数理解析研究所講究録
第 88 巻 1970 年 119-134



# Cauchy 問題の Singularity の伝播について

京工繊 工芸　浜田雄策

## §1

複素領域において正則な係数をもつ線形偏微分方程式の Cauchy 問題にかんして，初期面が非特性，初期条件が特異点をもつときを考える。前の機会に初期値の特異点（regular な面をなすと仮定する）から出る特性面が simple の場合について考察した。即ち初期値が高々 pole ならば解は特性面に沿って高々 pole 及び対数項，初期値が真性特異点ならば解は特性面に沿って真性特異点及び対数項をもつことが言へる。ここでは特異点から出る特性面が重なっている場合について考察したいと思います。

この場合勿論 simple の場合と異った状態が生じる。即ち初期値が pole なのに拘らず解は真性特異点をもつことが起る。たとえば

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(0, y) = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \end{cases}$$

にかんして解は

$$u(x, y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!}\left(\frac{x^2}{y}\right)^n$$

によって表わされる。[1]

しかし低階の項について或制限を設けるならば simple の場合と同様なことがいへる。低階の項の制限については2変数のときの A. Lax [1] の条件，一般の場合には，Mizohata-Ohya 氏 [4] による E. E. Levi 条件，Matsuura 氏 [5] による条件に類似の条件を使用する。方法は Simple の場合と全く同様で Mizohata [3] による方法を本質的に使用する。亦 Ludwig [2] も参考にした。

## § 2

先づ2変数の場合について述べる。

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_i(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$\lambda_i(x, y)$ は $(0, 0)$ の近傍で正則な函数で，$\lambda_i(0,0)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ は distinct と仮定する。

A. Lax の条件を充す方程式

$$(2.1) \qquad \partial_1^{l_1}\cdots\partial_m^{l_m} u + \sum_{\substack{\nu_1 \le l_1, \cdots, \nu_m \le l_m \\ \nu_1 + \cdots + \nu_m < l \\ l_1 + \cdots + l_m = l}} a_{\nu_1, \cdots, \nu_m}(x, y)\partial_1^{\nu_1}\cdots\partial_m^{\nu_m} u = 0$$

1) この事実は既に Hill [6] によって指適されている。

を考える。

$\partial_i$ にかんする $(0,0)$ を通る characteristic curve を $\varphi^{(i)}(x,y)=0$ $(\varphi^{(i)}(0,y)=y)$ とする。そのとき

---

<u>Th 1</u>　方程式 (2.1) において初期条件が $y=0$ で高さ pole をもつとき解は

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{F^{(i)}(x,y)}{[\varphi^{(i)}(x,y)]^{p_i}}+G^{(i)}(x,y)\log\varphi^{(i)}(x,y)+H^{(i)}(x,y)\right\}$$

又，初期条件が $y=0$ で essential singularity をもつとき

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(i)}(x,y)}{[\varphi^{(i)}(x,y)]^{k}}+G^{(i)}(x,y)\log\varphi^{(i)}(x,y)+H^{(i)}(x,y)\right\}$$

と表わされる。

ここで $p_i$ は integer $\geqq 0$，F, G, H は $(0,0)$ の近傍で正則な函数である。

---

$p_i$ についてはたとえば初期条件が

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(0,y)=0\quad(k\neq h),\quad \frac{\partial^h u}{\partial x^h}(0,y)=\frac{1}{y^p}$$

のとき
$$p_i\leqq l_i+p-h-1$$

<u>注意</u>　或 $i$ について，$\varphi^{(i)}(x,y)=0$ 上で singularity をもたないことは起りうる。(このことは simple の場合と同様である)

## § 3

次に一般の場合について述べる。

Cauchy 問題

$$(3.1)\quad \begin{cases} a(x, \frac{\partial}{\partial x})\, u = 0 \\ \text{初期面 } x_1 = 0 \\ \text{初期條件は } x_2 = 0 \text{ を除いて正則} \end{cases}$$

