数理解析研究所講究録
第89巻 1970年 6-28

概均質 vector 空間に付随する，Dirichlet 級数の一例。

東大 理数 新谷卓郎

§0 導入

まず Riemann の zeta 函数の函数等式の証明を復習しよう。$\varphi(X)$ を実軸上の急減少函数，$s \in \mathbb{C}$ として

$$Z_\varphi(s) = \int_0^\infty \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ x\neq 0}} \varphi(tx)\, t^s d^\times t$$

とおく。$\mathrm{Re}\, s > 1$ なるとき，上記積分は絶対収束して

$$\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)|x|^{s-1}dx$$

に等しい。一方 Poisson の和公式によれば，

$$Z_\varphi(s) = \int_1^\infty \sum_{0\neq x\in\mathbb{Z}} \varphi(tx)\, t^s d^\times t - \frac{1}{s}\varphi(0)$$

$$+ \int_1^\infty \sum_{0\neq x\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(tx)\, t^{1-s} d^\times t + \frac{1}{s-1}\hat{\varphi}(0)$$

$$\left(\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{2\pi\sqrt{-1}xy} dy \right)$$

なる等式が $\mathrm{Re}\, s > 1$ において成立する。従って $Z_\varphi(s)$ は $s = 0$，$s = 1$ に高々一位の極をもつ有理型函数に解析接続され，かつ函数等式

$$Z_{\hat{\varphi}}(1-s) = Z_\varphi(s)$$

を満足することがわかる。一方 $\mathrm{Re}\, s > 0$ において積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)|x|^{s-1}dx$$

は絶対収束するが，これも s の函数として全平面で有理形な函数に解析接続され，函数等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(x)|x|^{s-1}dx$$
$$=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)|x|^{-s}dx \qquad (\#)$$

を満足する。従って$\zeta(s)$を全平面で有理形な函数へ接続され、函数等式

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

を満足することがわかる。

すなわち$\zeta(s)$の函数等式の根拠はPoissonの和公式と変換則(#)であるということができる。佐藤幹夫氏は概均質vector空間の理論を建設して"正則概均質vector空間"Vの相対不変式の複素巾が(#)と類似の変換則を満足することを示し、V内の格子と相対不変式に対応するζ函数に類似の"distribution valued meromorphic function"を作ってその函数等式を証明された。筆者は以下の小文において特別な場合について概均質vector空間とその中の格子に普通の$\mathbb{C}$-valued Dirichlet級数を対応させることを試みた。すなわち§1において最も簡単な状況における概均質vector空間Vの理論の主結果を要約し、ついでVとその中の格子に付随す

る"Tate 型積分"を考察し，極めて強い仮定のもとに，それから函数等式を満足する Dirichlet 級数をとりだしうることを示した。§2においては実 Hermite 行列のなす vector space と，Gauss 整数を行列要素とする Hermite 行列のなす格子とについては §1の仮定が満足されることを示し次の結果を得た。

定理

$L^{(n)}$ を Gauss の整数を行列要素とする n 次 Hermite 行列の作る格子とし，$L^{(n)*}$ を，対角元がすべて偶数なるものよりなる $L^{(n)}$ の部分格子とする。

$m_i(l)$ を，Sylvester index が $(i,\ n-i)$ で行列式が $(-1)^{n-i}l$ なる L の元達のなす種達の"種の測度"の和であるとする。さすれば Dirichlet 級数

$$\xi_i^{(n)}(s)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{m_i(l)}{l^s}$$

$$\xi_i^{(n)*}(s)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{m_i^*(l)}{l^s}$$

（ $m_i^*(l)$ は $L^{(n)*}$ について $m_i(l)$ と同様に定義される）はともに $\mathrm{Re}\,s>n$ で絶対収束し，$s=1,2,--,n$ に高々一位の極をもつ

有理型函数に解析接続され、函数等式

$$\Xi_i^{(n)}(n-s)$$
$$= \pi^{-sn+\frac{n(n-1)}{2}}\Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-n+1)\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{n}(-1)^{(n-j)(n-1)}e^{\pi\sqrt{-1}s(\frac{n}{2}-i-j)}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{n-i}{j-k}e^{2\pi\sqrt{-1}ks}\times$$
$$\times\Xi_j^{(n)*}(s)$$

