数理解析研究所講究録
第 89 巻 1970 年 36-43

ある種のゼータ関数について

津田塾大　片山孝次

1. ここで用いるprincipleは，ある対称空間を他の対称空間に埋め込み，それをはじめの空間にひきもどすことである。

ここでは，群 $G = SL(2, \mathbb{R})$ の ν 次の対称テンソル表現をとりあげる。ν が奇数であるとき，この表現により，上半平面 H から，$\frac{\nu+1}{2}$ 次のジーゲル上半空間 $\widetilde{H}$ への非解析的な埋め込みがもたらされる。このとき，$\widehat{H}$ 上のテータ関数を H 上にひきもどして，非解析的な'テータ関数'を定義する。そのメリン変換によりゼータ関数を定義し，その性質を考察する。

ν が偶数のときは，ある不定符号2次形式にattachするリーマン空間への埋め込みがもたらされる。

2. $G \ni \sigma \longrightarrow M_\nu(\sigma) \in GL(\nu+1, \mathbb{R})$ を ν 次の対称テンソル表現とする。このとき，すべての $\sigma \in G$ に対して $M_\nu(\sigma)$ は，ある整係数正則行列 A_ν を不変にする。ν が奇数ならば A_ν は交代行列，ν が偶数ならば A_ν は対称行列である。

νを奇数とする。(以下添字νは省略する。) Aは交代行列であるから、ユニモヂュラー行列Uによる変換で

$$L = \begin{pmatrix} & T \\ -T & \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \quad n = \frac{\nu+1}{2},$$

$$0 < t_1 \mid t_2 \mid \cdots \mid t_n, \qquad t_i \in \mathbb{Z}$$

の形になる。$\widetilde{G}(T) = \{\Psi \in GL(\nu+1, \mathbb{R})\,;\, {}^t\Psi L \Psi = L\}$ とおく。$\widetilde{G} = G(I)$ とかく。$\Psi \in \widetilde{G}(T)$ をとり

$$\mathbb{M}_\Psi(\sigma) = \Psi U^{-1} M(\sigma) U \Psi^{-1},$$

$$\mathbb{N}_\Psi(\sigma) = \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathbb{M}_\Psi(\sigma) \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

とおけば

$$\mathbb{M}_\Psi : G \longrightarrow \widetilde{G}(T), \qquad \mathbb{N}_\Psi : G \longrightarrow \widetilde{G}$$

の homomorphisms である。KをGの極大コンパクト群とし$\widetilde{K}_\Psi \supset \mathbb{N}_\Psi(K)$となる$\widetilde{G}$の極大コンパクト群$\widetilde{K}_\Psi$をとれば、それぞれ$G, \widetilde{G}$を$K, \widetilde{K}_\Psi$で割ることにより$\mathbb{N}_\Psi$から$H \longrightarrow \widetilde{H}$の埋め込みがひきおこされる。実際にその埋め込み$\varphi_\Psi$を定めるには、$\widetilde{K}_\Psi$の$\widetilde{H}$上での固定点$Z_\Psi$を定め、$Z = \tau[\sqrt{-1}]$, $\tau \in G$, に対し

$$\varphi_\Psi(Z) = \mathbb{N}_\Psi(\tau)[Z_\Psi]$$

とおけばよい。ここで2つの大小 [ ] はそれぞれの次数の空間での一次分数変換を示す。以上を図に示せば左の通りである。

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "N_\psi"] \arrow[d, "\sqrt{-1}\text{に作用}"] & \tilde{G} \arrow[d, "Z_\psi\text{に作用}"] \\
H \arrow[r, "\varphi_\psi"'] & \tilde{H}
\end{tikzcd}
$$

たとえば $\nu=3$, $z=x+\sqrt{-1}y$, $\psi=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$ とするとき、

$$\varphi_\psi(z)={}^t\delta^{-1}\left(\sqrt{-1}\begin{pmatrix}3y, & -3xy\\ -3xy, & 3x^2y+y^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6x, & 3x^2\\ 3x^2 & -2x^3\end{pmatrix}\right)\delta^{-1}+\beta\delta^{-1}$$

である。これは形からみて非解析的である。上式で、$\varphi_\nu(z)$ は x, y に関して $\nu=3$ 次であること、第2括弧の行列には y があらわれていないこと、また $x=0$ のとき、第1括弧の行列は対角型になることに注意する。この事実は、ψ が $\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix}$ の形であるとき一般の ν (odd) に対しても成立する。すなわち一般に埋め込み φ_ψ は非解析的、$\varphi_\nu(z)$ は x, y に関して ν 次、$\mathrm{Re}\,\varphi_\psi(z)$ には y があらわれず、また $\varphi_\psi(y\sqrt{-1})$ の"主要部"(つまり $\beta\delta^{-1}$ をのぞいた部分)は対角型である。

3. Stufe T, Characteristic g, f であるテータ級数を

$\theta(g, f; Z)$, $Z \in \hat{H}$, とする. すなわち

$$\theta(g, f; Z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i \left(Z[m + T^{-1}g] + 2\,{}^t(m + T^{-1}g) f \right)}$$

である。ここで [ ] はジーゲルの記号である。$t = \det T$ とし ℓ_k, $k = 1, \cdots t$, を $\bmod T$ での整数ベクトルとする.