において微分作用素 $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ として

$$(3.2)\quad a(x, \tfrac{\partial}{\partial x}) = h_2(x, \tfrac{\partial}{\partial x})\left[h_1(x, \tfrac{\partial}{\partial x})\right]^2 + b(x, \tfrac{\partial}{\partial x})\, h_1(x, \tfrac{\partial}{\partial x}) + c(x, \tfrac{\partial}{\partial x})$$

の形のものを考える。

ここで $h_1(x;\xi)$, $h_2(x;\xi)$ は $\xi$ について夫々 $l_1$ 次, $l_2$ 次の斉次多項式で係数は $x$ の正則函数 $(2l_1 + l_2 = m)$, 更に

$$(3.3)\quad \begin{cases} h_1(0; \xi_1, 1, 0, \cdots, 0) = 0 \quad \text{の根を } \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{l_1} \\ h_2(0; \xi_1, 1, 0, \cdots, 0) = 0 \quad \text{の根を } \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{l_2} \end{cases}$$

としたとき $\lambda_1, \cdots, \lambda_{l_1}, \mu_1, \cdots, \mu_{l_2}$ は distinct とする。

又, $b(x, \xi)$ は $\xi$ について $l_1 + l_2 - 1$ 次の斉次多項式

$c(x, \xi)$ は 〃 高々 $m-2$ 次の多項式である。

これは Mizohata - Ohya 氏による E. E. Levi の條件, Matsuura 氏 [ 5 ] の條件の analogons である。

即ち

$$a(x, \xi) = P_m(x, \xi) + P_{m-1}(x, \xi) + \cdots + P_0(x, \xi)$$

において

$$P_m(x,\xi) = (\xi_1 - \lambda_1(x;\xi'))^2 \cdots (\xi_1 - \lambda_{l_1}(x;\xi'))^2$$
$$\times (\xi_1 - \mu_1(x;\xi')) \cdots (\xi_1 - \mu_{l_2}(x;\xi'))$$

なる分解が $x=0$ の近傍，$\xi'$ は $(1,0,\cdots,0)$ の近傍で成立する。

ここで $\lambda_i(x,\xi')$ は $x=0$, $(\xi')=(1,0 \cdots 0)$ の近傍で正則，更に

$$\lambda_i(0;1,0,\cdots,0)=\lambda_i \quad , \quad \mu_i(0;1,0,\cdots,0)=\mu_i .$$
$$i=1,2,\cdots,l_1 \qquad\qquad i=1,2,\cdots,l_2$$

そのとき $\exists h_1(x,\xi)$, $h_2(x,\xi)$

$$P_m(x,\xi) = h_2(x,\xi)\,[h_1(x,\xi)]^2$$

とかける。更に $P_{m-1}(x,\xi)$ について E.E. Levi の条件

$$\left[ P_{m-1}(x,\xi) + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 P_m}{\partial\xi_1^2}\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_1} + \sum_{\alpha=2}^{n}\frac{\partial^2 P_m}{\partial\xi_1\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_\alpha}\right\}\right]_{\xi_1=\lambda_j(x;\xi')} = 0$$
$$|x|<\varepsilon,\ |\xi_2-1|<\varepsilon,\ |\xi_3|<\varepsilon,\cdots,|\xi_n|<\varepsilon$$

を設ける。そのとき

$$a(x,\tfrac{\partial}{\partial x}) = h_2(x,\tfrac{\partial}{\partial x})\,[h_1(x,\tfrac{\partial}{\partial x})]^2 + b(x,\tfrac{\partial}{\partial x})\,h_1(x,\tfrac{\partial}{\partial x}) + c(x,\tfrac{\partial}{\partial x})$$

とかける。

従って $P_m(x,\xi) = \xi_1^2 - \xi_2\xi_3$ なる場合は考察から排除する。

さて $x_1=x_2=0$ から出る $h_1(x,\frac{\partial}{\partial x})$ にかくする characteristic surface を $\varphi^{(i)}(x)=0$, 又, $h_2(x,\frac{\partial}{\partial x})$ にかくする characteristic surface を $\psi^{(i)}(x)=0$ $(\varphi^{(i)}(0,x')=x_2,\ \psi^{(i)}(0,x')=x_2)$ とする。

