

II 同定問題および準最適化

非線形系状態推定法による系同定

概要

線形系の状態値の統計的推定法としてはカルマン・フィルタ法がある。系の未知パラメータがたとえば付加雑音の平均値のようなものである場合には、この未知パラメータを線形状態値の1成分として合成状態値に組み込むことができるので、カルマン法はそのまま未知パラメータ同定に利用できる。しかし系が線形であっても、その遷移行列のような系の構造に関係する部分が探索されるべき未知パラメータである場合には、元来の状態値と未知パラメータとによってつくられた合成状態値については非線形となり、カルマン法はそのままでは系同定に適用できない。カルマン法を非線形系に適用する一つの近似法として、CoxやJenkinsによる、前段推定値を利用した近似線形化法がある。当電力制御研究室で、この方法を線形系の同定ほかに適用した結果によれば、簡単な低次系に対してさえも真値への収束には多大の困難が感じられ、特殊な場合は別として、系同定の一般的な手法とするには不十分であると思われる。Atkars は、非線形連続系を非線形サンプル観測する場合に対して、非線形関数を状態推定値の近傍でテーラー展開し、状態推定誤差の2次の項までを考慮した推定法を提案し、この項を無視した従来法に比べてすぐ

れた結果が得られることを示した。しかしその推定過程においては、推定誤差分散に対する微分方程式を解かねばならぬ煩わしさが付加されている。当研究室ではこのAthansのテーラー展開法を、非線形離散値系を非線形サンプル観測した場合の状態推定に適用して、整然とした前向き推定計算法を得ることができた。このときには、離散値系ということと相伴って、上記の分散の計算が簡単化される。さらにこの結果を、非線形系状態推定の形に変形できるいくつかの同定問題に適用してみたところ、Coxなどによる従来法よりは、収束を保証する先験初期値の選択範囲の条件ははるかにゆるく、良好な学習同定が可能となることがわかった。以上の事から、この推定法がかなり広範囲の同定問題を解く一般的な手法となり得るのではないかと希望がもたれるので、敢てここに紹介する次第である。同定の例題としては、付加雑音をもつつぎの4つについて計算結果を述べている。

- (1). 遷移行列、駆動行列の中に未知時変要素を含み、それが時間に対する多項式で近似できる系で、その未知多項式係数を同定しつつ準最適制御を行なう同定学習制御問題。
- (2). 線形系ではあるが多次元であり、しかも入力は一対のみしか与えられていない系の同定問題。

- (3). 未知関数探索に当りその未知展開係数を求める方法としてカルマン法を採用する際、その展開係数がさらに未知投間推移を行なうときの非線形推定の問題。
- (4). 状態推移が、ある動特性に従って行なわれ、経過状態値に対する評価損失が予測できる場合の、未知損失関数の学習探索と制御の問題。

非線形系状態推定法による系同定

辻 節三 熊丸耕介
(九州大学工学部)

1. 序 論

線形系の状態値の統計的推定法としてはカルマン・フィルタ法がある。系の未知パラメータがたとえば付加雑音の平均値のようなものである場合には、この未知パラメータを線形状態値の成分として合成状態値に組み込むことができ、カルマン法はそのまま未知パラメータ同定に利用でき、しかし系が線形であつても、その遷移行列のよりの系の構造に關係する部分の要素が探索されるべき未知パラメータである場合には、元来の状態値と未知パラメータとによつてつくられた合成状態値については非線形となり、カルマン法はそのままの形では系同定に適用できない。未知損失関数探索のよりの場合には、その非線形性は高次となることから、推定法はますます困難となる。カルマン法を非線形系に適用する一つの近似法として、Coxの方法¹⁾やJenkins, Royによる方法²⁾などがあるが、これらは前段推定値を利用した近似線形化法とみることができ、当電力制御研究室で、線形系の同定などにこの方法を適用した結果³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾によれば、簡単な低次系に対してさえも真値への収束には多大の困難が感じられた。すなわち、先験初期値のとり方が真値にかなり近い範囲にないれば同定不可能である場合が多く、また真値に近い所まで収束するとしてもそれにかかりの推定段数を必要とするなどで、特殊な場合は別として、系同定の一般的手法とするには不十分であると思われる。Athans は、非線形連続系を非線形サンブル観測する場合に対して、非線形関数を状態推定値の近傍でテラー展開し、状態推定誤差の2次の項までを考慮した推定法を提案し⁷⁾、この項を無視した従来法に比べてすぐれた結果

が得られることを示した。しかしその推定過程においては、推定誤差分散に対する微分方程式を解かねばならぬ煩わしさが付加されている。当研究室ではこの Athans のテーラー展開法を、非線形分散値系を非線形サンプル観測した場合の状態推定に適用して、自然とした前向き推定計算法を得ることができた。このときには、分散値系ということと相伴つて、上記の分散の計算が単純化される。さらにこの結果を、非線形状態推定の形に変形できいくつかの同定問題に適用してみたところ、COX などによる従来法よりは、収束を保証する先験初期値の選択範囲の条件ははるかにゆるく、良好な学習同定が可能となる⁸⁾ことがわかつた。なお、上記の先験初期値の中、分散の設定について、辻・高田の研究による最適値を参考とすれば、かなりよい収束が得られる。以上の事から、この推定法がかなり広範囲の同定問題を解く一般的手法となり得るのではないかとの希望もたれるので、敢てここに紹介する次才である。同定の例題としては、付加観測雑音をもつ⁹⁾の4つについて計算結果を述べている。

- (1) 遷移行列、駆動行列の中に未知時変要素を含み、それが時間に対する多項式で近似でき⁹⁾る系で、その未知多項式係数を同定しつつ準最適制御を行なう同定学習制御問題。¹⁰⁾
- (2) 線形系ではあるが¹¹⁾次元が多¹²⁾であり、しかも入出力は一对のみしか与えられていない系の同定問題。
- (3) 未知関数探索に当りその未知展開係数を求める方法としてカルマン法を採用する際、その展開係数がさらに未知状態推移を行なうときの非線形推定の問題。¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾
- (4) 状態推移がある動特性に従つて行われ、経過状態値に対する評価損失が実測でき¹⁶⁾る場合の、未知損失関数の学習探索と制御の問題。¹⁷⁾¹⁸⁾¹⁹⁾

なお上記の各研究はそれぞれ、当研究室の、(1) 川添容宏、(2) 久保田兼弘、(3) 熊丸耕介、(4) 富松俊幸によるものである。

2・非線形離散値系に対する2次近似法ファイルタ

2・1 系の構成

つぎの差分方程式で記述される非線形系および非線形観測系を考える。

$$X_{k+1} = f(X_k) + W_k \quad (2-1.1)$$

$$Y_k = h(X_k) + V_k \quad (2-1.2)$$

ここで、

X_k ; n 次元状態値ベクトル, $f(X_k)$; X_k の n 次元非線形関数ベクトル,

Y_k ; m 次元観測値ベクトル, $h(X_k)$; X_k の m 次元非線形関数ベクトル,

W_k ; n 次元白色正規分布雑音(平均値零, 分散行列 W_k)

V_k ; m 次元白色正規分布雑音(平均値零, 分散行列 V_k)

推定問題を考える限りにおいては, 操作量(励起入力)は既知量として扱うのでこれに
関する変数は, (2-1.1)式には陽に表わしていない。

2・2 2次近似法ファイルタの構成とファイルタ方程式の導出

〔定義〕

- (1) $\hat{X}_{k/R}$; 観測情報 $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ に基づく X_k の推定値
- (2) $\hat{X}_{k+1/R}$; 観測情報 $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ に基づく X_{k+1} の予測値
- (3) $E_{k/R} \triangleq X_k - \hat{X}_{k/R}$; 推定誤差
- (4) $Cov E_{R/R} \triangleq E E_{k/R} E'_{k/R} \triangleq C_{k/R}$; 推定誤差分散行列 E ; 期待値記号
- (5) $E_{k+1/R} \triangleq X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/R}$; 予測誤差
- (6) $Cov E_{k+1/R} \triangleq E E_{k+1/R} E'_{k+1/R} \triangleq C_{k+1/R}$; 予測誤差分散行列

〔仮定〕

- (1) 初期状態 X_0 は, 平均値 $\hat{X}_{0/-1}$, 分散行列 $C_{0/-1}$ の正規分布として先験的に与え

る。
 (2) 非線形関数 $f(X_k)$, $h(X_k)$ は X_k に関して少なくとも 2 階微分可能な連続関数である。

(3) $e_{k/k}$, $e_{k+1/k}$ の分布は近似的に正規分布である。

(4) $\hat{X}_{k/k}$, $\hat{X}_{k+1/k}$ は不偏推定値 (unbiased estimate) である。すなわち,

$$E e_{k/k} = 0, \quad E e_{k+1/k} = 0$$

いま, $f(X_k)$ および $h(X_{k+1})$ をそれぞれ $\hat{X}_{k/k}$, $\hat{X}_{k+1/k}$ の近傍で 2 次の項までテーラ展開すれば

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f(X_k) + W_k \\ &\simeq f(\hat{X}_{k/k}) + f'_X(\hat{X}_{k/k})(X_k - \hat{X}_{k/k}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathcal{S}_{ij} (X_k - \hat{X}_{k/k})^i (X_k - \hat{X}_{k/k})^j \\ &\quad + W_k \end{aligned} \quad (2-2.1)$$

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= h(X_{k+1}) + V_{k+1} \\ &\simeq h(\hat{X}_{k+1/k}) + h'_X(\hat{X}_{k+1/k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathcal{P}_{ij} (X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k})^i (X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k})^j \\ &\quad + V_k \end{aligned} \quad (2-2.2)$$

ただし

$$X \triangleq \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix}, \quad f(X) \triangleq \begin{bmatrix} f^1(X) \\ f^2(X) \\ \vdots \\ f^m(X) \end{bmatrix}, \quad h(X) \triangleq \begin{bmatrix} h^1(X) \\ h^2(X) \\ \vdots \\ h^m(X) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (i, j \text{ 行 } (m \times 1))$$

$$\Psi_i \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{--- } i\text{行 } (m \times 1), \quad (f_x(\hat{x}))^j \triangleq \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \Big|_{x=\hat{x}}, \quad (f_{xx}^i(\hat{x}))^{jk} \triangleq \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} \Big|_{x=\hat{x}}$$

$i, j, k = 1, 2, \dots, n$

$$(h_x(\hat{x}))^j \triangleq \frac{\partial h^i}{\partial x^j} \Big|_{x=\hat{x}}, \quad (h_{xx}^i(\hat{x}))^{jk} \triangleq \frac{\partial^2 h^i}{\partial x^j \partial x^k} \Big|_{x=\hat{x}} \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j, k=1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

「予測値 $\hat{x}_{k+1/k}$ の導出」

x_{k+1} の予測値 $\hat{x}_{k+1/k}$ を付録 (A-4) 式に準じて次式で与える。

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(\hat{x}_{k/k}) + \mu(\hat{x}_{k/k}) \quad \text{--- (2-2.3)}$$

ここで

$\mu(\hat{x}_{k/k})$: $f(x_k)$ の非線形性を考慮した補正項

仮定(4)と(2-2.1), (2-2.3)式より

$$\begin{aligned} E \mathbb{E}_{k+1/k} &= E(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}) \\ &= E \left\{ f_x(\hat{x}_{k/k})(x_k - \hat{x}_{k/k}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \mathcal{G}_i(x_k - \hat{x}_{k/k})' f_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}) (x_k - \hat{x}_{k/k}) \right. \\ &\quad \left. + W_k - \mu(\hat{x}_{k/k}) \right\} \\ &= E \left\{ f_x(\hat{x}_{k/k}) \mathbb{E}_{k/k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \mathcal{G}_i \mathbb{E}_{k/k}' f_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}) \mathbb{E}_{k/k} + W_k - \mu(\hat{x}_{k/k}) \right\} \\ &= 0 \quad \text{--- (2-2.4)} \end{aligned}$$