今次のベクトル

$$\Theta(g, f; Z) = \begin{pmatrix} \theta(g + \ell_1, f; Z) \\ \vdots \\ \theta(g + \ell_t, f; Z) \end{pmatrix}$$

を考える. さらに $z \in H$ に対し

$$F_\psi(g, f; z) = \Theta(g, f; \varphi_\psi(z))$$

とおく。この Θ の変換公式はよく知られており, (Siegel [2]), それから F_ψ の変換公式をみちびくことができる. このとき次の予想を立てることができる.

(I) $\psi = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形のとき, 変換の'保型'因子として $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し

$$(c z_{(\nu)} + d)^{\frac{\nu - 1}{4}} \, (c \overline{z_{(\nu)}} + d)^{\frac{\nu^2 + 3}{8}}$$

があらわれる．ここで

$$
\begin{aligned}
z_{(\nu)} &= z & \nu &\equiv 3 \pmod 4 \\
&= \bar{z} & \nu &\equiv 1 \pmod 4
\end{aligned}
$$

（ただしもちろん $\mathbb{M}_{\psi}(\sigma) \in \widetilde{G(T)}_{\mathbb{Z}}$ と仮定する。）

これが ψ に独立であることに注意されたい．(I) は $\nu = 3, 5$ のとき直接計算して証明することができる。

4. われわれは'ゼータ関数'を．

$$\zeta(g, f; s; \psi) = \int_0^\infty \left(F_\psi(g, f; \sqrt{-1}y) - P(T, y) \right) y^{s-1} dy$$

で定義する．$P(T, y)$ は t 次のベクトルで，F_ψ の定数項をとりのぞくためのものである。（それは T, y に関係する。）

以下 ψ は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形であるとする．このときつぎを証明することができる。

(II) ζ の積分は $\mathrm{Re}\, s > \frac{\nu(\nu+1)}{4}$ で絶対一様収束である。

(III) 変換 $s \longrightarrow \frac{(\nu+1)^2}{8} - s$ に関するある種の関数等式をみたす．

(IV) $P(T, y)$ に depend して，ζ の全 s-平面における解析性が定まる．

ζ の'ディリクレ級数表示'については次の予想をたてよ

う.

(V) ζ の第1成分を $\zeta(g, f; s, \psi)$ とすると．ζ は次の形であらわされる．

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} l_\psi\left((m_n)^2\right)^{-\frac{s}{\nu}} \sum_{i<\infty} \gamma_i(s)\, Q_i\left(s, x(m)\right).$$

ここで Q_i は一般化された Appell-Pochhammer の超幾何級数（$n-1$ 変数の），$m=(m_1, m_2, \cdots, m_n)$，$l_\psi$ は一次式を示し，$x(m)$ は m の成分に関する，あるかんたんな関数である．

(V) は $\nu=3$ に対して，もっと強い形で証明できる．すなわち $\nu=3$ のときは Pochhammer 関数がでるが，それが3次の線型微分方程式をみたすことはわかっている．上記級数表示において，Q_i としては，丁度3つの基本解があらわれるのである．

つぎにオイラー積表示については，ψ にある種の整数条件をつけるとき，ふつうの形の（つまりリーマン形）のオイラー積が，ある lattice 上をうごく変数を含んであらわれ，その lattice 上を走る無限級数の形になることが，$\nu=3$ の場合に証明できる．$\nu\geq 5$ については予想であるが，正確にそれを書き表わすのは相当面倒なので，ただ上の事実を表明する

にとどめたい。

5. νが偶数のとき A は不定符号対称行列で，その sign は $\left(\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ または $\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+2}{2}\right)$ である．このときは $\widehat{G}$ を A の直交群とし，G の極大コンパクト群 K の像 $M(K)$ を含む $\widehat{G}$ の極大コンパクト群 $\widehat{K}$ をとれば，やはりある ことによって，M から $H \longrightarrow \widehat{G}/\widehat{K}$ の埋め込みがひきおこされる．このとき，ジーゲルの扱った（Siegel [1]）不定符号2次形式に attach するテータ関数を用いて，$H \times H$ 上の'double modular 関数'といったものを定義することができる．この関数について，いろいろおもしろいことがあるのだが，まだきちんと報告する段階に至っていない。

6. いずれにしても以上の考察はほんの序の口であり，何か背後に"非解析的整数論"のあたらしいものが横たわっているように思われる。

1つの失敗例として。φ_ψ の次数は $\nu=3$ のとき3次である．したがって何か3次剰余記号に関する結果が出そうであるが，これは少くとも"素直な方法"では駄目である．実はこのことが上の考察の1つの動機であったのであるが。

文献

[1] C.L. Siegel : Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie.

I. Math. Ann. 124 (1951) 17—54

II Math. Ann 124 (1952) 364—387

またはI、IIともにWerke IIIにのっている。

[2]. C.L. Siegel : Moduln Abelscher Funktionen

Göttingen Nachr. 1960 Nr. 25, 365—427

またはWerke IIIにのっている。