そのとき

Th 2

(3.4) $$a(x, \tfrac{\partial}{\partial x})\, u = 0$$

initial surface は $x_1 = 0$

initial condition が $x_2 = 0$ を除いて高々 pole のとき

(3.5)
$$u = \sum_{i=1}^{l_1} \left\{ \frac{F^{(i)}(x)}{[\varphi^{(i)}(x)]^{p_i}} + G^{(i)}(x) \log \varphi^{(i)}(x) + H^{(i)}(x) \right\} + \sum_{i=1}^{l_2} \left\{ \frac{\widetilde{F^{(i)}(x)}}{[\psi^{(i)}(x)]^{q_i}} + \widetilde{G^{(i)}(x)} \log \psi^{(i)}(x) + \widetilde{H^{(i)}(x)} \right\}$$

次に initial condition が $x_2 = 0$上で essential singularity をもつときには

(3.6)
$$u = \sum_{i=1}^{l_1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(i)}(x)}{[\varphi^{(i)}(x)]^k} + G^{(i)}(x) \log \varphi^{(i)}(x) + H^{(i)}(x) \right\} + \sum_{i=1}^{l_2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{F_k^{(i)}(x)}}{[\psi^{(i)}(x)]^k} + \widetilde{G^{(i)}(x)} \log \psi^{(i)}(x) + \widetilde{H^{(i)}(x)} \right\}$$

特にたとえば initial condition が

$$\frac{\partial^h u}{\partial x_1^h}(0, x') = \frac{w_h(x'')}{x_2^p}, \quad \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(0, x') = 0 \quad k \neq h \quad 0 \leq k \leq m-1$$

のときは
$$\begin{cases} p_i \leq p - h + 1 \\ q_i \leq p - h \end{cases}$$

## §4 Th. 2 の証明

initial condition が

$$
(4.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^h u}{\partial x_1^h}(0,x') = \dfrac{W(x'')}{x_2^p} \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(0,x') = 0 \qquad k \neq h \qquad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases}
$$

の場合について Th. 2 を証明する。

formal solution

$$
(4.2)\qquad u = \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{k=-p+h-1}^{\infty} f_k(\varphi^{(i)})\, u_k^{(i)} + \sum_{i=1}^{l_2} \sum_{k=-p+h}^{\infty} f_k(\psi^{(i)})\, v_k^{(i)}
$$

を構成しよう。

ここで
$$
\begin{cases} f_0(s) = \log s \\ f_{-1}(s) = \dfrac{1}{s} \qquad\qquad f_\alpha(s) = \dfrac{s^\alpha}{\alpha!}\log s - \dfrac{A_\alpha}{\alpha!} s^\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha : \text{整数} > 0 \\ f_{-h}(s) = \dfrac{(-1)^h (h-1)!}{s^h} \qquad A_\alpha = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}
$$

これを $a(x, \frac{\partial}{\partial x})u = 0$ に代入して $f_{k-m+2}(\varphi^{(i)})$, $f_{k-m+1}(\psi^{(i)})$ の係数を比較して

$$
(4.3)\qquad \begin{cases} \tilde{L}_0 L_1 L_1 (u_k^{(i)}) + \tilde{\tilde{L}}_0 L_1 (u_k^{(i)}) + \tilde{\tilde{\tilde{L}}}_0 (u_k^{(i)}) \\ = \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{m-3} \mathcal{L}_{\alpha+3} [u_{k-1-\alpha}^{(i)}] \end{cases}
$$

$$
(4.4)\qquad \tilde{L}_1 L_0 L_0 [v_k^{(i)}] + \tilde{L}_0 L_0 [v_k^{(i)}] = \sum_{\alpha=0}^{m-3} \mathcal{L}_{\alpha+2} [v_{k-1-\alpha}^{(i)}]
$$