を満足する。$\prod_{k=1}^{n}(s-k)\Xi_i^{(n)}(s)$ は位数高々一の整函数である。なお $\Xi_i^{(n)}(s)$ の極における residue を explicit に計算できる。

§1 V を実数体上の vector 空間、G を $GL(n)$ 内の連結実線型代数群とする。V 内に代数的集合 S があって、$V-S$ 内の点を通る G の任意の orbit が V 内の開集合となっているとき、対 (G, V) を概均質 vector 空間とよび、S をその特異点集合という。以下 G の V への作用を

$$(g, x) \longrightarrow g\cdot x \quad (g\in G, \quad x\in V)$$

と書く。V の双対を V^* とし、G は V^* に反傾的に作用するとして、その作用を

$$(g, y) \longrightarrow {}^t g^{-1}\cdot y \quad (g\in G, \quad y\in V^*)$$

と書く。定義より、

$$\langle g\cdot x, {}^t g^{-1}\cdot y\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x\in V, y\in V^*)$$

である。V上の多項式Pは，Gの適当な有理指標χが存在して，$P(gx)=\chi(g)P(x)$　$(\forall g\in G, x\in V)$
が成立するとき，(G, V)の指標χの相対不変式とよばれる。以下(G, V^*)も概均質として，その特異点集合をS^*とする。V^*の相対不変式も同様に定義される。
以下V, V^*の相対不変式P, Qが存在して

$$P(gx)=\chi(g)P(x),\qquad Q({}^tg^{-1}\cdot y)=\chi^{-1}(g)Q(y)$$

であり，$x\in V-S$，$y\in V^*-S^*$なるとき，x, yの等方群をH_x，H_yとかけば，χは一次元torus $G/H_x[G,G]$，$G/H_y[G\ G]$の指標群の有限index の部分群を生成し，さらにPの Hessian は$V-S$で非退化であると仮定する。このとき
$V-S$，V^*-S^*は同数個の連結成分の和となり，各々の連結成分はGの1つのorbitとなっている。それらを
$V-S=\bigcup_{i=1}^{\ell}V_i$，$V^*-S^*=\bigcup_{i=1}^{\ell}V_i^*$とおこう。
P，Qの次数は等しい。それをdとする　いまd次の多項式　$b(s)$，$b^*(s)$を

$$Q(\mathrm{grad}_x)P^s(X)=b(s)P^{s-1}(X)$$
$$P(\mathrm{grad}_y)Q^s(Y)=b^*(s)Q^{s-1}(y)$$

として定義する。V，V^*の Euclid measure dx，dx^*を互いにdualであるように定める。すなわち$\varphi\in\mathcal{S}(V)$

(以下 Vにおける急減少函数の空間を $\mathcal{S}(V)$, V^*におけるそれを $\mathcal{S}(V^*)$とかく) とするとき

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x) e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \int_{V^*} \hat{\varphi}(y) e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} dy^*$$

であるとしよう。さすれば $\mathrm{Re}\, s > 0$で定義されるsの解析函数 $\int_{V_i} \varphi(x)|P(x)|^s dx$, $\int_{V_i^*} \varphi^*(x)|Q(x)|^s dx^*$ は, $\mathrm{Re}\, s$が十分大なるとき成立する等式

$$\int_{V_i} Q(\mathrm{grad}_x)\varphi(x)|P(x)|^s dx$$

$$= (-1)^d (\mathrm{sgn}_i P)\, b(s) \int_{V_i} \varphi(x)|P(x)|^{s-1} dx$$

$$\int_{V_i^*} P(\mathrm{grad}_y)\varphi^*(y)|Q(y)|^s dy^*$$

$$= (-1)^d (\mathrm{sgn}_i Q)\, b^*(s) \int_{V_i^*} \varphi^*(y)|Q(y)|^{s-1} d^*y$$

(φ, $\in \mathcal{S}(V)$, $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$とし

$\mathrm{sgn}_i P$はV_iにおけるPの符号を意味する)