また，付録 (A-7)，(A-8) 式に対応して

$$E\{f_{XX}(\hat{X}_{k/R})E_{k/R}\} = f_{XX}(\hat{X}_{k/R})E_{k/R} = 0 \quad \text{--- (2-2.5)}$$

$$E\{E'_{k/R} f_{XX}^i(\hat{X}_{k/R})E_{k/R}\}$$

$$= E\{t. \{f_{XX}^i(\hat{X}_{k/R})E_{k/R}E'_{k/R}\}\}$$

$$= t. \{f_{XX}^i(\hat{X}_{k/R})E_{k/R}E'_{k/R}\} = t. \{f_{XX}^i(\hat{X}_{k/R})C_{k/R}\} \quad \text{--- (2-2.6)}$$

(2-2.5)，(2-2.6) 式を使って (2-2.4) 式より $\mu(\hat{X}_{k/R})$ は，

$$\mu(\hat{X}_{k/R}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i t. \{f_{XX}^i(\hat{X}_{k/R})C_{k/R}\} \quad \text{--- (2-2.7)}$$

「推定値 $\hat{X}_{kH/k+1}$ の導出」

\hat{X}_{k+1} の推定値 $\hat{X}_{kH/k+1}$ を付録 (A-15) 式と同様に次式で与える。

$$\hat{X}_{kH/k+1} = \hat{X}_{kH/k} + K_{kH} \{y_{kH} - h(\hat{X}_{kH/k}) - \pi(\hat{X}_{kH/k})\} \quad \text{--- (2-2.8)}$$

ここで

K_{k+1} ; フィルタのゲイン行列 ($n \times m$)

$\pi(\hat{X}_{kH/k})$; $h(X_{kH})$ の非線形性を考慮した補正項

仮定(4)と(2-2.2)，(2-2.8)式より

$$E_{kH/k+1} = E(X_{kH} - \hat{X}_{kH/k+1})$$

$$= E\{(X_{kH} - \hat{X}_{kH/k}) - K_{kH} [h_X(\hat{X}_{kH/k})(X_{kH} - \hat{X}_{kH/k})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i^T (X_{kH} - \hat{X}_{kH/k})' h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/k})(X_{kH} - \hat{X}_{kH/k}) + V_{kH} - \pi(X_{kH/k})]\}$$

$$= E\{E_{kH/k} - K_{kH} [h_X(\hat{X}_{kH/k})E_{kH/k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i^T E'_{kH/k} h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/k})E_{kH/k}]\}$$

$$+V_{kH} - \pi(\hat{X}_{kH/R})\} = 0 \quad \text{--- (2-2.9)}$$

(2-2.5), (2-2.6) 式を使つて (2-2.9) 式より $\pi(\hat{X}_{kH/R})$ は,

$$\pi(\hat{X}_{kH/R}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i \tau_i \{h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) C_{kH/R}\} \quad \text{--- (2-2.10)}$$

「誤差分散行列 $C_{kH/R+1}$, $C_{kH/R}$ の導出」
定義より

$$\begin{aligned} C_{kH/R+1} &\triangleq E E_{kH/R+1} E'_{kH/R+1} \\ &= E \left\{ E_{kH/R} - K_{kH} (h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) E_{kH/R} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i E'_{kH/R} h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) E_{kH/R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i \tau_i (h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) C_{kH/R}) + V_{kH} \right\} \\ &\quad \times \left\{ E_{kH/R} - K_{kH} (h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) E_{kH/R} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i E'_{kH/R} h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) E_{kH/R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i \tau_i (h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) C_{kH/R}) + V_{kH} \right\}' \end{aligned}$$

付録 (A-20) ~ (A-23) 式と (I-2) 式を参照して

$$\begin{aligned} C_{kH/R+1} &= (I - K_{kH} h_X(\hat{X}_{kH/R})) C_{kH/R} (I - K_{kH} h_X(\hat{X}_{kH/R}))' \\ &\quad + K_{kH} (V_{kH} + \Delta_{kH}) K_{kH}' \quad \text{--- (2-2.11)} \end{aligned}$$

ただし Δ_{kH} は $h(X_{kH})$ の非線形性を考慮した観測雑音分散の補正項で,

$$(\Delta_{kH})_{ij} \triangleq \frac{1}{2} \tau_i \tau_j \{h_{XX}^i(\hat{X}_{kH/R}) C_{kH/R} h_{XX}^j(\hat{X}_{kH/R}) C_{kH/R}\} \quad \text{--- (2-2.12)}$$

II ; $n_X n_X$ 単位行列

一方定義より

$$\begin{aligned}
 C_{kH/k} &\triangleq E E_{kH/k} E'_{kH/k} \\
 &= E \left\{ f_{xx}(\hat{x}_{k/k}) E_{k/k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i \text{tr} \left\{ f_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}) (E_{k/k} E'_{k/k} - C_{k/k}) \right\} + W_k \right\} \\
 &\quad \times \left\{ f_{xx}(\hat{x}_{k/k}) E_{k/k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i \text{tr} \left\{ f_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}) (E_{k/k} E'_{k/k} - C_{k/k}) \right\} + W_k \right\}'
 \end{aligned}$$

付録 (A-20) ~ (A-25) 式と (L-2) 式を参照して

$$C_{kH/k} = f_{xx}(\hat{x}_{k/k}) C_{k/k} f_{xx}'(\hat{x}_{k/k}) + D_k + W_k \quad \text{--- (2-2.13)}$$

ただし D_k は $f(x_k)$ の非線形性を考慮した系付加雑音分散の補正項で、

$$(D_k)^{ij} \triangleq \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ f_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}) C_{k/k} f_{xx}^j(\hat{x}_{k/k}) C_{k/k} \right\} \quad \text{--- (2-2.14)}$$

「最適フィルタゲイン行列の決定」

最適フィルタゲイン行列 K_{kH}^* を $E_{kH/k+1}$ を $E_{kH/k}$ の重み付平均自乗値を最小にする K_{kH} として

$$\begin{aligned}
 E(E'_{kH/k+1} M_{kH} E_{kH/k+1}) &= \text{tr} M_{kH+1} E E_{kH/k} E'_{kH/k+1} \\
 &= \text{tr} M_{kH+1} C_{kH/k+1}
 \end{aligned}$$

M_{kH} ; 重み行列 ($n \times n$ の正則対称行列)

$$\frac{\partial}{\partial K_{kH}} \text{tr} [M_{kH} C_{kH/k+1}] \Big|_{K_{kH} = K_{kH}^*} = 0 \quad \text{より}$$

Gradient matrix 法 より

$$\begin{aligned}
& M'_{RH} C_{RH/K} \hat{H}_X(\hat{X}_{RH/K})' + M_{RH} C_{RH/K} \hat{H}_X(\hat{X}_{RH/K}) - M'_{RH} K_{RH}^* [\hat{H}_X(\hat{X}_{RH/K}) \\
& \times C_{RH/K} \hat{H}'_X(\hat{X}_{RH/K}) + V_{RH} + \Delta_{RH}]' - M_{RH} K_{RH}^* [\hat{H}_X(\hat{X}_{RH/K}) C_{RH/K} \hat{H}'_X(\hat{X}_{RH/K})' \\
& + V_{RH+1} + \Delta_{RH+1}] = 0 \quad \text{--- (2-2.15)}
\end{aligned}$$

従って

$$K_{RH+1}^* = C_{RH+1/K} \hat{H}_X(\hat{X}_{RH+1/K})' [\hat{H}_X(\hat{X}_{RH+1/K}) C_{RH+1/K} \hat{H}'_X(\hat{X}_{RH+1/K}) + V_{RH+1} + \Delta_{RH+1}]^{-1} \quad \text{--- (2-2.16)}$$

(2-2.16) 式を (2-2.11) 式に代入して

$$\begin{aligned}
C_{RH+1/K} &= C_{RH+1/K} - C_{RH+1/K} \hat{H}_X(\hat{X}_{RH+1/K})' [\hat{H}_X(\hat{X}_{RH+1/K}) C_{RH+1/K} \hat{H}'_X(\hat{X}_{RH+1/K}) + V_{RH+1} + \Delta_{RH+1}]^{-1} \\
& \times \hat{H}_X(\hat{X}_{RH+1/K}) C_{RH+1/K} \quad \text{--- (2-2.17)}
\end{aligned}$$

3. 2 次近似法フイルタの系同定への適用

3. 1 未知時変遷移，駆動行列系の学習制御

線形離散値系の未知駆動行列の推定は，未知要素を状態値の1つの要素とみなすことにより，カルマン・フイルタを用いて容易に行なうことができる。しかし遷移行列が未知の場合，状態値不完全観測のもとでは問題は非線形推定問題に帰着される。ここでは，時変パラメータ推定に2次近似法フイルタを応用した例について述べる。

「問題の設定」

遷移行列，駆動行列が未知の時変関数である付加雑音の線形離散値系で，観測値が一般に状態値の非線形関数であり，かつ付加雑音で汚されている場合の状態値と未知パラメータの同時推定を行ない，二次形式評価基準における準最適制御の合成について考察する。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + G_k U_k + V_k$$

$$y_k = B_k(X_k) + v_k$$

ここで，

Φ ; $n_x \times n_x$ 未知時変遷移行列

G ; $n_x \times p$ 未知時変駆動行列

X ; n_x 次元状態値ベクトル

U ; p 次元操作量ベクトル

y ; m 次元観測値ベクトル

v ; 平均値0，分散Rの n_x 次元白色正規分布雑音ベクトル

v ; 平均値0，分散Sの m 次元白色正規分布雑音ベクトル

—— (3-1.1)

—— (3-1.2)

制御の評価として、次式のような二次形式評価基準をとり、制御と推定を分離した標準最適制御について考える。

$$I_N = \sum_{k=1}^N (X_k' Q_k X_k + U_{k-1}' H_{k-1} U_{k-1}) \quad \text{--- (3-1.3)}$$

「状態値とパラメータの同時推定方程式の導出」

遷移行列，駆動行列の未知要素のおのをおの，つぎのような時間についての多項式で近似する。

$$A_k = A_{k-1} + A^1 \cdot T + A^2 \cdot (T)^2 (2k-1) + \dots + A^S \cdot (T)^S \cdot \sum_{r=0}^{S-1} \binom{S}{r} (k-1)^r \quad \text{--- (3-1.4)}$$

ここで，

$$\binom{S}{r} = \frac{S(S-1) \dots (S-r+1)}{r!} \quad \text{--- (3-1.5)}$$

(3-1.4) 式で， T はサンプル周期， k はサンプル時点を表わし， S は展開項数である。一般に，パラメータの各未知要素は同じような時間変化をしているとは限らないので各未知要素について展開項数の S の大きさは異なる。(3-1.4) 式は 1 つの時変パラメータの要素 A_k の差分方程式であり， A_k の値を求めためには，それより 1 サンプル前の時点前の A_{k-1} の値と各定係数 A^1, A^2, \dots, A^S の値がわかればよい。そこで，これらを被推定量とするならばその推定値から A_k の推定値が求まる。

いま，すべての未知パラメータについて上記のように $A_{k-1}, A^1, A^2, \dots, A^S$ などの被推定量を構成し，それらを総合して 1 つのベクトル d_k とする。 d_k の次元は，被推定量の総数と等しくこれを N_k とする。

