数理解析研究所講究録
第89巻1970年47-50

Fourier変換と相互法則に関する2,3の注意

名大理　久保田富雄

Fourier変換と相互法則との関係は，平方剰余の場合について古来有名であり，その際 e^{-x^2} という関数が重要な役割りをすることが特に興味深いが，それと類似の現象は，高次の相互法則についても存在するはずであり，それが単に相互法則という1定理だけでなく，他の多くのことと関係するらしいことが，種々の根拠から推測される．ところで，この方向における本質的な発展を得るためには，数論の側からでなく，解析の側から問題に立ち向かい得る手段を見出すことがどうしても必要である．

この講演の目的は，以下仮に n 次のFourier変換とよぶものが，上にいうような問題に応用し得るらしいことを，特殊な例を通じて示すことにある．

H を $u=\begin{pmatrix} z & -v \\ v & \bar{z}\end{pmatrix}$，$(z\in\mathbb{C},\ v>0)$ の形の行列の集合とし，u をまた (z,v) とも書く．H はいわゆる上半空間であり，$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ について，$\sigma u=(\tilde{a}u+\tilde{b})(\tilde{c}u+\tilde{d})$，（但し $w\in\mathbb{C}$ について $\tilde{w}=\begin{pmatrix} w & \\ & \bar{w}\end{pmatrix}$），とおけば，$H=SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ である．一方 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ をGauss体，$\mathfrak{o}=\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ をその整

数環とする. $z \in \mathbb{C}$ について $e(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(z+\bar{z}))$ とおくと, $e(z/2)$ について $\mathfrak{O}$ は self-dual である.

$f = f(u)$ を H 上の関数とするとき, n 次の Fourier 変換 $\mathcal{F}_n$: $\mathcal{F}_n f = g$ とは, 次の積分によって $f(u)$ に $g(u)$ を対応させる1次変換をいう:

$$(\mathcal{F}_n) \qquad \int_{\mathbb{C}} f(t^{\frac{n}{n-1}}u)e(tw/2)dV(t) = |u|^{-\frac{2(n-1)}{n}} g(w^{\frac{n}{n-1}}u^*).$$

こゝで $u=(z, v)$ のとき $tu=(tz, |t|v)$ であり, $|u| = (z^2+v^2)^{1/2}$, $u^* = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}u$ である. $\mathcal{F}_n$ の逆はそれ自身である. $n=2$ のとき, $f(u) = \exp(\pi\sqrt{-1}(z+\bar{z})/2 - \pi v)$ とおけば, $\mathcal{F}_2 f = f$ であり, Poisson の公式から $\sum_{\nu\in\mathfrak{O}} f(\nu^2 u) = |u|^{-1}\sum_{\nu\in\mathfrak{O}} f(\nu^2 u^*)$ が得られ, これがテータ級数とその変換法則である.

Γ を $SL(2, \mathfrak{O})$ の適当な合同部分群 Γ' と, $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ との合成群とし, $\left(\frac{c}{d}\right)$ を F の4乗剰余記号とすると, Γ の指標 χ で, $\chi\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = 1$, かつ $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ については $d \neq 0$ か 0 かに従って $\chi(\sigma) = \left(\frac{c}{d}\right)$ または 1 となるものが存在する. $u = (z, v)$ について $v(u) = v$ と書き, また $\Gamma_\infty = \{\sigma \in \Gamma \mid c = 0\}$ とおいて, χ を含む Eisenstein 級数 $E(u, s) = \sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \bar{\chi}(\sigma)v(\sigma u)^s$ を作る. このような関数は Γ の各 cusp について作れて, それらの $s = \frac{5}{4}$ における留数として得られる保型形式の全体 Θ について $0 < \dim_{\mathbb{C}} \Theta < \infty$ がなりたつ. $\theta \in \Theta$ は $\theta(\sigma u) = \chi(\sigma)\theta(u)$, $(\sigma \in \Gamma)$;

という変換法則をもつが，もしこのような変換法則もこめてΘが直接解析的に構成できれば，相互法則が逆に証明される．それはχという指標の存在が相互法則と同値であることがわかっているからであって，$n=2$のときはΘはテータ関数の空間になり，古典的な結果そのものが出るわけである．

$n=4$のときには，Θの中にはθに関して$\theta(u) = v^{\frac{3}{4}} + \cdots$という形のFourier展開をもつものがあり，この定数項を1とするために，$v^{-\frac{3}{4}}\theta(u) = R(u)$とおけば，$R(u)$の変換法則は$R(u) = |u|^{-\frac{3}{2}} R(u^*)$となる．ところが，この変換法則は，$\mathfrak{F}_4 f = f$となる関数をとり，$R(u) = \sum_{\nu \in \mathfrak{o}} f(\nu^{\frac{4}{3}} u)$とおいたとき，Poissonの和公式から得られる$\sum_{\nu \in \mathfrak{o}} f(\nu^{\frac{4}{3}} u) = \sum_{\nu \in \mathfrak{o}} |u|^{-\frac{3}{2}} f(\nu^{\frac{4}{3}} u^*)$と同じものである．このことから，4乗剰余の相互法則は，4次のFourier変換で不変な関数で作られる4乗型テータ級数から得られることが推測されるのである．しかし，$\mathfrak{F}_4$で不変な関数は無数にある．他方，θがあたえられたときfを求めることは，Möbiusの関数を用いた級数を使えば簡単にできるがその関数の積分可能性等はあつかえない．

これらの困難をさけるため，求めるfを数論と無関係な方法で特徴づけることを考える．まず簡単な例についてそのアイデアを説明すると，$f(u) = f_0(v)e(z/4)$の形の関数について$\mathfrak{F}_2 f = f$がなりたてば，実は$f_0(v) = e^{-\pi v}$でなければなら

ないことが証明される．それには，$\exp(\sqrt{-1}\, r\cos\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{-1}^{|n|} J_{|n|}(r)\cos n\gamma$ を用いて，$f(u)$ を

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(v, r)\exp(\sqrt{-1}\, m\gamma), \qquad z = r\exp(\sqrt{-1}\,\gamma),$$

の形に展開すると，f_m は $f(v)$ と Bessel 関数との積となり，$\mathfrak{F}_2 f = f$ から，e^{-x^2}を特徴づける

$$\int_0^\infty x^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{xy}\, J_\nu(xy)\, dx = y^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

が無数のνについて得られるからである．そこで，$n=4$の場合について考えると，$f(u)$の形はずっと複雑である．しかし，この場合にもやはり，$f(u)$のv軸への制限は，無数の位数2の変換によって同次に不変な関数でなければならないことがわかるのである．

このようにして，e^{-x^2}に相当する関数は，任意の次数の場合に，無限個の変換の同時不変関数として決定され得るのである．もちろんまだこれは大よその結果であって，厳密なとりあつかいは今後しなければならない．しかし，このような立場からすれば，求める関数の構成は，数論からは脱却した問題になる．さらに，同じ方法で，p進的な場合もあつかえるものと思われる．いずれにしても，高次の剰余の場合にe^{-x^2}の役割りをはたす関数は，e^{-x^n}ではなく，むしろ$K_{1/n}(x^n)$のようなものである．(終)