を用いて全平面で有理型なる解析函数に接続される。(以上を通じて, P, QはV, V^*で実数値をとると仮定されている)。以上の状況のもとで次の定理が成立する。

定理A (M. Sato)

φを $\mathcal{S}(V)$の元とする時, 次の変換公式が成立する。

$$b(s) = b_0 \prod_{i=1}^{d} (s - s_i) \qquad d(gx) = |\chi(g)|^{r} dx$$

とすれば $\left(r = \dfrac{n}{d} \right.$ である $)$

$$\int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-r} \hat{\varphi}(y)\, dy^*$$

$$= b_0^{s} (2\pi)^{-ds} (\sqrt{-1})^{ds} \prod_{k=1}^{d} \Gamma(s + s_k) \times$$

$$\times \sum C_{ij}(s) (\mathrm{sgn}_i Q\ \mathrm{sgn}_j P)^{-s} \int_{V_j} |P(x)|^{-s} \varphi(x)\, dx$$

($C_{ij}(s)$ は $e^{2\pi\sqrt{-1}s}$, $e^{-2\pi\sqrt{-1}s}$ のある多項式)。

以下LをV内の格子とし, L^*をLの双対格子とする。すなわち

$$L^* = \{ y \in V^*,\ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \quad \text{for } \forall x \in L \}.$$

いま $L' = L - (L \cap S)$, $L'^* = L^* - (L^* \cap S^*)$ とおき, ΓをLを不変にするGの離散的部分群として次の"Tate型積分"を考える。すなわち $\varphi \in \mathcal{S}(V)$, $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$, $s \in \mathbb{C}$ なるとき

$$Z_{\varphi}^{L}(s) = \int_{G/\Gamma} |\chi(g)|^{s} \sum_{x \in L'} \varphi(gx)\, dg$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \int_{G/\Gamma} |\chi^{-1}(g)|^{s} \sum_{y \in L^{*\prime}} \varphi^*({}^t g^{-1} y)\, dg$$

ただし dg は G (unimodular とする) の不変測度である。LあるいはL^*の二元 x_1, x_2 がΓの作用でたがいにうつり得るとき, 両者は同値であるという。

$x_1 \sim x_2$ とかく。$L \cap V_i$ の諸元の同値類の代表系を $\{x_i(\nu) \quad \nu = 1, 2, \cdots \}$,
$L^* \cap V_i^*$ の同値類の代表系を
$\{y_i^*(\nu) \quad \nu = 1, 2, \cdots \}$
とかく。G, Γ の部分群 $H_{i,\nu}, \Gamma_{i,\nu}$ を次の如く定義する。

$H_{i,\nu} = \{ g \in G, \quad g \cdot x_i(\nu) = x_i(\nu) \}$

$\Gamma_{i,\nu} = \Gamma \cap H_{i,\nu}$

$G/H_{i,\nu}$ は写像 $g \in G/H_{i,\nu} \longrightarrow g \cdot x_i(\nu)$ によって V_i と同一視される。測度 $|P(x)|^{-n} dx$ が、(n は定理Aで定義された) V_i の G 不変測度であることに注意して、$H_{i\nu}$ の左不変測度 $dh_{i\nu}$ を、$dg = |P(g \cdot x_i(\nu))|^{-n} d(g \cdot x_i(\nu))\, dh_{i,\nu}$ なるように定め、

$$m(x_i(\nu)) = \int_{H_{i\nu}/\Gamma_{i\nu}} dh_{i\nu}$$ と定義する。

$H_{i\nu}^*$, $\Gamma_{i,\nu}^*$ $m(y_i^*(\nu))$ も同様に定義される。いま次の仮定を"仮定I"とよぼう。

仮定I　Dirichlet 級数

$$\xi_i(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(x_i(\nu))}{|P(x_i(\nu))|^s}$$

$$\xi_i^*(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(y_i^*(\nu))}{|Q(y_i^*(\nu))|^s}$$