つぎに，状態ベクトル X_k とパラメータ推定ベクトル d_k により，結合ベクトル X_k を構成する。

(3-1.1), (3-1.2) 両式を X_k について書きかえると, X_k についての状態遷移方程式と観測方程式が下記のようになれる。

$$X_{k+1} = f(X_k) + W_k \quad \text{---(3-1.6)}$$

$$y_k = h(X_k) + V_k \quad \text{---(3-1.7)}$$

ここで

$$X_k = [x_k', \alpha_k']'$$

$$W_k = [w_k, 0]'$$

; 平均値 0, 分散 W の白色正規分布雑音

ただし

$$W = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

; $n \times n$ 行列

$$V_k = v_k$$

; 平均値 0, 分散 $V = S$ の白色正規分布雑音

$$f, h$$

; X_k についての少なくとも 2 階微分可能な非線形連続関数

(3-1.6), (3-1.7) 両式に 2 次近似法フイルタを適用すると逐次推定値を得る

「操作量の合成」

D.P 法による多段決定過程により制御方略を合成する。既知パラメータの場合, 最適操作量はこのパラメータと状態値の関数として得られる。ここでは, パラメータの真値が未知なのでその段まで得られている最も新しい推定値を用いることにより次のような最適操作量を得る。

$$u_k^0 = B(N-k) \hat{X}_k/k \quad \text{---(3-1.8)}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 B(N-k) &= -[L\phi(N-k+1) + H_k]^{-1} L\phi(N-k+1) && \longleftarrow (3-1.9) \\
 P(N-k) &= L\phi(N-k+1) + L\phi(N-k+1)B(N-k) && \longleftarrow (3-1.10) \\
 L\phi(N-k+1) &= \hat{G}'_k [Q_{k+1} + \rho(N-k+1)] \hat{G}_k && \longleftarrow (3-1.11) \\
 L\phi(N-k+1) &= \hat{G}'_k [Q_{k+1} + \rho(N-k+1)] \hat{\Phi}_k && \longleftarrow (3-1.12) \\
 L\phi(N-k+1) &= \hat{\Phi}'_k [Q_{k+1} + \rho(N-k+1)] \hat{\Phi}_k && \longleftarrow (3-1.13) \\
 L\phi(N-k+1) &= \hat{G}'_k [Q_{k+1} + \rho(N-k+1)] \hat{G}_k && \longleftarrow (3-1.14)
 \end{aligned}$$

推定の各段ごとに $P(0)=0$ から出発して $B(1) \rightarrow P(1) \rightarrow B(2) \rightarrow \dots \rightarrow B(N-k)$ のように (3-1.9) 式から (3-1.14) 式を繰り返し計算することにより帰還行列 $B(N-k)$ をえ、操作量が決まる。Fig. 3-1-1 は学習制御の手順を簡単に示したものである。

「例題」 2次元系の学習制御

状態遷移方程式と観測方程式がそれぞれ (3-1.15), (3-1.16) 式で表わされる線

形系について数値例を示す。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & \phi_k^{12} \\ \phi_k^{21} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{X}_k + \begin{bmatrix} g_k^1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + w_k && \longleftarrow (3-1.15) \\
 y_k &= [1 \quad 1] \mathcal{X}_k + v_k && \longleftarrow (3-1.16)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathcal{X}_k = [\mathcal{X}_k^1, \mathcal{X}_k^2]$$

w : 平均値 0, 分散 Π の 2次元白色正規分布雑音ベクトル

v : 平均値 0, 分散 1 のスカラー白色正規分布雑音

評価基準は次の 20 段決定過程である。

$$J_{20} = \sum_{k=1}^{20} (\mathcal{X}_k^1 \mathcal{X}_k^2 + u_{k-1}^2) \longleftarrow (3-1.17)$$

未知パラメータは $\phi_{k}^{12}, \phi_{k}^{21}, g_{k}^{1}$ でその遷移式をおの

$$\phi_{k-1}^{12} = \phi_{k-1}^{12.1} \cdot (T) + \phi_{k-1}^{12.2} \cdot (T)^2 \cdot (2k-1) \quad \text{---(3-1.18)}$$

$$\phi_{k-1}^{21} = \phi_{k-1}^{21.1} \cdot (T) + \phi_{k-1}^{21.2} \cdot (T)^2 \cdot (2k-1) \quad \text{---(3-1.19)}$$

$$g_{k-1}^1 = g_{k-1}^{1.1} \cdot (T) \quad \text{---(3-1.20)}$$

とする。

ここで、未知時変パラメータの近似式を

$$\phi_{k-1}^{12} = X_{k-1}^3 + X_{k-1}^4 \cdot (T) + X_{k-1}^5 \cdot (T)^2 \cdot (2k-1) \quad \text{---(3-1.21)}$$

$$\phi_{k-1}^{21} = X_{k-1}^6 + X_{k-1}^7 \cdot (T) + X_{k-1}^8 \cdot (T)^2 \cdot (2k-1) \quad \text{---(3-1.22)}$$

$$g_{k-1}^1 = X_{k-1}^9 + X_{k-1}^{10} \cdot (T) \quad \text{---(3-1.23)}$$

で表わす。つぎに結合ベクトル X_k を定義する。

$$X_k = [X_k^1, X_k^2, X_k^3, X_k^4, X_k^5, X_k^6, X_k^7, X_k^8, X_k^9, X_k^{10}]' \quad \text{---(3-1.24)}$$

を用いて (3-1.15), (3-1.16) 両式を書き換えれば,

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_k^1 + [X_{k-1}^3 + X_{k-1}^4 \cdot (T) + X_{k-1}^5 \cdot (T)^2 \cdot (2k-1)] X_k^2 + [X_{k-1}^9 + X_{k-1}^{10} \cdot (T)] U_k \\ [X_{k-1}^6 + X_{k-1}^7 \cdot (T) + X_{k-1}^8 \cdot (T)^2 \cdot (2k-1)] X_k^4 + X_k^5 + U_k \\ X_{k-1}^3 + X_{k-1}^4 \cdot (T) + X_{k-1}^5 \cdot (T)^2 \cdot (2k-1) \\ X_{k-1}^6 \\ X_{k-1}^7 \\ X_{k-1}^8 \\ X_{k-1}^9 + X_{k-1}^{10} \cdot (T) \\ X_{k-1}^{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{---(3-1.25)}$$

$$y_k = [1, 1, 0, \dots, 0] X_k + U_k \quad \text{---(3-1.26)}$$

となる。

(3-1.25), (3-1.26) 両式に2次近似法フイルタを適用する。数値として, サンプル周期 $T=1$ 秒で初期真値 X_0 , 先験推定値 \hat{X}_0 , 誤差分散 C_0 をおの次のように与えたときの結果を Fig. 3-1-2, Fig. 3-1-3 に示す。

$$X_0 = [100.50, 0.65, 0.07, -0.005, 0.9, -0.126, 0.005, 1.0, -0.04]^T$$

$$\hat{X}_{0|0} = X_0 / 100.0$$

$$C_{0|0} = 10.0 \times (X_0 - \hat{X}_{0|0})(X_0 - \hat{X}_{0|0})^T$$

「検討」

未知時変パラメータを時間についての多項式で近似しその係数を推定することによつて各サンプル時点の値を推定するこの方法は最終的に2次の非線形性を有する系の非線形推定問題となることがわかる。観測方程式については一般に非線形関数であつてもかまわないが例題については簡単のため線形関数の場合に行なつた。このように遷移方程式の非線形性の次数が低いということは推定に対して非常に有利となる。

時変パラメータの多項式近似については, 当然のことながら近似誤差を小さくするためには十分大きな項数まで多項式を展開しなければならぬ。一方, 推定値の収束時間の立場からは多項式の展開項数を増大するにしたがつて結合ベクトルの要素数が多くなり不利になつてくる。どの程度の展開項数までとるかには必要性和経験の両面から決定されなければならない。例題は2次元系の20段過程により学習制御について示したが, 実状態値, パラメータ共7段で推定がほぼ完了しており12段で原点近傍に整定している。結合ベクトルの次元数が10であることから考え, 推定値の収束が7段であるというところは先験情報による影響と考えられる。特に先験分散に対する情報は重要であり, これについては従来のカルマンフィルタなどの場合のように分散の対角項のみを考慮し非対角項については零とおくやり方では不十分で, 非対角項についても十分の考慮を払うことが必要である。

3.2 単一入出力による多次元系の同定

単一入力，単一出力を使用して，系の伝達関数を求める問題は，系同定の基本系として工学的興味のあるところであるが，今日に至るまで，まだ十分とはいえない。この節では，線形の単一入出力をもつ多次元離散値系について考察し，未知状態値，未知遷移行列及び未知駆動ベクトルから構成される結合ベクトルの非線形状態方程式並びに非線形観測方程式を作成し，これに2次近似法を適用した系同定法を提案する。プロック線図をFig.

3-2-1 に示す。

「一つの状態値のみが完全観測されている場合の系同定」

まず，簡単な場合として，状態値 x' のみが完全観測された場合を考えよう。
すなわち，系は，つぎの式で与える。

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + g_k u_k + w_k$$

$$y_k = x'_k$$

ここで，

x_k : n 次元状態値ベクトル

u_k : 単一入力

Φ_k : $n \times n$ 未知遷移行列

g_k : $n \times 1$ 未知駆動ベクトル

y_k : 単一出力

w_k : n 次元白色正規分布雑音，平均値零，

分散行列 R_k

(3-2.1) 式より

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^n \phi_k^{1i} x_k^i + \phi_k^{1n} y_k + g_k^1 u_k + w_k^1$$

$$x_{k+1}^2 = \sum_{i=1}^n \phi_k^{2i} x_k^i + \phi_k^{2n} y_k + g_k^2 u_k + w_k^2$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1}^n = \sum_{i=1}^n \phi_k^{ni} x_k^i + \phi_k^{nn} y_k + g_k^n u_k + w_k^n$$

ただし， $(\Phi_k)^{ij} = \phi_k^{ij}$ ， $(g_k)^i = g_k^i$

$$\text{--- (3-2.1)}$$

$$\text{--- (3-2.2)}$$

$$\text{--- (3-2.3)}$$

$$\text{--- (3-2.4)}$$

系が、定常であると仮定すると、遷移行列および駆動ベクトルの遷移式は、次の形で表わされる。

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k), \quad \underline{g}(k+1) = \underline{g}(k) \quad (3-2.5)$$

そこで、今つぎの (n^2-2n-1) 次元からなる結合ベクトルを定義する。

$$\mathbb{X}_k \triangleq (\mathcal{X}_k^2, \mathcal{X}_k^3, \dots, \mathcal{X}_k^n, \phi_k^{11}, \phi_k^{12}, \dots, \phi_k^{1n}, \phi_k^{21}, \dots, \phi_k^{nn}, g_k^1, \dots, g_k^n) \quad (3-2.6)$$

\mathbb{X}_k を使用して、(3-2.3) 式と (3-2.4), (3-2.5) 式を書き換えると、

$$\mathbb{X}_{k+1} = f(\mathbb{X}_k, u_k, y_k) + \mathbb{W}_k \quad (3-2.7)$$

$$y_{k+1} = h(\mathbb{X}_k, u_k, y_k) + v_k \quad (3-2.8)$$

となる。

ここで、 $f(\mathbb{X}_k, u_k, y_k), h(\mathbb{X}_k, u_k, y_k)$ は、 \mathbb{X}_k に関する (n^2-2n-1) 次元の非線形ベクトル関数とスカラーの非線形関数で、つぎの式で表わされる。

$$f(\mathbb{X}_k, u_k, y_k) \triangleq \left[\begin{array}{l} \sum_{i=2}^n \phi_k^{2i} \mathcal{X}_k^i + \phi_k^{21} y_k + g_k^2 u_k, \quad h(\mathbb{X}_k, u_k, y_k) \triangleq \sum_{i=2}^n \phi_k^{1i} \mathcal{X}_k^i \\ \vdots \\ \sum_{i=2}^n \phi_k^{ni} \mathcal{X}_k^i + \phi_k^{n1} y_k + g_k^n u_k \\ \phi_k^{11} \\ \phi_k^{12} \\ \vdots \\ \phi_k^{1n} \\ g_k^1 \\ \vdots \\ g_k^n \end{array} \right] + \phi_k^{11} y_k + g_k^1 u_k$$