を得る。

$$\left\{\begin{array}{ll} u_k \equiv 0 & k < -p+h-1 \\ v_k \equiv 0 & k < -p+h \end{array}\right.$$ と規約する。

但し (4.3), (4.4) において

$$(4.5)\quad \left\{\begin{array}{ll} L_0 = h_1(x, \varphi_x^{(1)}) \neq 0 & (x=0 \text{ の近傍で}) \\ \tilde{L}_0 = h_2(x, \varphi_x^{(1)}) \neq 0 & (\quad〃\quad) \\ \tilde{\tilde{L}}_0 = b_{\ell_1+\ell_2-1}(x, \varphi_x^{(1)}) & \\ L_1 = \sum_{j=1}^{n} h_1^{(j)}(x, \varphi_x^{(1)}) \frac{\partial}{\partial x_j} + C(x) & \\ \tilde{L}_1 = \sum_{j=1}^{n} h_2^{(j)}(x, \varphi_x^{(1)}) \frac{\partial}{\partial x_j} + C'(x) & \\ \mathcal{L}_\alpha \text{ は order } \alpha \text{ の differential operator である} & \end{array}\right.$$

さて、(4.3) は次の様に書き直される。

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{h_1^{(1)}(x, \varphi_x^{(1)})} = \cdots\cdots = \dfrac{dx_n}{h_1^{(n)}(x, \varphi_x^{(1)})} = dt \\ x_1(0) = 0, \quad x_k(0) = y_k \quad k = 2, \cdots, n \end{array}\right.$$

の解を $x_i = x_i(t, y) \quad i = 1, 2, \cdots, n$ とする。

これによって正則な座標変換

$$(x) \xrightarrow{\mathcal{T}_i^{(1)}} (t, y)$$

を定義する。その逆変換を $\mathbb{T}_i^{(1)}$ とする。

$U_k^{(1)}(t, y) = U_k^{(1)}(\mathbb{T}_i^{(1)}(t, y))$ とおくと (t, y) 系にかんして

$L_1 = \dfrac{\partial}{\partial t} + \alpha_i(t, y)$ とかけることにより (4.3) は

$$(4.6)\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + a_i(t,y)\frac{\partial}{\partial t} + b_i(t,y)\right] u_k^{(i)}(t,y) = \sum_{\alpha=0}^{m-3} \mathcal{L}_{\alpha+3}\left[u_{k-1-\alpha}^{(i)}\right] \\ \text{特に} \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + a_i(t,y)\frac{\partial}{\partial t} + b_i(t,y)\right] u_{-p+h-1}^{(i)} = 0 \end{cases}$$

となる。 $\mathcal{L}_\alpha$ は $(t,y)$ にかんして order $\alpha$ の微分作用素.

次に $v_k^{(i)}$ について考える。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{h_2^{(1)}(x,\varphi_x^{(i)})} = \cdots\cdots = \dfrac{dx_n}{h_2^{(n)}(x,\varphi_x^{(i)})} = dt \\ x_1(0) = 0, \quad x_k(0) = y_k \quad k=2,\cdots n \end{cases}$$

の解を $x_i = x_i(t,y)$ $i=1,2,\cdots,n$ とし，これにより正則な座標変換 $(x) \xrightarrow{J_i^{(2)}} (t,y)$ を定義する。その逆変換を $\mathrm{I}_i^{(2)}$ とする。 $v_k^{(i)}(t,y) = v_k^{(i)}(\mathrm{I}_i^{(2)}(t,y))$ とおくと

$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \beta_i(t,y)$ とかけることを使って(4.4)は

$$(4.7)\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_i(t,y)\right] v_k^{(i)} = \sum_{\alpha=0}^{m-2} \mathcal{L}_{\alpha+2}\left[v_{k-1-\alpha}^{(i)}\right] \\ \text{特に} \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_i(t,y)\right] v_{-p+h}^{(i)} = 0 \end{cases}$$

を得る。ここで $\mathcal{L}_\alpha$ は $(t,y)$ にかんする高々 order $\alpha$ の微分作用素.