は $\mathrm{Re}\, s$ が十分大なるとき絶対収束する。

命題 1. 仮定 I が成立するならば、$Z_\varphi^L(s)$, $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ を定義する積分は $\mathrm{Re}\, s$ が十分大なるとき絶対収束し、等式

$$Z_\varphi^L(s) = \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s) \int_{V_i} |P(x)|^{s-n} \varphi(x)\, dx$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \sum_{i=1}^{l} \xi_i^*(s) \int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-n} \varphi^*(y)\, dy^*$$

が成立する。

一方 Poisson の和公式によって Z_φ^L, $Z_{\varphi^*}^{L^*}$ は次の如く変形される。

$$\begin{aligned} Z_\varphi^L(s) = &\int_{\substack{|\chi(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{s} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x)\, dg \\ &+ c_L \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{n-s} \sum_{y \in L^*} \hat{\varphi}({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg \\ &- \int_{\substack{|\chi(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{s} \Big\{ \sum_{x \in L \cap S} \varphi(g \cdot x) \\ &\qquad - c_L \sum_{y \in L^* \cap S^*} \hat{\varphi}({}^t g^{-1} \cdot y) |\chi(g)|^{-n} \Big\}\, dg \end{aligned}$$

ただし $\quad \dfrac{1}{c_L} = \displaystyle\int_{V/L} dx$

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle}\, dx$$

$$Z^{L^*}_{\varphi^*}(s)$$
$$= \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \geqq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{s} \sum_{y \in L^{*\prime}} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg$$
$$+ C_{L^*} \int_{\substack{|\chi(g)| \geqq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{2-s} \sum_{x \in L'} \hat{\varphi}^*(g \cdot x)\, dg$$
$$- \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \leqq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{s} \Big\{ \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y) - C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g \cdot x) |\chi^{-1}(g)|^{-1} \Big\}\, dg$$

ただし $\dfrac{1}{C_{L^*}} = \displaystyle\int_{V^*/L^*} dx^*$, $\hat{\varphi}^*(x) = \displaystyle\int_{V^*} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} \varphi^*(y)\, dy$ 。

よって

$$W^{L}_{\varphi}(s) = \int_{\substack{|\chi(g)| \geqq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{s} \sum_{x \in L'} \varphi(g \cdot x)\, dg$$
$$+ C_{L} \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \geqq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{2-s} \sum_{y \in L^{*\prime}} \hat{\varphi}({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg$$

$$X^{L}_{\varphi}(s) = \int_{\substack{|\chi(g)| \leqq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{s} \Big(C_L \sum_{y \in L^* \cap S^*} \hat{\varphi}({}^t g^{-1} \cdot y) |\chi(g)|^{-2} - \sum_{x \in L \cap S} \varphi(g \cdot x) \Big)\, dg$$

$$X^{L^*}_{\varphi^*}(s) = \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \leqq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{s} \Big(C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g \cdot x) |\chi^{-1}(g)|^{-2} - \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y) \Big)\, dg$$

とおけば、仮定 I が成立するとき、$W^{L}_{\varphi}(s)$ は s の整函数であり、$X^{L}_{\varphi}(s)$, $X^{L^*}_{\varphi^*}(s)$ は $Re\, s$ が十分大なるとき、s の正則函数で、

等式 $$Z_{\varphi}^{L}(s)=W_{\varphi}^{L}(s)+X_{\varphi}^{L}(s)$$
$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)=C_{L^*}W_{\varphi^*}^{L}(n-s)+X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$$
が成立する。いま次の仮定を"仮定II"とよぶことにしよう。

仮定II $X_{\varphi}^{L}(s)$, $X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ はともに, s の全平面で有理型な解析函数に接続され, 等式 $X_{\varphi^*}^{L^*}(s)=C_{L^*}X_{\varphi^*}^{L}(n-s)$ が成立する。

仮定I, 仮定IIが成立するならば, $Z_{\varphi}^{L}(s)$, $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ はともに s の有理型函数に解析接続され, 函数等式

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)=C_{L^*}Z_{\varphi^*}^{L}(n-s)$$