また, \overline{W}_k, V_k は, それぞれ平均値零, 分散 \overline{W}_k と平均値零, 分散 Δ_k をもつ白色正規分布雑音で, 次式で与えられる。

$$\overline{W} \triangleq (W_k^2 \dots W_k^2 \ 0)'$$

$$V_k = W_k'$$

それゆえに, (3-2.7) 式と y_k を既知とし, y_{k+1} を観測値とした(3-2.8)式に, 2次近似法フィルタを適用し, x' 以外の状態値推定ともあわせて系同定を行なう。

また, この場合, 結合ベクトルに x' を含めて考えれば, (3-2.1), (3-2.2), (3-2.5) 式から, ただちに, (2-1.1), (2-1.2) 式に対応する形が, 導出されるが, その時は, 観測方程式は, 線形となる。

「例題」 純粹2次系の同定

簡単な例として, 次の純粹2次系を考察する。

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} W_k^1 \\ W_k^2 \end{bmatrix}$$

———(3-2.9)

ここで, W_k^1, W_k^2 は, それぞれ平均値 0, 分散 0.01 の白色正規分布雑音である
 また, 初期状態値は, $x_0 = (10 \ 10)'$, 入力は $u_k = 10 \sin k$, 先験値は, $\hat{x}_{0/-1} = 0'$
 $C_{0/-1} = (x_0 - \hat{x}_{0/-1})(x_0 - \hat{x}_{0/-1})'$ であるとする。同定段数は, 20 段で, 結果は, Fig. 3-2-2 と Fig. 3-2-3 に示し, 比較のため, 1次近似フィルタの計算結果を併記したが, 格段に2次近似法フィルタの場合の収束が良いことがわかる。

「遷移行列と駆動ベクトル相互関係を利用した場合の系同定」

同定しようとする系が, 高次元になると(3-2.1)式で表示された系の未知要素をすべて推定するとなると計算時間も膨大で, 推定も容易でない。そこで, 系を離散値系で表示するさいに, 標準形で書き換え, かつ, 遷移行列と駆動ベクトルの相互関係に着目して, 推定次元数を減少させることができる。

今、系の未知伝達関数を、次式で与える。ただし、系は、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ の相異なる実固有値からなるとする。

$$G(s) = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_2 s + b_1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2) \dots (s-\lambda_n)} \quad \text{--- (3-2.10)}$$

(3-2.10) 式を標準形の状態方程式と観測方程式を用いて書き換えると、

$$\dot{x}_t = A x_t + b u_t \quad \text{--- (3-2.11)}$$

$$y_t = m' x_t \quad \text{--- (3-2.12)}$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad b = (1 \dots 1)', \quad m = (m^1 \dots m^m)'$$

$$m^i = \frac{b_n \lambda_i^{m-1} + \dots + b_2 \lambda_i + b_1}{(\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_j) \dots (\lambda_i - \lambda_n)} \quad (i \neq j, i=1, \dots, n)$$

系雑音及び観測雑音の混入を考慮して、(3-2.11), (3-2.12) 式を離散値系に書き換えると、次式のようになる。

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + g_k u_k + w_k \quad \text{--- (3-2.13)}$$

$$y_k = m_k' x_k + v_k \quad \text{--- (3-2.14)}$$

ここで、

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}, \quad \Phi_k^d \triangleq (\Phi^k \Phi^{k-1} \dots \Phi^{11}), \quad (g_k)^i = \frac{1}{\lambda_i} (e^{\lambda_i} - 1) \quad \text{--- (3-2.15)}$$

また、サンプル周期は、1秒で、 w_k, v_k は、それぞれ、平均値零、分散 R_k と平均値零、分散 S_k の白色正規分布雑音である。

ところが，駆動ベクトル g_k は， \bar{a}_k を用いて

$$(g_k)^i = \frac{1}{\log(\bar{\phi}_k)^{ii}} \left((\bar{\phi}_k)^{ii} - 1 \right) \quad \text{--- (3-2.16)}$$

で表わされる。それ故に，駆動ベクトルの推定は， \bar{a}_k の推定から，(3-2.16) 式を用いて，間接的に求められるので，(3-2.15)，(3-2.14) 式の系の未知要素としては， \bar{x}_k ， \bar{a}_k^d ， m_k のみを考えればよい。この結果，推定次元数は， \bar{x}_k ， \bar{a}_k ， m_k のすべてを未知要素と考慮した場合の $n^2 + 3n$ から $3n$ と減少する。そこで結合ベクトルとして，つぎの形を採用する。

$$\bar{x}_k \triangleq (\bar{x}_k' \bar{a}_k^d m_k')' \quad \text{--- (3-2.17)}$$

\bar{x}_k を用い，かつ系の定常性を考慮して(3-2.15)，(3-2.14) 式から，次式を得る。

$$\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k, u_k) + \bar{w}_k \quad \text{--- (3-2.18)}$$

$$y_k = h(\bar{x}_k) + v_k \quad \text{--- (3-2.19)}$$

ただし，

$$f(\bar{x}_k, u_k) = (a_k' \bar{a}_k^d m_k')', \quad h(\bar{x}_k) = \sum_{i=1}^n m_k^i x_k^i$$

$$(a_k)^i \triangleq \phi_k^{ii} x_k^i + (\phi_k^{ii} - 1) u_k / \log \phi_k^{ii}$$

$$\bar{w}_k = (w_k' 0)'$$

従つて，(3-2.18)，(3-2.19) 式に 2 次近似法フイルタが適用される。

「例題」 4 次元系の同定

極および分子の係数がすべて未知なる場合の 4 次元系の同定問題を考察した。未知伝達関数として

$$G(s) = \frac{s^2 \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1}{(s+1)(s+0.5)(s+0.3)(s+0.8)} \quad \text{--- (3-2.20)}$$

を与え、これに対する標準差分式は

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.37 & & & \\ & 0.61 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.78 \\ 0.87 \\ 0.69 \end{bmatrix} (u_k + w_k) \quad \text{--- (3-2-21)}$$

$$y_k = (14.3 \quad -16.7 \quad 10.5 \quad -6.15) X_k + v_k \quad \text{--- (3-2-22)}$$

ここで、 $w_k^1, w_k^2, w_k^3, w_k^4$ は、すべて平均値0、分散0.01の白色正規分布雑音で、初期状態値は、 $X_0 = (1111)'$ 入力は、 $u_k = \delta \sin k + 8$ である。先験値は $\hat{X}_{0/1} = (3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 0.7 \ 1 \ 1 \ 0.9 \ 1.8 \ -20 \ 1.5 \ -10)'$ 、 $C_{0/1} = (X_0 - \hat{X}_{0/1})(X_0 - \hat{X}_{0/1})'$ を与え、結果を Fig. 3-2-4 ~ Fig. 3-2-6 に示す。

「検討」

本節では、単一入出力を使用した線形多次元系の同定問題を非線形推定問題に帰着させこれに逐次近似法フィルタを適用して従来の1次近似フィルタより極めて収束のよい逐次同定法を得た。その際、先験分散は、状態値成分相互間の相関を考慮して収束の改善を試みた。また、遷移行列と駆動ベクトルの相互関係を利用することにより推定次元数を減少させて高次元系の同定問題への適用を容易にした。このとき、系の固有値は、相異なる実固有値に限定したが、さらに複素根および重根を含む場合の検討が必要であり、また、一般に次元数未知な系に対する同定も今後の課題として残されている。

3.3 カルマン・フィルタによる未知関数学習法

確率近似法による未知関数学習アルゴリズムは、学習すべき関数の形やそれに対する先験情報の度合にもよるが、一般に学習解の収束が遅く、十分良好な学習関数形を得るには多くのサンプリング回数(学習回数)を必要とし、対象によつては工学的適用が困難となる。このような難点を解消するため、カルマン・フィルタを適用した未知関数学習法を提案した。すなわち、未知関数がある既知の独立関数列で有限項展開近似し、展開係数を未知状態ベクトルとみなしてこれに対する状態観測および状態遷移方程式を、未知関数サンプリング方程式より構成し関数学習問題をカルマン法による状態推定問題として処理した。この方法によれば、状態推定誤差の分散行列を評価基準にした収束速度の観点より最適なサンプリングスケンスを決定することが可能である。さらに非線形系推定に対する2次近似法フィルタを適用すれば、ある種の非定常未知関数の最適サンプリング学習も可能である。以下に、この学習アルゴリズムの定式化を示し、いくつかの計算例を掲げる。

「非定常未知関数の構成」

$$y_k = \mathcal{F}_k(\theta_k) + \xi_k \quad \text{---(3-3.1)}$$

ここで、

θ_k ; k 回目の入力サンプル (r 次元ベクトル変数)

$\mathcal{F}_k(\theta_k)$; θ_k の非定常未知関数

y_k ; k 回目のサンプルに対する観測値

ξ_k ; 平均値零、分散 σ_ξ^2 の白色正規分布雑音

$\mathcal{F}_k(\theta)$ をある既知の独立関数系 $\{g^i(\theta)\}$ で有限項展開近似すれば、(3-3.1) 式は

$$y_k \approx \sum_{i=1}^p \alpha_k^i g^i(\theta) + \xi_k \quad \text{---(3-3.2)}$$

未知関数 $f_k(\theta)$ は、その展開係数 z_k^i ($i=1, 2, \dots, p$) がつぎのような未知段間推移をする非定常関数であるとする。

—— (3-3.3)

$$z_{k+1} = \mathbf{A} z_k + \eta_k$$

ただし、

$\mathbf{A} z_k \triangleq \begin{bmatrix} z_k^1 \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^p \end{bmatrix}$; $p \times p$ の未知遷移行列 (定数)

$$(\mathbf{A})_{ij} \triangleq \phi_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq p$$

η_k ; 平均値零、分散行列 $\sum \eta$ の白色正規分布雑音

「非定常未知関数学習アルゴリズムの定式化」

上記の非定常未知関数を学習するに当り、未知要素として z_k と \mathbf{A} があり、これをサンプリング情報 $\{(\theta_0, y_0), (\theta_1, y_1), \dots\}$ により推定しなければならぬ。
いま、合成状態ベクトル X_k および観測行列 $M(\theta_k)$ をつぎのように構成する。

$$X_k \triangleq \begin{bmatrix} z_k^1 \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^p \\ \phi_{11} \phi_{12} \dots \phi_{1p} \\ \phi_{21} \phi_{22} \dots \phi_{2p} \\ \vdots \\ \phi_{p1} \phi_{p2} \dots \phi_{pp} \end{bmatrix}$$

; n 次元未知合成状態ベクトル, $n = p^2 + p$

$$M(\theta_k) \triangleq \underbrace{(g^1(\theta_k) \quad g^2(\theta_k) \quad \dots \quad g^p(\theta_k))}_{p^2 \text{個}} \quad 0 \dots 0$$
 ; $1 \times n$ 観測行列

上記の X_k を用いて (3-3.2), (3-3.3) 式を変形すれば、

V_k ; 平均値零, 分散 V_k の白色正規分布雑音

$$V_k \cong \sigma_{\xi}^2 + \delta^2$$

δ^2 ; 未知関数の有限項展開近似に伴なう等価的観測雑音の分散増分

かくして (3-3.4), (3-3.5) 式に 2 次近似法フイルタを適用すれば, 展開係数が未知段間推移する非定常未知関数の学習が可能となる。さらにこの場合, 観測行列が入力サンプルの既知関数として与えられているので, 合成状態ベクトル X_k の推定誤差の分散行列 $C_{k/k}$ は, 入力サンプル変数 $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k\}$ の既知関数となり, 従つてこれを評価基準とした最適入力サンプル θ_k^* を逐次決定することができる。すなわち,

$$\theta_k^* ; \min_{\theta_k \in \Theta} \text{tr} [C_{k/k}(\theta_k)] \quad \text{--- (3-3.6)}$$

