqq -(\|u(t)\| - \mu\|A^{-1/2}\|^2)\|A^{-1/2}\|^2\|u(t)\|$$

これは $\|u(t)\| > \mu\|A^{-1/2}\|^2$ ならば $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 < 0$ であることを示す。これより lemma を得る。

<u>lemma 3.</u>

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|A^{1/2}u(s)\|^2 ds \leqq \|u(0)\|^2 + \|A^{-1/2}\|^2\int_0^t \|Pf(s)\|^2 ds$$

(証明略)

<u>lemma 4.</u> $t_0>0$ に対して $S_{t_0} : X_{1/4} \longrightarrow X_{1/2}$ は $X_{1/4}$ の任意の有界集合の上で一様に Lipschitz 連続である。

(証明) $a, b \in \mathcal{D}(A^{1/4})$ とし、かつ $\|A^{1/4}a\|, \|A^{1/4}b\| \leqq r$ とする。$u(t), v(t)$ を a, b を初期値とする (E_1) の解とすると、$u(t), v(t)$ は次の積分方程式を満たす。

$$(2-2)\quad u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}A^{-\frac{1}{4}}P(u(s)\cdot\nabla)u(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$

$$(2-3)\quad v(t) = e^{-tA}b - \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}A^{-\frac{1}{4}}P(u(s)\cdot\nabla)u(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds$$

次に $M(t) \equiv \max_{\alpha=\frac{1}{2},\frac{1}{4}} \sup_{0<s\leq t} s^\alpha \|A^\alpha(u(s)-v(s))\|$

$K(t) \equiv \max_{\alpha=\frac{1}{2},\frac{1}{4}} \max\left\{ \sup_{0<s\leq t} s^\alpha\|A^\alpha u(s)\|, \sup_{0<s\leq t} s^\alpha\|A^\alpha v(s)\|\right\}$

とおく。$M(t)$ を評価する為に次の Sobolevskij の不等式 (Fujita-Kato[3]) 及び、$\mathcal{D}(A^\gamma)$ の imbedding lemma を用いる:

$$\begin{cases} \|A^{-1/4}P(\phi\cdot\nabla)\psi\| \leq c_0\|A^{1/4}\phi\|\|A^{1/2}\psi\| & \text{for } \forall\phi, \forall\psi \in C^\infty_{0,\sigma}(G). \\ \mathcal{D}(A^\gamma) \subset C^{\gamma-1/2}(\bar{G}) & \gamma > 1/2. \end{cases}$$

(2-2), (2-3) より

$$u(t)-v(t) = e^{-tA}(a-b) - \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}A^{-1/4}P((u(s)-v(s))\cdot\nabla)u(s)\,ds - \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}A^{-1/4}P(v(s)\cdot\nabla)(u(s)-v(s))\,ds$$

これより

$$\|A^\alpha(u(t)-v(t))\| \leq \|A^\alpha e^{-(t-s)A}(a-b)\| + \int_0^t \|A^{\alpha+\frac{1}{4}}e^{-(t-s)A}A^{-\frac14}P((u(s)-v(s))\cdot\nabla)u(s)\|ds + \int_0^t \|A^{\alpha+\frac{1}{4}}e^{-(t-s)A}A^{-\frac{1}{4}}P(v(s)\cdot\nabla)(u(s)-v(s))\|\,ds$$

$$\leq t^{-\alpha}\|a-b\| + c_0\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{4})}\|A^{\frac{1}{4}}(u(s)-v(s))\|\|A^{1/2}v(s)\|ds + c_0\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{4})}\|A^{\frac{1}{4}}v(s)\|\|A^{\frac{1}{2}}(u(s)-v(s))\|ds$$

$$\leq t^{-\alpha}\|a-b\| + 2M(t)K(t)c_0\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{4})}s^{-\frac{3}{4}}ds$$

$$= t^{-\alpha}\|a-b\| + 2t^{-\alpha}c_0 B\left(\tfrac{3}{4}-\alpha, \tfrac{1}{4}\right)M(t)K(t).$$

よって $M(t) \leq \|a-b\| + cM(t)K(t)$ with some $c>0$.