次に initial condition について調べよう。

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^\alpha} = \sum_{i=1}^{l_1}\sum_{k=-p+h-1}^{\infty} f_{k-\alpha}(\varphi^{(i)})\left\{\left(\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x_1}\right)^\alpha u_k^{(i)} + \left[(\alpha-1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{\alpha-1}\frac{\partial u_{k-1}^{(i)}}{\partial x_1} + c(x)u_{k-1}^{(i)}\right] + \cdots\right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{l_2}\sum_{k=-p+h}^{\infty} f_{k-\alpha}(\psi^{(i)})\left\{\left(\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial x_1}\right)^\alpha v_k^{(i)} + \cdots\cdots\right\}$$

又 $\left.\dfrac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=\alpha_i(x')$ , $\left.\dfrac{\partial\psi^{(i)}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=\beta_i(x')$

に対して，$\alpha_i(x')$ $i=1,2,\cdots,l_1$, $\beta_i(x')$, $i=1,2,\cdots,l_2$ は $x=0$ の近傍で distinct，従って

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_2 & 1 & & \alpha_{l_1} & 1 & \beta_1 & \cdots & \beta_{l_2} \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & \alpha_2^2 & & & \alpha_{l_1}^2 & 2\alpha_{l_1} & \beta_1^2 & \cdots & \beta_{l_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1^{m-1} & (m-1)\alpha_1^{m-2} & \alpha_2^{m-1} & & & \alpha_{l_1}^{m-1} & (m-1)\alpha_{l_1}^{m-2} & \beta_1^{m-1} & \cdots & \beta_{l_2}^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

を利用して $\left.u^{(i)}_{-p+h-1}\right|_{x_1=0}=0$ $i=1,2,\cdots,l_1$．又

$$(4.8)\qquad \left.\begin{Bmatrix} u^{(i)}_{-p+h} \\ v^{(i)}_{-p+h} \\ \dfrac{\partial u^{(i)}_{-p+h-1}}{\partial x_1} \end{Bmatrix}\right|_{x_1=0} = \begin{cases} \Delta_1(h,i,x)\,W(x'') \\ \Delta_2(h,i,x)\,W(x'') \\ \Delta_3(h,i,x)\,W(x'') \end{cases}$$

ここで $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ は $h$, $i$ 及び $a(x,\frac{\partial}{\partial x})$ にのみ関係する $x=0$ の近傍で正則な函数である。更に $k\geqq 1$ のときは

$\left.u^{(i)}_{-p+h+k}\right|_{x_1=0}$, $\left.v^{(i)}_{-p+h+k}\right|_{x_1=0}$, $\left.\dfrac{\partial u^{(i)}_{-p+h+k-1}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ は夫々

$$(4.9)\qquad \sum_{j=1}^{l_1}\mathcal{M}_0^{(j)}(u^{(j)}_{-p+h+k-1})+\sum_{j=1}^{l_1}\sum_{p_j=2}^{m-1}\mathcal{M}_{p_j}^{(j)}(u^{(j)}_{-p+h+k-p_j})$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{l_2}\sum_{p_j=1}^{m-1}\mathcal{M}_{p_j}^{(j)}(v^{(j)}_{-p+h+k-p_j})\right|_{x_1=0}$$ の形をしていることがわかる。

ここで $\mathcal{M}_\alpha$ は $x_1$ にかんする高々 order $\alpha$ の微分作用素で $k$ に独立で $a(x,\frac{\partial}{\partial x})$ にのみ depend する。