ただし,

Θ ; 入力サンプル領域

もし未知関数が定常関数であるときには,

$$X_k \cong (\alpha_k^1, \alpha_k^2, \dots, \alpha_k^p), \quad M(\theta_k) \cong (g^1(\theta_k), \dots, g^p(\theta_k)) \quad \text{として} \\ \text{(3-3.4), (3-3.5) 式は}$$

$$X_{k+1} = X_k \quad \text{--- (3-3.7)}$$

$$y_k = M(\theta_k) X_k + V_k \quad \text{--- (3-3.8)}$$

となり, 単に線形系の状態推定に帰着される。

「計算例」 (1) 定常未知関数の学習例

$$f(\theta) = \sum' \sqrt{2\pi} + \sum^2 \cos \theta + \sum^3 \cos 2\theta + \sum^4 \cos 3\theta + \sum^5 \sin \theta + \sum^6 \sin 2\theta + \sum^7 \sin 3\theta$$

$$X_k \cong Z = (2.0 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5)' \quad ; \text{定数未知展開係数ベクトル,}$$

$$M(\theta_k) = (1/\sqrt{2\pi} \cos \theta_k \cos 2\theta_k \cos 3\theta_k \sin \theta_k \sin 2\theta_k \sin 3\theta_k)$$

$$\Theta = \{-3.0, -2.8, -2.6, \dots, 0.0, \dots, 2.6, 2.8, 3.0\} ; \text{離散の入力サンプル領域}$$

先験初期値

$$\delta^2 = 0 ; V_k = \sigma_y^2 = 1.0$$

$$\hat{X}_{0/-1} = 0, C_{0/-1} = \begin{bmatrix} 20^2 & 5^2 & 0 \\ & 5^2 & \\ 0 & & 5^2 \end{bmatrix}$$

計算結果を, 確率近似法による学習結果と共に Fig. 3-3-1 に示す。

(2) 非定常未知関数の学習例

$$f_k(\theta) = \sum_k' / \sqrt{2\pi} + \sum_k^2 \cos \theta + \sum_k^3 \cos 2\theta + \sum_k^4 \sin \theta + \sum_k^5 \sin 2\theta$$

$$Z_{k+1} = \phi \cdot \Pi Z_k + W_k, \quad \Pi : \text{単位行列}$$

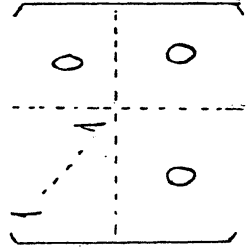
$$Z_0 = (2.0 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5)' , \quad \phi = 1.2$$

$$X_0 = (2.0 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1.2 \ 1.2 \ 1.2 \ 1.2 \ 1.2)' \quad ; \text{初期値}$$

$$M(\theta_k) = (1/\sqrt{2\pi} \cos \theta_k \cos 2\theta_k \sin \theta_k \sin 2\theta_k \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$\Theta = \{-3.0, -2.8, -2.6, \dots, 0.0, \dots, 2.6, 2.8, 3.0\} ; \text{離散の入力サンプル領域}$$

$$\delta^2 = 0 \quad V_k = \sigma_y^2 = 1.0 \quad W_k =$$



の学習推定の結果^{を示す}。この計算結果からわかるように、 n 次近似法フイタルタによれば確率近似法では処理し難い関数学習を、非線形系状態推定として整然としたアールゴリズムで実行でき、かつ、収束速度、学習結果の点からみても良好な学習結果を得ることができ。さらに、未知展開係数の未知遷移特性を種々に規定すれば、かなり多様な非定常未知関数の学習も可能となる。さらに Fig. 3-3-3 の示すところによれば、多変数未知関数の学習が確率近似法とは格段に速い収束でもつて行なえることがわかり、ここに提案した関数学習法は、広く未知関数学習制御や、極値探索問題にも適用しうるものと考えられる。なお、有限項に展開できないう未知関数の学習に対しては、展開係数の推定のみならず有限項展開近似に伴う学習誤差をも推定していく方法が考えられるべきで、これについては今後の研究課題とした。

3・4 動的遷移系による未知損失関数の学習探索

制御系合成に際し、当初より状態値や操作量を決定していき、 n 次形式)が設計規範として与えられ、それを基にして操作量を決定していくことが普通行なわれている。一方、特定の操作量と状態値が実現しなれば、それに対する損失とか効率の具体的な数値が把握できないう、すなわち状態値などに対する損失関数とか効率関数には不明である場合もまた学習制御の重要な課題である。後者に対して、静的な場合は最適化制御における山登り法のように、利得を大にする方向を探索しつつ最大傾斜の途を辿つて頂点へできるだけ速く接近させる試行錯誤法が広く用いられている。上記の問題を解くに当り、状態遷移に動特性を伴う場合には、実現状態値、操作量に対し逐次的に出現した特定の損失値を、単に局所的な勾配探索のみを用いるのではなく、大域的な未知損失関数の学習探索に

用いれば、動的最適化学習制御の問題として一般化することが可能である。これについて一般的な考察を進めるためにはさらに検討すべき多くのものを含んでいるが、その損失関数が、たまたま n 次形式あるいはガウス関数というような関数形式で近似できることだけが判つて、その中のパラメーターが未知であるような場合には、恰も評価関数の中の係数が未知で、実現評価関数値を観測情報の逐次入力とした推定問題のようなる形となる。ここにいう未知関数は制御の規範ではあるが、操作並の事前合成に用いられる従来の意味の既知評価関数ではなく、制御の過程において学習探索されながら、自ら明らかとなり、信頼比重が次才に増加していく制御規範として用いられる最初の損失関数である。よつて本問題は本質的に既知評価関数を予め与え、それによつて事前に制御系の設計を完了する問題とは異なる。むしろ未知損失関数の局所的勾配を探索する静的な最適制御の立場を動的最適化の問題にまで拡張し、さらにその山登り法において、山の全貌を探りつつ、その頂点へ向わんとする山登り法へ拡張したものととなっている。われわれは、このような観点より n 次形式およびガウス関数で近似できる未知損失関数の場合について、その関数同定と制御を同時に考察した結果、つぎのようなる非線形推定の問題に帰することとができることを知つた。以下これについて項目別に説明する。

3・4-1 極値探索と未知評価係数推定による最適制御

線形制御系において、状態量と操作量との n 次形式和からなる評価関数が未知評価係数をもち、かつ、極値および状態値が未知であるが、各段ごとの評価値が観測される場合の学習制御について考察する。上記の各未知量推定に際して、観測式は、未知量に關して、 n 次の非線形性を有し、 n 次近似法フィードバックを用いることができ。なお、未知量推定精

度の指標ともいえる誤差分散行列が非線形推定の場合には、状態値の関数になつていふことを考慮して、この誤差分散行列のトレースと制御評価とを線形結合したものを最小にする最適操作量の合成をD. P 法により行なつた。

「問題の設定」

線形離散値系の状態方程式と各段での評価値観測方程式を次式で与える。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + G_k U_k + W_k \quad \text{---(3-4.1)}$$

$$Y_k = (X_k - \pi_k)' Q_k (X_k - \pi_k) + U_{k-1}' H_k U_{k-1} + V_k \quad \text{---(3-4.2)}$$

制御の評価関数をつぎの2次形式で与える。

$$J_N = \sum_{k=1}^N E \{ (X_k - \pi_k)' Q_k (X_k - \pi_k) + U_{k-1}' H_k U_{k-1} \} \quad \text{---(3-4.3)}$$

ここで、

X_k ; N_x 次元状態値 (未知)

Φ_k ; $N_x \times N_x$ 状態遷移行列

π_k ; N_x 次元極値 (未知)

Q_k ; $N_x \times N_x$ 状態値の正定値評価係数

U_k ; p 次元操作量

G_k ; $N_x \times p$ 駆動行列

Y_k ; 観測値 (スカラー)

H_k ; $p \times p$ 操作量の正定値評価係数 (未知)

W_k ; 平均値 0, 分散 R の N_x 次元白色正規分布雑音

V_k ; 平均値 0, 分散 S の 1 次元白色正規分布雑音

R 段までに得られた観測値 y_1, y_2, \dots, y_k により X_k, π_k, Q_k, H_k を推定し、さらに (3-4.3) 式と後述の誤差分散行列とを考慮して最適操作量の合成を行なう。

「問題の解法」

X_k, Y_k, Q_k, H_k の各要素により，つぎのように結合ベクトル X_k を構成する。

$$X_k \triangleq (X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^{n_x}, Y_k^1, Y_k^2, \dots, Y_k^{n_y}, Q_k^1, Q_k^2, \dots, Q_k^{n_q}, H_k^1, H_k^2, \dots, H_k^{n_h})'$$

ここで， Y_k, Q_k, H_k の遷移は既知とし， $Z_k = X_k + n_x(n_x+1)/2 + p(p+1)/2 = n$ とすると X_k の遷移式，観測式は次のように書き換えられる。

$$X_{k+1} = f(X_k, U_k) + W_k \quad \text{---(3-4-4)}$$

$$Y_k = h(X_k, U_{k-1}) + V_k \quad \text{---(3-4-5)}$$

ここで， $W_k = (W_k', 0)'$ ， $V_k = V_k$

(3-4-4)，(3-4-5) 式に 2 次近似法フィルタを適用することにより，逐次推定式が得られる。また，操作量を決定する際に必要な $C_{i+1/k+1}$ ($i=k, k+1, \dots, N-1$; N : 制御段数) は次のようになる。ただし $C_{k+1/k+1}$ は (2-2.17) 式を用いる。(次式では， $i=k+1, k+2, \dots, N-1$)

$$C_{i+1/k+1} = f_x(\hat{X}_{i/k+1}, U_i) C_{i/k+1} f_x'(\hat{X}_{i/k+1}, U_i) + P_i + W_i \quad \text{---(3-4.6)}$$

$$\hat{X}_{i+1/k+1} = f(\hat{X}_{i/k+1}, U_i) + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^m \varphi_j \tau_j [f_{x x'}(\hat{X}_{i/k+1}, U_i) C_{i/k+1} \quad \text{---(3-4.7)}$$

$$(P_i)^{lm} = \frac{1}{\sigma} \tau_l [f_{x x'}(\hat{X}_{i/k+1}, U_i) C_{i/k+1} f_{x x'}^m(\hat{X}_{i/k+1}, U_i) C_{i/k+1} \quad \text{---(3-4.8)}$$

$C_{i+1/k+1}$ は $k+1$ 段目に進んだ時点での誤差分散行列であるが， $f(X_k, U_k)$ が線形の場合 k 段目に使用される操作量 U_k の関数になつてゐる。そこで，次に述べる D.P 法により操作量 U_k を決定する。

「推定誤差分散行列を考慮した最適操作量の合成」

非線形推定においては，誤差分散行列が状態値の予測値の関数になる。したがつて，最適操作量としては，誤差分散行列のトレースと制御評価関数とを，重み α_i を考慮して合んだ次の評価を最小にするものを用いる。

$$\begin{aligned}
 J_{N-k} &= \min_{U_k, \dots, U_{N-1}} J_{N-k}^* && \text{--- (3-4.9)} \\
 &= \min_{U_k, \dots, U_{N-1}} E \left[\sum_{i=k+1}^N [\alpha_i \text{tr } C_i / r_{k+1} + (1 - \alpha_i) \{ (X_i - Y_i) Q_i (X_i - Y_i) + U_i H_i U_i \}] \right] && \text{--- (3-4.10)} \\
 &= \min_{U_k} E \left\{ \alpha_{k+1} \text{tr } C_{k+1} / r_{k+1} + (1 - \alpha_{k+1}) \left\{ (X_{k+1} - Y_{k+1}) Q_{k+1} (X_{k+1} - Y_{k+1}) + U_k H_{k+1} U_k \right\} \right. && \text{--- (3-4.11)} \\
 &\quad \left. + J_{N-k-1}^* \right\}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha_i = (N-i)/N$ 、また J_{N-k}^* は \hat{Q}_i/k 、 \hat{H}_i/k により表わす。 $(i = k+1, \dots, N)$
 (3-4.11) 式の右辺最終項には未来観測値による推定が含まれるから、これらを K 段までの情報に基づいた推定値で近似して $\partial J_{N-k}^* / \partial U_k = 0$ により J_{N-k}^* を最小にする最適操作量を求める。