ここで、$\tau>0$ が存在して、$cK(\tau)<\rho<1$ と出来る。ここで τ は、γ, μ のみによって決まることに注意する。(Fujita-Kato [3])。

よって $0<t\leqq\tau$ に対して、

$\|A^{\frac{1}{2}}(u(t)-v(t))\| \leqq t^{-\frac{1}{2}}M(t) \leqq t^{-\frac{1}{2}}\|A^{-\frac{1}{4}}\|(1-\rho)^{-1}\|A^{\frac{1}{4}}(a-0)\|$

もし、$\tau<t_0$ ならば、$\max\limits_{0\leq t\leq t_0}\|A^{\frac{1}{4}}u(t)\|$ が γ, μ, t_0 のみによって決まることに注意すれば、同様の議論をくり返すことにより lemma を得る。

<u>lemma 5.</u> $\beta>0$ とし、$f_n(t)$, $n=1,2,\cdots$ を $(-\infty,\infty)$ で定義された $\mathcal{D}(A^\beta)$-値関数とし、次の条件を満たすものとする。

(i) $\sup\limits_{n\geqq 1}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|^{2\gamma})\|f_n(t)\|^2dt<\infty$ with some $\gamma>0$.

(ii) $\sup\limits_{n\geqq 1}\sup\limits_{-\infty<t<\infty}\|A^\beta f_n(t)\|<\infty$.

(iii) $\{f_n(t)\}$ は L^2_σ-値関数として $(-\infty,\infty)$ で同等連続。

このとき部分列 $\{f_{n'}\}$ が存在して、$L^2((-\infty,\infty);L^2_\sigma)$ で強収束する。

(証明) 略。

<u>lemma 6.</u> $a_n\in L^2_\sigma$, $n=1,2,\cdots$, とし、

$v_n(t)=u_n(t)$ for $t\in[0,T]$, $v_n(t)=0$ for $t\notin[0,T]$ とするとき

$$\sup_{n\geqq 1}\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{2\gamma}\|\hat{v}_n(\tau)\|^2d\tau<\infty.\quad \forall\gamma\in(0,\tfrac{1}{4}).$$

ここで $\hat{v}_n$ は v_n の Fourier 像とする。(証明) 略。

<u>lemma 7.</u> $t_0>0$ に対して $S_{t_0}: L^2_\sigma \longrightarrow X_{1/2}$ は連続である。従って $S_{t_0}: L^2_\sigma \longrightarrow L^2_\sigma$ も連続である。
(位相はそれぞれ強位相をとる。)

(証明) $\{a_n\}$ が a_0 に L^2_σ で強収束するものとする。
$t_0<T$ なる T をとり固定する。
$\{a_{n'}\}$ を $\{a_n\}$ の任意の部分列とすると、Lemma 3 より
$\sup_{n'}\|a_{n'}\|<\infty$ かつ $\sup_{n'}\int_0^T\|A^{1/2}u_{n'}(t)\|^2dt<\infty$ を得る。
$v_{n'}(t)$ を Lemma 6 の様にとりその Fourier 像 $\hat{v}_{n'}(\tau)$ を考える。まず $\{\hat{v}_{n'}(\tau)\}$ が Lemma 5 の3つの条件を満たすことを示す。まず (i) であるが、これは $^\forall\gamma\in(0,\frac{1}{4})$ で満たされることが Lemma 6 より判る。次に (ii) であるが、これは次の様に示される。即ち

$$\sup_{n'}\sup_{-\infty<\tau<\infty}\|A^{1/2}\hat{v}_{n'}(\tau)\|=\sup_{n'}\sup_{\tau}\|A^{1/2}\int_0^T e^{-2\pi i\tau t}u_{n'}(t)\|$$
$$\leqq\sup_{n'}\int_0^T\|A^{1/2}u_{n'}(t)\|dt\leqq T^{1/2}\sup_{n'}\left(\int_0^T\|A^{1/2}u_{n'}(t)\|^2dt\right)^{1/2}<\infty$$

最後に (iii) は $\sup_{n'}\int_0^T\|u_{n'}(t)\|dt<\infty$ と Fourier 変換の性質より判る。よって Lemma 5 の3つの条件はすべて確められた。
従って $\{\hat{v}_{n'}(\tau)\}$ の部分列 $\{\hat{v}_{n''}(\tau)\}$ で $L^2((-\infty,\infty);L^2_\sigma)$ で強収束するものが取れるが、Fourier 変換の isometry より $\{u_{n''}(t)\}$ は $L^2((0,T);L^2_\sigma)$ で強収束することが判る。
次に Lemma 3 により $\{u_{n''}(t)\}$ の部分列 $\{u_{n'''}(t)\}$ で次の