さてこの式を $(t,y)$ 系に直して

$$(4.10)\qquad \left.\begin{matrix} u^{(i)}_{-p+h}(t,y) \\ v^{(i)}_{-p+h}(t,y) \\ \dfrac{\partial u^{(i)}_{-p+h-1}(t,y)}{\partial t} \end{matrix}\right|_{t=0} = \left.\begin{cases} h_1^{(i)}(x,\varphi_x^{(i)})\,\Delta_1(h,i,x'')\,w(x'') \\ h_1^{(i)}(x,\varphi_x^{(i)})\,\Delta_2(h,i,x'')\,w(x'') \\ h_1^{(i)}(x,\varphi_x^{(i)})\,\Delta_3(h,i,x'')\,w(x'') \end{cases}\right|_{x_1=0}$$

$k\geq 1$ に対して

$$(4.11)\qquad \begin{cases} u^{(i)}_{-p+h+k}(0,y),\ v^{(i)}_{-p+h+k}(0,y),\ \dfrac{\partial u^{(i)}_{-p+h+k-1}}{\partial t}(0,y) \quad \text{は高々} \\ \Big[\displaystyle\sum_{j=1}^{l_1}\mathcal{M}_0^{(j,i)}[u^{(j)}_{-p+h+k-1}] + \sum_{j=1}^{l_1}\sum_{p_j=2}^{m}\mathcal{M}_{p_j}^{(j,i)}[u^{(j)}_{-p+h+k-p_j}] \\ \quad + \displaystyle\sum_{j=1}^{l_2}\sum_{p_j=1}^{m}\mathcal{M}_{p_j}^{(j,i)}[v^{(j)}_{-p+h+k-p_j}]\Big]_{t=0} \end{cases}$$

の形をしている

ここで $\mathcal{M}_\alpha$ は $(t,y)$ にかんして高々 order $\alpha$ の微分作用素である。

以上をまとめて formal solution は (4.6), (4.7) を初期条件 (4.10), (4.11) の下に解けばよい。

## §5.

さて前§で得られた formal solution (4.2) が exact であることを示そう。これは Mizohata [3] による評価式によれば直ちに出る。即ち

**Proposition 1**

$a(x)$, $b(x)$ は2つの正則函数で

$$|D_x^\nu a(x)| \leqq \frac{(r+|\nu|)!}{(k\rho)^{|\nu|}} A \qquad k>1$$

$$|D_x^\nu b(x)| \leqq \frac{(s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} B$$

が成立つとする。ここで $r$, $s$ は正又は0の整数である。

そのとき

$$|D_x^\nu (ab)(x)| \leqq \frac{(r+s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} \left( AB \big/ C_r^{r+s} \right) \times \frac{k}{k-1}$$

次に微分作用素

$$\Pi[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l u + \sum_{\nu<l} a_\nu(t,x) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu u$$

において係数 $a_\nu(t,x)$ が

$$|D_{t,x}^\nu a_\nu(t,x)| \leqq \frac{|\nu|!}{(3\rho)^{|\nu|}} \gamma$$

を充すとす。そのとき

**Proposition 2**

$u(t,x)$ を

$$\begin{cases} \Pi[u] = f(t,x) & \\ (D_t^s u)(0,x) = 0 & 0 \leqq s \leqq l-1 \end{cases}$$

の解とする。

もし、

$$|D_x^\nu D_t^q f(t,x)| \leqq \frac{(r+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(l\gamma|t|)\, K(|t|)^{r+q+|\nu|} (l\gamma)^q A$$

が成立つならば

$$|D_x^{\nu} D_t^{q} u(t,x)|$$

$$\leq 2^{\ell} \frac{(\gamma-\ell+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(\ell\gamma|t|)\, K(|t|)^{\gamma+q+|\nu|} (\ell\gamma)^{q} A$$

ここで $K(|t|) = \exp(\ell\gamma|t|)(1+\ell\gamma|t|)$ 　　$\gamma \geq 27$.