を満足する。よって定理Aと命題1とをあわせて次の命題をうる。

命題 2

仮定I, 仮定II がともに満足されているならば, $\Xi_i(s)$, $\Xi_i^*(s)$, $(i=1,2,--,l)$ は全平面で有理型な解析函数に解析接続され, 函数等式

$$\Xi_i(n-s)=C_L b_0^{s}(2\pi)^{-ds}(\sqrt{-1})^{ds}\prod_{k=1}^{d}\Gamma(s+s_k)\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{l}(sgn_i P\, sgn_j Q)^{s}C_{ji}(s)\Xi_j^*(s)。$$

(記号については定理 A を参照)を満足する。

いま仮定 I が満足されているとして、仮定 II が成立するための一つの十分条件を与えよう。
いま $G_1 = \{ g \in G ; \ \chi(g) = 1 \}$ とする。

仮定 II_1'

任意の $\varphi \in \mathcal{S}(V)$, $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対して
積分 $\displaystyle\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x)\,dg$, $\displaystyle\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi^*({}^t g^{-1} y)\,dg$

は絶対収束する。

仮定 II_2'

S, S^* はともに有限個の G_1-orbit(それぞれ $S_1, \cdots, S_m$; $S_1^*, \cdots S_{m^*}^*$ とする)の和となり、各々の orbit は G_1 の作用で不変な測度をもち(それぞれ $\mu_1, \cdots, \mu_m$; $\mu_1^*, \cdots, \mu_{m^*}^*$ とする)さらにそれら不変測度は次の性質をもつとする。

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(V)$, $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対して

$$\int_{S_i} \varphi(g \cdot x)\,d\mu_i(x) = |\chi(g)|^{-\lambda_i} \int_{S_i} \varphi(x)\,d\mu_i(x)$$

$$\int_{S_i^*} \varphi^*({}^t g^{-1}\cdot y)\, d\mu_i^*(y) = |\chi^{-1}(g)|^{r_i^*} \int_{S_i^*} \varphi^*(y)\, d\mu_i^*(y)$$

（$\forall g \in G$； r_i, r_i^* は定数 ）。

いま仮定 II_1', II_2' が満足されているとして $L \cap S_i$ の Γ − 同値類の代表系を $z_i(\mu)$ ($\mu=1,2,\cdots$) $L^* \cap S_i^*$ の Γ − 同値類の代表系を $z_i^*(\mu)$ ($\mu=1,2,\cdots$) としよう。

$H_{z_i(\mu)}$ を $z_i(\mu)$ の等方群とし，$\Gamma_{z_i(\mu)} = \Gamma \cap H_{z_i(\mu)}$ とおく，G_1，$H_{z_i(\mu)}$ の不変測度 dg_1，$dh_{z_i(\mu)}$ をそれぞれ，

$$dg = d^\times|\chi(g)|\, dg_1$$

$$dg_1 = d\mu_i(g_1 \cdot z_i(\mu))\, dh_{z_i(\mu)}$$

なるように定め

$$\sigma_{z_i(\mu)} = \int_{H_{z_i(\mu)}/\Gamma_{z_i(\mu)}} dh_{z_i(\mu)}$$

とおく。

$\sigma_{z_i^*(\mu)}$ も同様に定義する。

仮定 II_1'，II_2' が満足されているならば，$\sigma_{z_i(\mu)}$，$\sigma_{z_i^*(\mu)}$ はともに有限で，$X_\Phi^L(s)$，$X_{\Phi^*}^{L^*}(s)$ を定義する積分と和とは順序を交換することができ，初等的変形ののち，$\mathrm{Re}\, s$ が十分大なるとき次式の成立することが証明できる。

$$\chi^{L}_{\varphi}(s)$$
$$= C_L \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{s-n+n_i^*}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu))\right) \int_{S_i^*} \hat{\varphi}(y)\,d\mu_i^*(y)$$
$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-n_i}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu))\right) \int_{S_i} \varphi(x)\,d\mu_i(x)$$

$$\chi^{L^*}_{\varphi^*}(s)$$
$$= C_{L^*} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-n+n_i}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu))\right) \int_{S_i} \hat{\varphi}^*(x)\,d\mu_i(x)$$
$$- \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{s-n_i^*}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu))\right) \int_{S_i^*} \varphi^*(y)\,d\mu_i^*(y)\text{。}$$

(仮定 II_1' によって上式右辺の積分と級数は絶対収束する)