「例題」 純粋 n 次系の学習制御

系:
$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^1 \\ X_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^1 \\ X_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} (U_k + W_k)$$

観測:
$$Y_k = \begin{bmatrix} X_k^1 - Y_k^1 \\ X_k^2 - Y_k^2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} g_k^{11} & g_k^{12} \\ g_k^{21} & g_k^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^1 - Y_k^1 \\ X_k^2 - Y_k^2 \end{bmatrix} + R_k (U_{k-1})^2 + V_k$$

未知量の極値、評価係数が一定値であるとすると、結合ベクトル は次のようになる。

$$X_k = (X_k^1 \ X_k^2 \ Y_k^1 \ Y_k^2 \ g_k^{11} \ g_k^{12} \ g_k^{21} \ g_k^{22} \ R_k)'$$

$h_x (X_i / r_{k+1})$ が U_k の 2 次式となり、(3-4.11) 式、(3-4.12) 式ならびに (2-17) 式の形より $\partial J_{N-k}^* / \partial U_k = 0$ は U_k に関する 9 次代数方程式となり、これから極値をとる操作量を求め、それらを J_{N-k}^* に代入して J_{N-k}^* を最小にする 1 つのものを最適操作量 U_k^0 とする。

初期値 $X_0 = [20.0, 10.0, 50.0, 0.0, 2.0, 1.0, 3.0, 4.0]$

先験値 $X_0\% = [2.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.2, 0.1, 0.3, 0.4]$

先験分散 $C_0\% = (X_0 - X_0\%)' / 10.0$

についての結果を Fig. 3-4-1, Fig. 3-4-2 に図示する。

「検討」

ここで考察している制御モデルにおいて，観測式は未知量に關して非線形になつていために，推定の評価と制御評価に対し時間的に變化する重みを考慮した新たな評価関数を導入した。その結果，初期制御階段において，急速な未知量推定が実行され，後段においては，制御に重点をおいたた操作量が合成され，全体として合理的な学習制御がなされている。今後の課題としては，同定と制御の均衡を考慮した評価の最適選定法が残されている。

3.4.2 評価が未知ガウス関数である場合の非線形探索

一般に制御問題には前述の2次形式評価がよく用いられているが，実際にはガウス関数で近似できる評価基準も多いと考えられる。しかも，ガウス関数の場合，多峰性評価を示す可能性ももつている。そこで，ここでは実現評価値を観測値として，この種の未知評価関数を推定する問題について考察する。観測式の非線形性は，前の適用例よりさらに高くなつてゐる。推定の手法としては，⁽⁶⁾前例と同様に2次近似法フイルタと誤差分散行列のトレースを最小にする操作量決定法を用いる。

「問題の設定」

状態方程式および観測方程式を次の形とする。

$$X_{k+1} = f^*(X_k, u_k) + w_k \quad \text{--- (3-4-12)}$$

$$y_k = \alpha_k \exp[-(X_k - r_k)^2] p_k(X_k - r_k) + v_k \quad \text{--- (3-4-13)}$$

ここで、

X_k ; n_x 次元状態値 (未知) α_k ; 未知パラメータ (スカラ)

Γ_k ; n_x 次元極値 (未知) P_k ; $n_x \times n_x$ 未知パラメータ

u_k ; p 次元入力 y_k ; 観測値 (スカラ)

w_k ; 平均値 0, 分散 R の n_x 次元白色正規雑音

v_k ; 平均値 0, 分散 S の白色正規雑音

k 段までに得られた観測値 y_1, y_2, \dots, y_k により未知量 $X_k, \Gamma_k, \alpha_k, P_k$ を推定する。

「問題の解法」

未知量 $X_k, \Gamma_k, \alpha_k, P_k$ の各要素により結合ベクトル X_k を構成する。

$$X_k = [X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^{n_x}, \Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{n_x}, \alpha_k, P_k^1, \dots, P_k^{n_x}]'$$

X_k の遷移方程式は次式により記述される。

$$X_{k+1} = f(X_k, u_k) + w_k \quad \text{---(3-4-14)}$$

ここで未知量 Γ_k, α_k, P_k は既知の遷移特性に従うものとする。

次に、(3-4-13) 式は未知量 X_k の非線形関数として次のように書くことができる。

$$y_k = g(X_k) + v_k \quad \text{---(3-4-15)}$$

従つて (3-4-14), (3-4-15) 式に 2 次近似法フィルタを適用すると逐次推定式が得られる。

「最適同定入力合成」

前の適用例と同様に、未知量推定精度の指標としての誤差分散行列が操作量の関数になる。そこで、 k 段目の操作量として $\text{tr } C_{k+1/k+1}$ を最小にするものを用いる。

「例題」

一次系について考察する。

系; $X_{k+1} = X_k + U_k + W_k$

観測; $Y_k = \alpha_k \exp[-\beta_k(X_k - r_k)^2] + V_k$

未知量 $X_k, r_k, \alpha_k, \beta_k$ により結合ベクトル X_k を構成する。すなわち

$$X_k = [X_k, r_k, \alpha_k, \beta_k]'$$

X_k に関する遷移式は次式により表わせる。

$$X_{k+1} = f(X_k, U_k) + W_k$$

ここで r_k, α_k, β_k は一定値であるとする。また $f(X_k, U_k) = [X_k + U_k, r_k, \alpha_k, \beta_k]'$,

$W_k = [w_k, 0, 0, 0]'$ である。

初期値 $X_0 = [2.0, 3.0, 4.0, 5.0]'$, 先験値 $X_{0\%} = [0.0, 1.0, 2.0, 3.0]'$

先験分散 $(C_{0\%})^d = 4.0$ についての結果を Fig.3-4-3, Fig.3-4-4, Fig.3-4-5 に示す。

「検討」

従来の手法では推定が困難であつたガウス関数のごとき高次の非線形関数推定が、上述の手法を駆使することにより容易になつた。さらに多次元、多峰性への拡張が期待される。

4. 結論

本研究は、非線形系の推定規範として不偏推定値をとつて、誤差平均値零とし推定分散を最小にするような補正項とゲインをもつ、観測に対する線形フィルタを構成している。またその導出過程においては近似的に正規分布を仮定し、3次モーメント0, 4次モーメントは分散の3次式で表わされるものとして考慮しているが、それ以上の高次モーメントは無視している。これでも例題の計算結果からわかるように、線形近似法に比べれば格段により推定を行なうことができ、種々の非線形同定問題に適用できることを知つた。しか

し非線形性が大となればなる程，確率密度関数の正規分布からの変形は増大し，これがかなり大きな影響を与えることが予想される。このような場合，3次以上の高次モーメント導入をどのような形でどの程度までの近似で行なうかなど，基本式の導出ならびに近似計算手法について幾多の問題が残されている。連続系に対しては Kushner の基本的研究²¹⁾があり，これと Athans 法との関連を明らかにし離散値系推定に適用することとも，上記の問題点を考究するうえからは必要であると思われ。さらにフィルタ構成の根本形式として，観測値についての線形フィルタのみでよいかについては幾多の疑問がある。一般的にいて，観測値について非線形，具体的に近似するとすれば観測値に対する多項式近似も当然考えられ得るべきである。先験初期値，特に先験分散の選定については，線形系に対して導出した最適選定法をそのまま非線形系にも適用しうるものかどうか，今後の研究を必要とする。また推定規範として，以上のように誤差平均値を零にする不偏推定値をとるか，あるいは事後確率最大点をとるべきか，収束の速さを，計算手順とあいまいな基本的な検討されるべきであろう。一方，多次元大シミュレーションに論じられる傾向にあり，階級分割的推定を行なうに当つてもこれらの中に混在する線形，非線形を分離し，計算の能力負荷予測の予測，各種の予測，未知パラメータ推定問題がかなり多く，これらがさらに深く考慮される場合にはおのづから非線形推定の形にならざるを得ないので，工学的見地からも非線形推定法の速やかな確立が切に望まれる次第である。

参 考 文 献

- (1) H. Cox:IEEE Trans Automatic Control AC-9, 5(1964)
- (2) K. W. Jenkins & R. J. Roy:JACC 624(1966)
- (3) 辻, 裕 :才10回自動制御連合講演会 128 (昭42)
- (4) 辻, 裕 :昭43電氣四学会連大 2377
- (5) 辻, 橋本 :昭44電氣四学会連大 2845
- (6) 辻, 久保田 :昭44電氣四学会連大 2844
- (7) M. Athans, R. P. Wishner & A. Bertolini:JACC 364(1968)
- (8) 辻, 高田 :九州大学工学集報 42 747 (昭44)
- (9) 辻, 川添 :昭44電氣四学会九州支部連大 431
- (10) 辻, 川添 :才12回自動制御連合講演会 151 (昭44)
- (11) 辻, 久保田 :昭44電氣四学会九州支部連大 430
- (12) 辻, 久保田 :昭45電氣四学会連大 講演予定
- (13) R. E. Kalman:ASME Trans Journal of Basic Engineering 35(1960)
- (14) M. A. Aizerman:Automatika i Telemekhanika 25 1546(1964)
- (15) 辻, 熊丸 :才12回自動制御連合講演会 176 (昭44)
- (16) D. R. Vander Stoep:JACC 884(1968)
- (17) 辻, 富松 :昭44電氣四学会九州支部連大 429
- (18) 辻, 富松 :才12回自動制御連合講演会 128 (昭44)
- (19) 辻, 富松 :昭45電氣四学会連大 講演予定
- (20) 辻, 川添 :昭43電氣四学会九州支部連大 424
- (21) H. J. Kushner:IEEE Trans Automatic Control AC-12 546(1967)

付 録

非線形連続系に対する Adams 2次近似法ファイルタ※

1. 系の構成
- 状態方程式 ; $\dot{X}_t = f(X_t)$ — (A-1)
- 出力方程式 ; $Y_t = h(X_t)$ — (A-2)
- 状態観測は $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ において雑音付加のもとで離散的に行なり。
- 観測方程式 ; $y_k = h(X_k) + V_k$ — (A-3)
- ただし

$$y_k \triangleq y_{t_k}, \quad X_k \triangleq X_{t_k}$$

2. 2次近似法ファイルタの構成

「定義」

- (1) X_{t_k}/t_k ; 観測情報 $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ に基づく X_t の予測値 ($t_k \leq t < t_{k+1}$)
- $\hat{X}_{t_k}/t_k \triangleq \hat{X}_{k/R}$; 推定値 (ファイルタ)
- $\hat{X}_{t_{k+1}}/t_k \triangleq \hat{X}_{k+1/R}$; 一段予測値 $\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1} - 0$

※ 以下の諸記号は，殊に定義しない限り本文と同じものとする。

$$(2) \quad E t_k / t_k \cong X_{t_0} - \widehat{X}_{t/t_k} \quad (t_k \leq t < t_{k+1}) \quad ; \quad \text{予測誤差}$$

$$E t_k / t_k \cong C_{k/R}$$

$$E t_{k+1} / t_k \cong C_{k+1/R}$$

$$(3) \quad \text{Cov } E t_k / t_k \cong C_{t/t_k} \quad (t_k \leq t < t_{k+1}) \quad ; \quad \text{予測誤差分散行列}$$

$$C_{t_k/t_k} \cong C_{k/R}$$

$$C_{t_{k+1}/t_k} \cong C_{k+1/R}$$

「仮定」

(1) 初期状態 $X_{t_0} = X_0$ は，平均値 \widehat{X}_{0/t_1} 分散行列 C_{0/t_1} の正規分布として先験的に与える。