(1),(2),(3) を満たすものがとれることに注意する。

(1) $\{u_{n'''}(t_0)\}$ は L^2_σ で弱収束する。(2) $\{u_{n'''}(t)\}$ は $L^2((0,T);X_{1/2})$ で弱収束する。(3) 数列 $\left\{\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_{n'''}(t)\|^2dt\right\}$ は収束する。

$w\text{-}\lim_{n'''} u_{n'''}(t_0) = v$, $w\text{-}\lim_{n'''} u_{n'''}(t) = w(t)$ とおく。

$u_{n'''}(t)$ は勿論 $[0,T)$ に於ける弱解でもあるから $^\forall\phi\in C^\infty_{0,\sigma}([0,T)\times G)$ に対して

$$(2\text{-}4)\quad \int_0^T\left[-\left(u_{n'''},\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+(A^{1/2}u_{n'''},A^{1/2}\phi)-(u_{n'''},(u_{n'''}\cdot\nabla)\phi)-(Pf,\phi)\right]dt = (a_{n'''},\phi(0)).$$

$n'''\longrightarrow\infty$ として

$$(2\text{-}5)\quad \int_0^T\left[-\left(w,\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+(A^{1/2}w,A^{1/2}\phi)-(w,(w\cdot\nabla)\phi)-(Pf,\phi)\right]dt = (a_0,\phi(0))$$

$w\in L^\infty((0,T);L^2_\sigma)\cap L^2((0,T);X_{1/2})$ であることは明らかであるから Lemma 1 より $w(t)=u_0(t)$ を得る。

一方

$$(2\text{-}6)\quad (u_{n'''}(t_0),\phi(t_0))+\int_0^{t_0}\left[-\left(u_{n'''},\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+(A^{1/2}u_{n'''},A^{1/2}\phi)-(u_{n'''},(u_{n'''}\cdot\nabla)\phi)-(Pf,\phi)\right]dt=(a_{n'''},\phi(0)).$$

再び $n'''\to\infty$ とし、$u_0(t)$ に対する (2-6) と較べることにより、結局 $(v,\phi(t_0))=(u_0(t_0),\phi(t_0))$ $^\forall\phi\in C^\infty_{0,\sigma}([0,T)\times G)$ を得るが、これより $v=u_0(t_0)$ が出る。

次に、容易に導かれる次の2つの等式に注意しよう。

(2-7) $\|u_{n'''}(t_0)\|^2 + 2\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_{n'''}(t)\|^2dt = \|a_{n'''}\|^2 + 2\int_0^{t_0}(Pf, u_{n'''})dt.$

(2-8) $\|u_0(t_0)\|^2 + 2\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_0(t)\|^2dt = \|a_0\|^2 + 2\int_0^{t_0}(Pf, u_0)dt.$

(2-7)に於いて $n'''\to\infty$ とすると、

$$\lim\|u_{n'''}(t_0)\|^2 + 2\lim\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_{n'''}(t)\|^2dt = \|a_0\|^2 + 2\int_0^{t_0}(Pf, u_0)dt.$$

(2-8)と較べかつ $\|u_0(t_0)\| = \|w\text{-}\lim u_{n'''}(t_0)\| \leqq \underline{\lim}\|u_{n'''}(t_0)\|$

$$\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_0(t)\|^2dt = \int_0^{t_0}\|A^{1/2}\,w\text{-}\lim u_{n'''}(t)\|^2dt \leqq \underline{\lim}\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_{n'''}(t)\|^2dt$$

に注意すれば、$\|u_0(t_0)\| = \lim\|u_{n'''}(t_0)\|$, $\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_0(t)\|^2dt = \lim\int_0^{t_0}\|A^{1/2}u_{n'''}(t)\|^2dt$ を得る。弱収束性と併わせ、

$u_{n'''}(t_0)\longrightarrow u_0(t_0)$ in L^2_σ, $u_{n'''}(t)\longrightarrow u_0(t_0)$ in $L^2((0,t_0);X_{1/2})$