従って次の命題を得る。

命題 3 仮定 I, 仮定 II_1', II_2' が成立しているなら仮定 II が成立している。

(注意 仮定 II_1' が成立しておらず, 仮定 II の成立している例はある)

§2

以下 $V = V^{(n)}$ を n 次の Hermite 行列のなす vector 空間とし, $G = G^{(n)} = GL(n, \mathbb{C})$ とする。G の V への作用は, $g \cdot x = g x \bar{g}'$ である。

V とその双対を内積 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr} xy$ によって

以後同一視する。さすれば ${}^t g^{-1}\cdot x = \bar{g}^{-1} x \bar{g}^{-1}$ である。
Vの測度dxを

$$dx = K_n \prod_{i<j} d\,\mathrm{Re}\,x_{ij}\; d\,\mathrm{Im}\,x_{ij} \prod_i dx_{ii}$$

$$(\,K_n = 2^{-\frac{n}{2}}\,,\quad x = (x_{ij})\,)$$

と定める。さすれば Fourier 反転公式は下図の如くなる。

$$\hat{\varphi}(y) = \int \varphi(x)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x,\, y\rangle} dx$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \int \hat{\varphi}(y)\, e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle x,\, y\rangle} dy \quad .$$

$L = L^{(n)}$を行列要素がすべてGaussの整数となるVの元のなす格子とし，$\Gamma = \Gamma^{(n)} = GL(n,\ \mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$とする。$L$は$\Gamma$の作用で不変で，$L$の双対格子$L^*$は$L$の元で対角要素がすべて偶数なるもののなす部分格子である。

$\chi(g) = |\det g|^2$，$P(x) = Q(x) = \det x$
とおけば，

$$P(g\cdot x) = \chi(g)\, P(x)$$

$$Q({}^t g^{-1}\cdot y) = \chi^{-1}(g)\, Q(y) \quad \text{である。}$$

また $d(g\cdot x) = \chi(g)^n dx$ であり従って前節のnはいまの場合nに等しい。
$S = S^* = \{x \in V,\ \det x = 0\}$，とおき，
V_iを正の固有値i個，負の固有値$n-i$個を有するVの元のなす集合とすれば，

$V-S = V^*-S^* = \bigcup_{i=0}^{n} V_i$ で V_i は G の1つの orbit である。前節定理Aは、この特別な場合は、次のようになる。

定理 A′　いま

$$t_{ij}(s) = (-1)^{(n-i)(n-1)} e^{\pi\sqrt{-1}s\left(\frac{n}{2}-i-j\right)} \sum_{k=0}^{i} \binom{j}{k}\binom{n-j}{i-k} e^{2\pi\sqrt{-1}ks}$$

とおけば、

$$\int_{V_i} \Phi(x)\,|\det x|^{s-n}\,dx$$

$$= K_n \pi^{-sn+\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-n+1) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n} t_{ij}(s) \int_{V_j} \varphi(x)\,|\det x|^{-s}\,dx$$

[証明]

定理Aより、φ の台は $\det x \det\begin{pmatrix} x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdots x_{nn}=0$ なる集合と交わらない compact set であるとして証明すれば十分である。いま

$$B_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ z_{ij} & & 1 \end{pmatrix} ;\ \begin{matrix} t_1, \cdots, t_n > 0 \\ z_{ij} \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}$$

とおけば、V は B_+ の作用に関してすでに概均質で、測度0の集合を無視すれば、

$$V_i = \bigcup_{(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)} B_+ \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{である。}$$

(ただし $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n = \pm 1$, $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 2i-n$)

いま B_+ の left Haar measure db_+ を

$$db_+ = d^\times t_1 \cdots d^\times t_n \prod_{i>j} d\,\mathrm{Re}\,z_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\,z_{ij}$$

で定義すれば、

$$\int_{V_i} \hat{\varphi}\, |\det x|^{s-n} dx$$

$$= 2^n \cdot K_n \int_{B_+} \sum_{(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)} \int \varphi(y)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle y,\, b_+ \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \rangle} dy\, (t_1 \cdots t_n)^{2s} db_+$$