$0 < \rho \leq \frac{1}{18}$

<u>Proposition 3</u>

$$\Pi[u] = 0$$

初期条件
$$\left\{ \begin{array}{l} |D_x^{\nu} u(0,x)| \leq \dfrac{(\gamma-\ell+1+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} A \\ \qquad \vdots \\ \left|D_x^{\nu} \dfrac{\partial^{\ell-1} u}{\partial t^{\ell-1}}(0,x)\right| \leq \dfrac{(\gamma+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} A \end{array} \right.$$

の解を $u(t,x)$ とするとき

$$|D_x^{\nu} D_t^{q} u(t,x)|$$

$$\leq 2^{\ell} \frac{(\gamma-\ell+1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(\ell\gamma|t|)\, K(|t|)^{\gamma+q+|\nu|} (\ell\gamma)^{q} A$$

これらの Proposition を利用して formal solution における $u_k^{(i)}$, $v_k^{(i)}$ を評価することが出来る。即ち

(5.1) $$|D_{x''}^{\nu} W(\text{[illegible]}\, x''\, \text{[illegible]})| \leq \frac{A}{\rho^{|\nu|}} (\gamma+|\nu|)!$$

$$\max_{|x''|\leq\rho} |W(x'')| = A$$

とする。そのとき

$$|D_{x'}^{\nu}\Delta_1(h,i,x')|,\quad |D_{x'}^{\nu}\Delta_2(h,i,x')|,\quad |D_{x'}^{\nu}\Delta_3(h,i,x)| \leqq \frac{|\nu|!}{(3\rho)^{|\nu|}} N$$

とすると

$$(P_k)\quad \begin{cases} |D_y^{\nu} D_t^{q}\, u^{(i)}_{-p+h+k-1}(t,y)| \\ \leqq A N B^{k+1} \dfrac{(r+k-1+|\nu|+q)!}{\rho^{|\nu|+q}} \exp(2\gamma|t|)\, K(|t|)^{r+k+|\nu|+q} (2\gamma)^{q} \\ \\ |D_y^{\nu} D_t^{q}\, v^{(i)}_{-p+h+k}(t,y)| \\ \leqq A N B^{k+1} \dfrac{(r+k+|\nu|+q)!}{\rho^{|\nu|+q}} \exp(\gamma|t|)\, K(|t|)^{r+k+|\nu|+q} (\gamma)^{q}. \end{cases}$$

$$(I_k)\quad \left.\begin{cases} |D_y^{\nu}\, u^{(i)}_{-p+h+k}(0,y)| \\ |D_y^{\nu}\, v^{(i)}_{-p+h+k}(0,y)| \\ \left|D_y^{\nu} \dfrac{\partial u^{(i)}_{-p+h+k-1}}{\partial t}(0,y)\right| \end{cases}\right\} \leqq B^{k+1} N A \frac{(r+k+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}}$$

が成立つ。ここで $B$ は微分作用素 $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ にのみ関係する定数で $k$ に独立である。

これは数学的帰納法により、Proposition 1, 2, 3 を使うことによって得られる。これから formal solution (4.2) の

の exactness が云へた。

<u>Remark</u>　特異点から出る characteristic surface がある場合については右論定理は成立しない。たとえば

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

のとき解 $u(x, y)$ は

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \log\left(\frac{\sqrt{y} + x}{\sqrt{y} - x}\right)$$

の如く有限多価性をもってくる。

---

## 文献

[1] A. Lax　On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics

Comm. Pure Appl. Math 9 (1956) 135～169

[2] D. Ludwig　Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem.　Comm Pure Appl Math 13 (1960) 473−508

[3] S. Mizohata Solutions nulles et solutions non analytiques J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962) 271–302

[4] S. Mizohata et Y. Ohya. Sur la condition de E.E. Levi Concernant des Équations Hyperboliques. Pbls. R.I.M.S., Kyoto Univ. Ser. A vol 4 1968 p 511–526

[5] S. Matsuura. On non-strict hyperbolicity. Proceeding of International Conference on Functional Analysis & Related Topics (1969) (to appear)

[6] C. D Hill Parabolic Equations in One Space Variable and the Non-Characteristic Cauchy Problem. Comm, Pure Appl Math 20 (1967) 619–633