とそれぞれ強収束する。極限が部分列$\{u_{n'}\}$のとり方によらぬことに注意すれば、Lemma 7の後の方の主張の証明はこの段階で終った。先のそれを証明するには次の様にする。$u_{n'''}(t)$ は $u_0(t)$ に $L^2((0,T);X_{1/2})$ で強収束するので、部分列 $\{u_{n_4}(t)\}$ をとれば、a.e. $t\in(0,t_0)$ に対して $X_{1/2}$ で強収束する。勿論 $X_{1/4}$ でも強収束する。その様な $t_1\in(0,t_0)$ を一つとり Lemma 4を用いれば、Lemma を得る。

Lemma 8. $t_0>0$ に対して $S_{t_0}: L^2_s \longrightarrow X_{1/2}$ は compact である。従って $S_{t_0}: L^2_s \longrightarrow L^2_s$ も又 compact である。
(証明).

$a_n \in L^2_s$; $n=1,2,\cdots$ かつ $\sup_n \|a_n\| < \infty$ とする。
Lemma 3 と Fatou の lemma より

$$\int_0^{t_0} \varliminf \|A^{1/2} u_n(t)\|^2 dt \leqq \varliminf \int_0^{t_0} \|A^{1/2} u_n(t)\|^2 dt < \infty$$

である。従って a.e. $t \in (0,t_0)$ に対して $\varliminf \|A^{1/2} u_n(t)\| < \infty$ である。その様な $t_1 \in (0,t_0)$ をとり、$\{u_n(t_1)\}$ の部分列 $\{u_{n'}(t_1)\}$ を適当にとれば、 $\sup_{n'} \|A^{1/2} u_{n'}(t_1)\| < \infty$ を得るが、$A^{-1/4}$ は compact linear operator であるので、部分列 $\{u_{n''}(t_1)\}$ を更にとれば、それは $X_{1/4}$ で強収束する。ここで Lemma 4 を用いれば、Lemma 8 を得る。

以上で定理1の証明の為の lemma がすべて得られた。
まず、$r > \mu \|A^{-\frac{1}{2}}\|^2$ なる r をとれば、$S_{t_0}(B_r) \subset B_r$。ここで Lemma 7, Lemma 8 と Schauder の不動点定理を用いれば、定理1を得る。

定理2、3、4は §1でいう S_{t_0} の位相的性質を調べることの途中の結果なので、ここでは細部は省略する。

—文献—

[1] Fujita. H: Unique existence of solutions of the Navier-Stokes initial value problem (an application of fractional powers of operators) Sûgaku (Iwanami) 14, 68–81 (1962).

[2] Kato, T - Fujita. H; On the non-stationary Navier-Stokes system, Rendiconti Seminario Math. Univ. Padova, 32, 243–260 (1962)

[3] Fujita. H - Kato, T; On the Navier-Stokes initial value problem. 1. Arch. Rat. Mech. Anal. 16 269–315 (1964)

[4] Ladyzhenskaya, O. A: Mathematical Problems for Dynamics of Viscous Incompressible Fluids, Moscow 1961.

[5] Lions, J. L. Sur l'existence des solutions des équations de Navier-Stokes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248 (1959) p. 2847–2850.

[6] Lions. J. L: Quelques résultats d'existence dans les équations aux dérivées partielles non linéaires, Bull. Soc. Math, (1960)

[7] Lions, J.L: Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes, Rendiconti Seminario Math. Univ. Padova, 16–23 (1960).

[8] Kaniel, S - Shinbrot, M: A reproductive property of the Navier-Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal. vol. 24 p 363 - 369 (1967).

[9] Krasnoselskij, M. A.: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Pergamon Press (1964).

[10] Prodi, G: Qualche resultato riguardi alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale. Rendiconti Seminario Math. Univ. Padova, 30, 1–15 (1960).

[11] Serrin, J: A note on the existence of periodic solutions of the Navier-Stokes equations: Arch. Rational Mech. Anal. 3, 120-122 (1959).

[12] Sobolenskij P, E: On non-stationary equations of hydrodynamics for viscous fluids. Doklady Acad. Nauk, USSR, 128, 45-48 (1959).