である。ここで積分の順序を交換すれば（その際多少注意を要する）初等的計算で定理の結果を得る。

以下仮定Ⅰが成立していることを検証する。Hermite型式の理論によって l を自然数とするとき、$\det x = (-1)^{n-i} l$ なる $L_{(i)} = L \cap V_i$ の元の全体は有限個の Γ－orbitの和となる。各軌道から一つずつ元をとってそれらを、

$x_1^{(i)}(l), \ \cdots, \ x_{h(l)}^{(i)}(l)$ とし、それらのうち L^* に属するものを

$x_1^{(i)*}(l), \ \cdots, \ x_{h^*(l)}^{(i)}(l)$ としよう。

さすれば $\bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{h(l)} x_k^{(i)}(l)$, $\bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{h^*(l)} x_k^{(i)*}(l)$ はそれぞれ、L, L^* の Γ－同値類の代表系である。§1に従って $\Gamma(x_k^{(i)}(l))$, $m(x_k^{(i)}(l))$, $\Gamma^*(x_k^{(i)*}(l))$, $m^*(x_k^{(i)}(l))$ を定義する。

以下 G の不変測度 dg を，$i=0, \ldots, n$ なるとき，$m(x_k^{(i)}(l))$ が有限群 $\Gamma(x_k^{(i)}(l))$ の位数の逆数と等しくなるように正規化する（可能である）。このとき $\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))$，

は行列式 $(-1)^{n-i} l$ なる $L \cap V_i$ の元のなす種達の種の測度の和に等しい。$\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))$ についても同様のことがいえる。従って Hermite 型式の理論により，それらの $l \longrightarrow +\infty$ のときの増大度は l の適当な巾乗でおさえられることがしられる。よって Dirichlet 級数

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))}{l^s} = \xi_i^{(n)}(s)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))}{l^s} = \xi_i^{(n)*}(s)$$

は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大なるとき絶対収束する。すなわち仮定 I が成立している。なお正規化された dg は具体的には次のように記述される。いま e_{ij} を i 行 j 列成分が 1 で，他は 0 なる $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の元とし，ω_{ij}，ω'_{ij} をそれぞれ e_{ij}，$\sqrt{-1}\,e_{ij}$ と双対な G 上の左不変微分形式とするとき

$$\int f(g)\,dg = C_n \int f(g) \prod_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega'_{ij}$$

$$\left(C_n = K_n \pi^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \Gamma(k) \right)$$

なお　後に用いられる定数 δ_n を次のように定義する。

$$\delta_n = \int_{G_1^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \prod_{i \neq j} d\omega_{ij}\, d\omega'_{ij} \prod d\omega'_{ii} \prod_{1 \le i \le n} d\omega_{ii}$$

（$G_1^{(n)}$ の定義は下に与えられている）

次に仮定 II_1, II_2 が成立していることを検証する。Weil の論文 "La Formule de Siegel et les groupes classiques" (Acta 1965) 20頁の Lemma 5 によれば　今の場合

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x)\, dg \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(V))$$

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg$$

がともに絶対収束することがわかる。よって仮定 II_1 は成立している。

$(G_1 = G_1^{(n)} = \{ g \in G, \ |\det g| = 1 \})$

$V^{(n,r)}$ で rank r の Hermite 行列のなす V の部分集合，$V_i^{(n,r)}$ で正の固有値を i 個，負の固有値を $r-i$ 個もつ元よりなる $V^{(n,r)}$ の部分集合を表わすことにすれば，$V_i^{(n,r)}$ は G_1 の1つの orbit で

$S = \bigcup_{r=0}^{n-1} \bigcup_{i=0}^{r} V_i^{(n,r)}$ である。

$V^{(n,r)}$ の測度 $d\mu^{(n,r)}$ を次の如く定めれば，それは G_1 の作用で不変である。

$r > 0$ なら $V^{(n,r)} \ni x = (x_{ij})$ なるとき

$$d\mu^{(n,r)} = \left| \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{r1} & \cdots & x_{rr} \end{pmatrix} \right|^{r-n} K_r \prod_{\substack{i>j \\ j\le r}} d\,\mathrm{Re}\, x_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, x_{ij} \times \prod_{k\le i\le r} dx_{ii}$$