(2) 非線形関数 $f(X_t), h(X_t)$ は X_t に関して少なくとも 2 階微分可能な連続関数

(3) $E t_k / t_k \quad (t_k \leq t < t_{k+1}, k=0, 1, 2, \dots)$ の分布は近似的に正規分布である

(4) \widehat{X}_{t/t_k} は不偏推定値である。すなわち

$$E \widehat{X}_{t/t_k} = 0, \quad E \dot{C}_{t/t_k} = 0$$

\widehat{X}_{t/t_k} は，つぎの微分方程式に従うものとする。

$$\dot{\widehat{X}}_{t/t_k} = f(\widehat{X}_{t/t_k}) + \mu(t/t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k=0, 1, 2, \dots \text{---(A-4)}$$

$$\widehat{X}_{t_k/t_k} = \widehat{X}_{k/R}$$

ここで，

$\mu(t/t_k) ; f(X_t)$ の非線形性を考慮した補正項

$\mu(t/t_k)$ はつぎの手順で決定される。

いま $f(X_t)$ を $t_k \leq t < t_{k+1}$ において， \widehat{X}_{t/t_k} の近傍で 2 次の項までテーラー展開すれば，(A-1) は

$$\dot{X}_t \simeq f(\hat{X}_t/t_k) + f_X(\hat{X}_t/t_k)(X_t - \hat{X}_t/t_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i (X_t - \hat{X}_t/t_k) f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) \\ \times (X_t - \hat{X}_t/t_k) \quad \text{--- (A-5)}$$

(A-4), (A-5) 式と定義 (2) より

$$\dot{C}_t/t_k = f(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i C_t/t_k f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k - \mu_t/t_k \quad \text{--- (A-6)}$$

また, 仮定 (4) より

$$E\{f_X(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k\} \simeq f_X(\hat{X}_t/t_k) E C_t/t_k = 0 \quad \text{--- (A-7)}$$

$$E\{C_t/t_k f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k\} = E\{tr[f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k C_t/t_k]\} \\ \simeq tr[f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) E C_t/t_k C_t/t_k] = tr[f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k] \quad \text{--- (A-8)}$$

(A-7), (A-8) 式および仮定 (4) を用いて, (A-5) 式より μ_t/t_k は近似的に

$$\mu_t/t_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i tr[f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k] \quad \text{--- (A-9)}$$

よつて,

$$\dot{X}_t/t_k = f(\hat{X}_t/t_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i tr[f_{XX}^i(\hat{X}_t/t_k) C_t/t_k] \quad \text{--- (A-10)}$$

つきに, C_t/t_k のみたす微分方程式を求めらる。定義より

$$C_t/t_k = E C_t/t_k C_t/t_k$$

微分して,

$$\dot{C}_t/t_k = E(C_t/t_k C_t/t_k + C_t/t_k \dot{C}_t/t_k) \quad \text{--- (A-11)}$$

一方 (A-6), (A-9) 式より

$$\dot{C}t/t_k = f_X(\hat{X}t/t_k) C t/t_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i t_r [f_{X^i}(\hat{X}t/t_k) (C t/t_k \otimes t/t_k - C t/t_k)]$$

— (A-12)

仮定 (3) より

$$E \{ \text{tr} [f_{X^i}(\hat{X}t/t_k) C t/t_k \otimes t/t_k] \} \approx 0 \quad \text{— (A-13)}$$

従つて, (A-10) ~ (A-13) 式より

$$\dot{C}t/t_k = f_X(\hat{X}t/t_k) (C t/t_k + C t/t_k f_X(\hat{X}t/t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}$$

— (A-14)

$$C t_k/t_k = C k/k$$

予測値 $\hat{X}t_{k+1}/t_k = \hat{X}k+1/k$ および予測誤差分散行列 $C t_{k+1}/t_k = C k+1/k$ は, (A-10), (A-14) 式の連立微分方程式を, 初期条件 $\hat{X}t_k/k = \hat{X}k/k, C t_k/t_k = C k/k$ のもとで解くことにより求められる ($t_k \leq t < t_{k+1}$)。

3. 2次近似法フィルタ方程式の導出

$\hat{X}t_{k+1}$ の推定値 $\hat{X}t_{k+1}/t_{k+1} = \hat{X}k+1/k+1$ を次式で与える。

$$\hat{X}k+1/k+1 = \hat{X}k+1/k + K_{k+1} [y_{k+1} - h(\hat{X}k+1/k) - \eta(\hat{X}k+1/k)] \quad \text{— (A-15)}$$

ここで,

K_{k+1} ; フィルタのゲイン行列 ($n \times m$)

$\hat{X}k+1/k$; 前節で求めた予測値 $\hat{X}t_{k+1}/t_k$

$\pi(\hat{X}_{k+1/k})$; $h(X_{k+1})$ の非線形性を考慮した補正項
 $\pi(\hat{X}_{k+1/k})$ はつぎの手順で決定される。
 いま $h(X_{k+1})$ を $\hat{X}_{k+1/k}$ の近傍で 2 次の項までテーラー展開すれば, (A-5) 式は

$$y_{k+1} \simeq h(\hat{X}_{k+1/k}) + h_X(\hat{X}_{k+1/k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i (X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k})' h_{XX}^i(\hat{X}_{k+1/k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k}) \quad \text{--- (A-16)}$$

(A-15), (A-16) 式と定義 (2) より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{k+1/k+1} &\triangleq X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k+1} \\ &= \mathbb{E}_{k+1/k} - K_{k+1} [h_X(\hat{X}_{k+1/k}) \mathbb{E}_{k+1/k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i \mathbb{E}_{k+1/k} h_{XX}^i(\hat{X}_{k+1/k}) \\ &\quad \times \mathbb{E}_{k+1/k} + V_{k+1} - \pi(\hat{X}_{k+1/k})] \quad \text{--- (A-17)} \end{aligned}$$

(A-7), (A-8) 式および仮定 (4) を用いて, (A-17) 式より $\pi(\hat{X}_{k+1/k})$ は近似的に

$$\pi(\hat{X}_{k+1/k}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i \text{tr} [h_{XX}^i(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k}] \quad \text{--- (A-18)}$$

よって,

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_{k+1} \{ y_{k+1} - h(\hat{X}_{k+1/k}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i \text{tr} [h_{XX}^i(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k}] \} \quad \text{--- (A-19)}$$

ここで,

$C_{k+1/k}$; 前節で求めた予測誤差分散行列 $C_{k+1/k}$

つぎに推定誤差分散行列 $C_{k+1/k+1} = C_{k+1/k+1}$ をつぎの手順で求める。定義より

$$C_{k+1/k+1} = E \mathcal{E}_{k+1/k+1} \mathcal{E}_{k+1/k+1}'$$

(A-17), (A-18) 式より

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{k+1/k+1} &= \mathcal{E}_{k+1/k} - K_{k+1} \{ h_{k+1} (\hat{X}_{k+1/k}) \mathcal{E}_{k+1/k} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \psi_i \text{tr} [h_{k+1}^i (\hat{X}_{k+1/k}) \\ &\quad \times (\mathcal{E}_{k+1/k} \mathcal{E}_{k+1/k}' - C_{k+1/k})] + v_{k+1} \} \end{aligned} \quad \text{--- (A-20)}$$

また, 仮定 (3) より

$$E \mathcal{E}_{k+1/k} \mathcal{E}_{k+1/k}' \simeq 0$$

従つて

$$\begin{aligned} C_{k+1/k+1} &= [I - K_{k+1} h_{k+1} (\hat{X}_{k+1/k})] C_{k+1/k} [I - K_{k+1} h_{k+1} (\hat{X}_{k+1/k})]' \\ &\quad + K_{k+1} (v_{k+1} + L_{k+1}) K_{k+1}' \end{aligned} \quad \text{--- (A-21)}$$

ここで,

L_{k+1} ; $h_{k+1} (\hat{X}_{k+1})$ の非線形性を考慮した観測雑音分散の補正項

$$\begin{aligned} L_{k+1} &\triangleq \frac{1}{\alpha} E \left\{ \left[\sum_{i=1}^m \psi_i \text{tr} [h_{k+1}^i (\hat{X}_{k+1/k}) (\mathcal{E}_{k+1/k} \mathcal{E}_{k+1/k}' - C_{k+1/k})] \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\sum_{j=1}^m \psi_j \text{tr} [h_{k+1}^j (\hat{X}_{k+1/k}) (\mathcal{E}_{k+1/k} \mathcal{E}_{k+1/k}' - C_{k+1/k})] \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{--- (A-22)}$$

(A-22) はつぎの補助定理より決定される。

「補助定理」

\mathcal{E} : 平均値零, 分散行列 \mathcal{C} の正規分布ランダム変数

A : $n \times n$ 対称行列

B : $n \times n$ 対称行列

のとき

$$E\{\mathcal{E} \operatorname{tr}[A \mathcal{E} \mathcal{E}']\} = 0 \quad \text{--- (L-1)}$$

$$\begin{aligned} E\{\operatorname{tr}[A \mathcal{E} \mathcal{E}' B \mathcal{E} \mathcal{E}']\} \\ = E\{\operatorname{tr}[A \mathcal{E} \mathcal{E}'] \operatorname{tr}[B \mathcal{E} \mathcal{E}']\} \\ = 2 \operatorname{tr}[ACBC] + \operatorname{tr}[AC] + \operatorname{tr}[BC] \quad \text{--- (L-2)} \end{aligned}$$

$$\text{(L-2) より} \quad (L_{k+1})_{ij}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[h_{XX}^i(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} h_{XX}^j(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k}] \quad \text{--- (A-23)}$$

フィッシャー行列 K_{k+1}^* の最適値 K_{k+1}^* は, 本文 (2-2.15) (2-2.16) 式と同様な形となる。

$$K_{k+1}^* = C_{k+1/k} h_{XX}(\hat{X}_{k+1/k})' [h_{XX}(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} h_{XX}(\hat{X}_{k+1/k})' + V_{k+1} + L_{k+1}]^{-1} \quad \text{--- (A-24)}$$

(A-24) 式を (A-21) 式に代入して次式が得られる。

$$\begin{aligned} C_{k+1/k+1} &= C_{k+1/k} - C_{k+1/k} h_{XX}(\hat{X}_{k+1/k})' [h_{XX}(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} h_{XX}(\hat{X}_{k+1/k})' + V_{k+1} + L_{k+1}]^{-1} \\ &\quad \times h_{XX}(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} \quad \text{--- (A-25)} \end{aligned}$$