$r = 0$ ならば

$$d\mu^{(n,r)} = \delta(0)$$

そして

$$\int_{V_i^{(n,r)}} \varphi(g\cdot x)\, d\mu^{(n,r)} = |\chi(g)|^{r} \int_{V^{(n,r)}} \varphi(x)\, d\mu^{(n,r)}$$

$$(\ \varphi \in \mathcal{S}(V)\ ,\ g \in G\ )$$

である。よって仮定 II_2' が成立していることがわかる。

$L \cap V_i^{(n,r)}$ の Γ 同値類の代表系として $\left\{ \begin{pmatrix} x_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x_r : L^{(r)} \cap V_i^{(r)} \text{ の } \Gamma^{(r)} \text{ 同値類の代表系} \right\}$ をとることができることに注意すれば，$X_{\varphi}^{L}(s)$，$X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ は前節よりさらに具体的に次の如く表示されることがわかる。

$$\chi^{L}_{\varphi}(s)$$
$$= C_L \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2n^2+2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)*}(n) \times$$
$$\times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x)\, d\mu^{(n,r)}(x)$$
$$- \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)}(n) \times$$
$$\times \int_{V_i^{(n,r)}} \varphi(x)\, d\mu^{(n,r)}(x)$$

$$\chi^{L^*}_{\varphi^*}(s) \qquad (\#)$$
$$= C_L^* \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2n^2+2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)}(n) \times$$
$$\times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}^*(x)\, d\mu^{(n,r)}(x)$$
$$- \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)*}(n) \times$$
$$\times \int V_{(i)}^{(n,r)} \varphi^*(y)\, d\mu^{(n,r)}(y)$$
。

（いまの場合 $C_L = 2^{\frac{n}{2}}$　$C_L^* = 2^{-\frac{n}{2}}$

また t_k は前々頁で定義された数

また $C_0 = 1$ とおく　）

最後に$\xi_i^{(n)}(s)$, $\xi_i^{(n)*}(s)$の極における留数を計算する。
いまφの台がcompactでV_iに含まれているとする。さすれば

$$\xi_i^{(n)}(s)\int_{V_i}\varphi(x)|\det x|^{s-n}dx$$

$$=W_\varphi^i(s)+C_L\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{2ns-2n^2+2rn}\frac{C_n}{C_r}\gamma_{n-r}\times\xi_i^{(r)*}(n)$$

$$\times\int_{V_i^{(n,r)}}\hat{\varphi}(x)\,d\mu^{(n,r)}(X)\qquad(4)$$

である。

$W_\varphi^i(s)$, $\int_{V_i}\varphi(x)|\det X|^{s-n}dx$ は, φに関する仮定からともにexponential typeの整函数である。従って$\prod_{r=0}^{n-1}(s-n+r)\times$ $\times\,\xi_i^{(n)}(s)$ はexponential typeの整函数の比として表示される整函数で, その位数は1を超えない。(Titchmarsh Theory of Functions の255頁をみよ) さらに定理A'の証明と同じ方法で次の命題が証明される。

命題　φの台がcompactで，$V-S$内に含まれるならば，

$$\int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x)\, d\mu^{(n,r)}(x)$$

$$= K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r)\Gamma(r-1)\cdots\Gamma(1) \times$$

$$\times (\sqrt{-1})^{rn}(-1)^{(r-i)(n+r+1)}\binom{r}{i} \times$$

$$\times \int_V \varphi(x)(\det x)^{-r} dx$$

この命題と前頁(4)より

$\xi_i^{(n)}(s)$の$s=n-r$における留数は

$$(-1)^{(n-i)r} C_L \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} a_{n-r} K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r)\cdots\Gamma(1) \times$$

$$\times (\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \xi_j^{(r)*}(n)$$

である。

同様にて$\xi_i^{(n)*}(s)$の$s=n-r$におけるresidueは

$$(-1)^{(n-i)r} C_{L^*} \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} a_{n-r} K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r)\cdots\Gamma(1) \times$$

$$\times (\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \xi_j^{(r)}(n)$$

である。

以上で冒頭の定理は証明された。