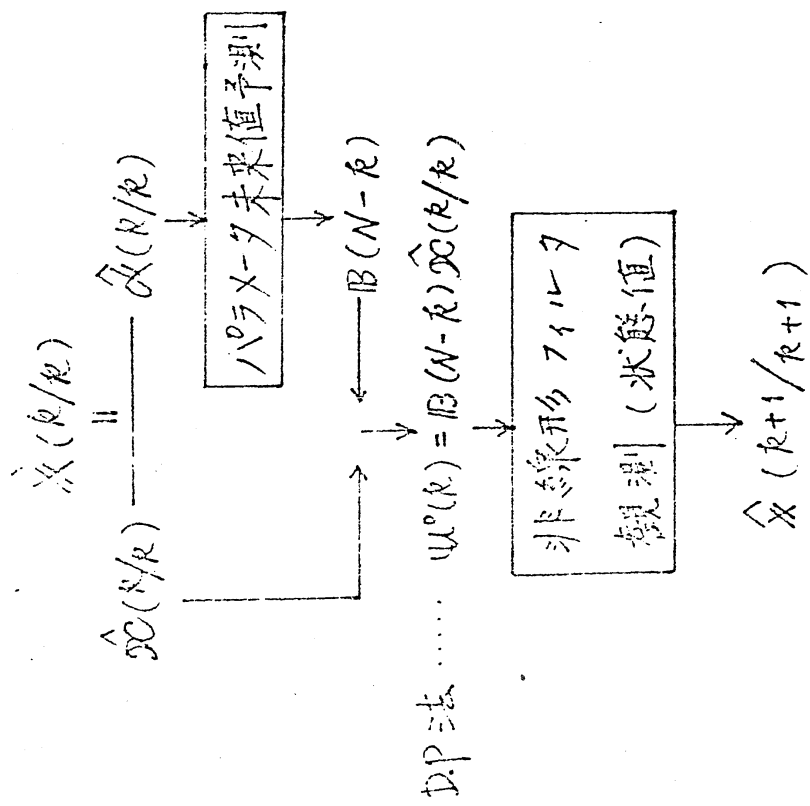


Fig. 3-1-1 学習制御手順

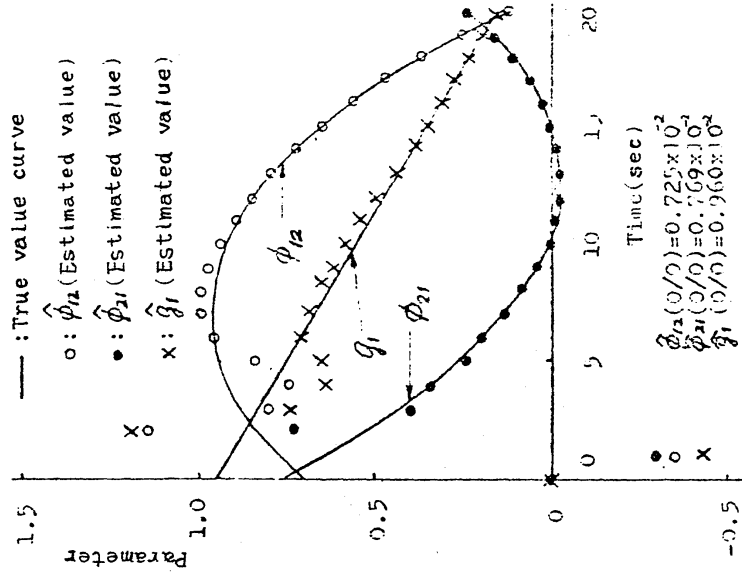


Fig. 3-1-3 パラメータ推定曲線

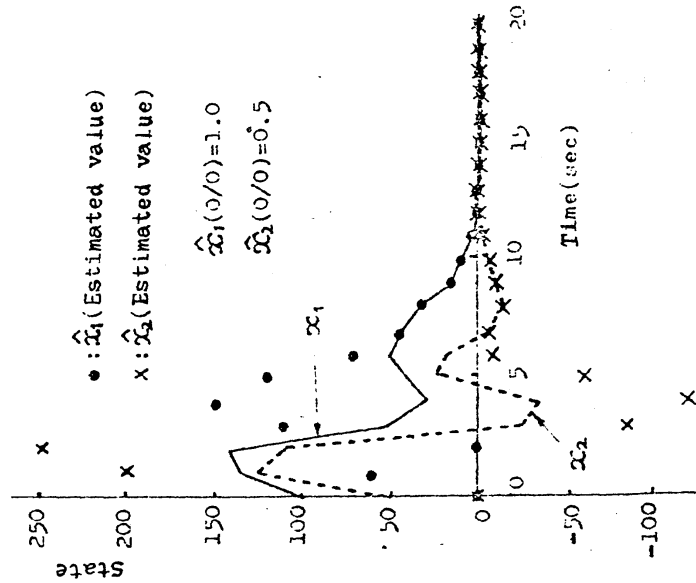


Fig. 3-1-2 状態値推定曲線

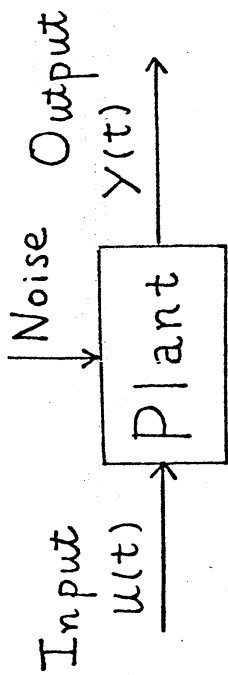


Fig. 3-2-1

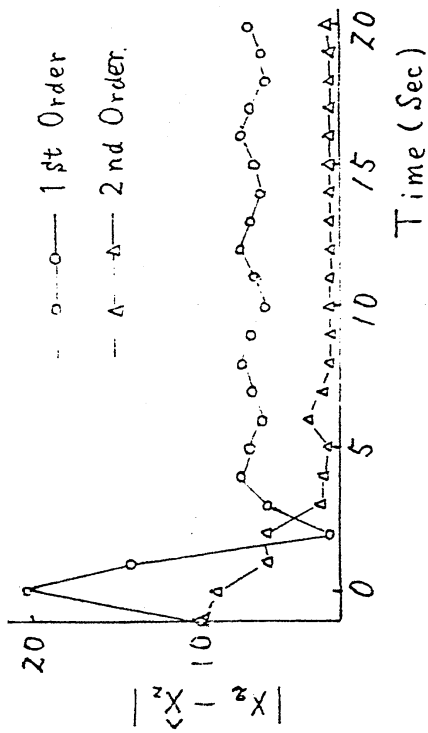


Fig. 3-2-2 状態値の推定

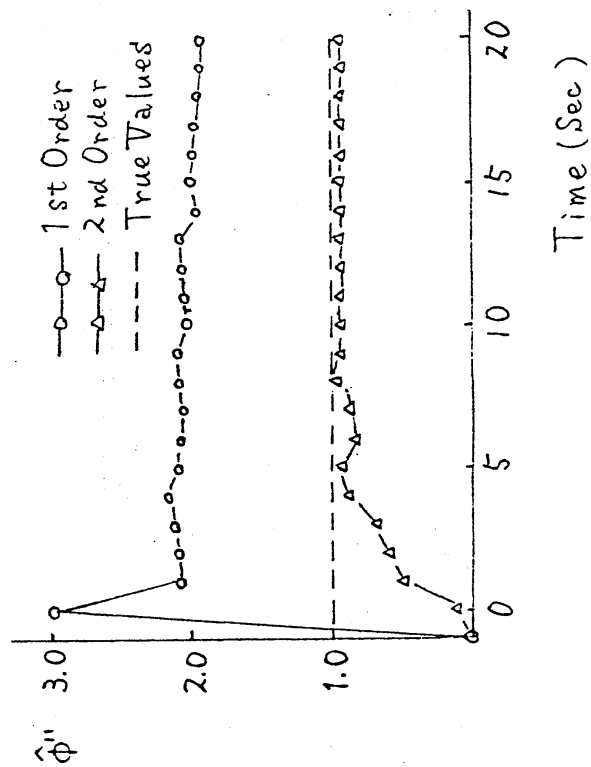
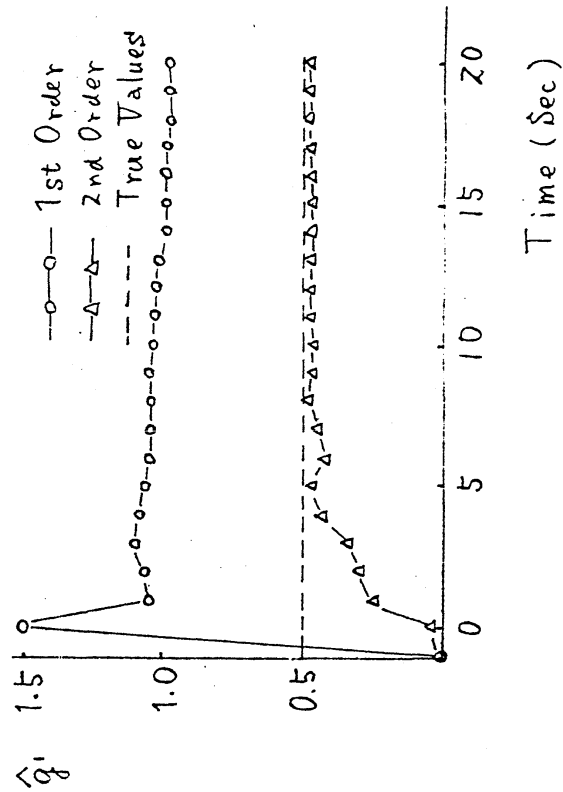


Fig. 3-2-3 パラメータの推定



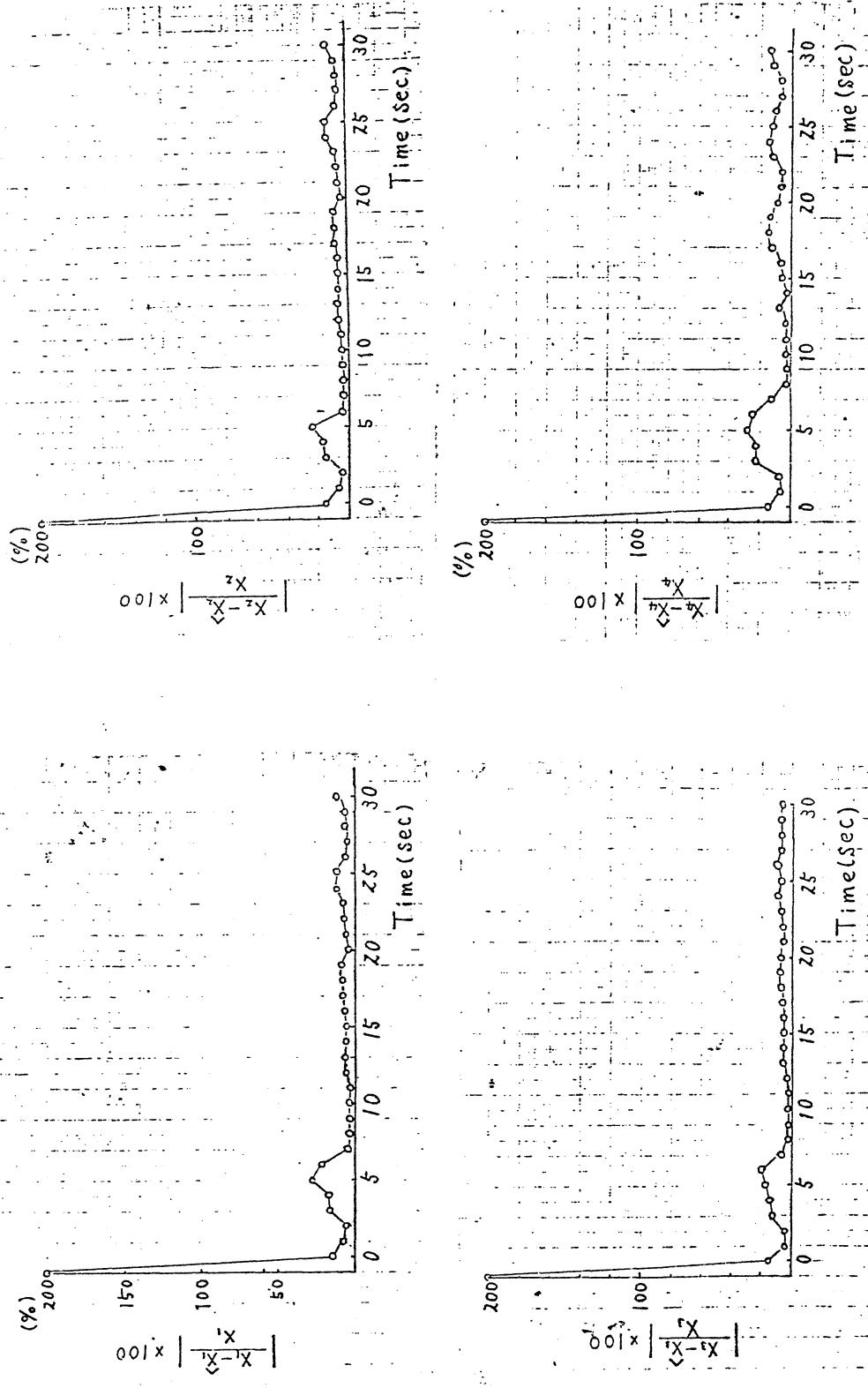


Fig. 3-2-4 状態値の推定

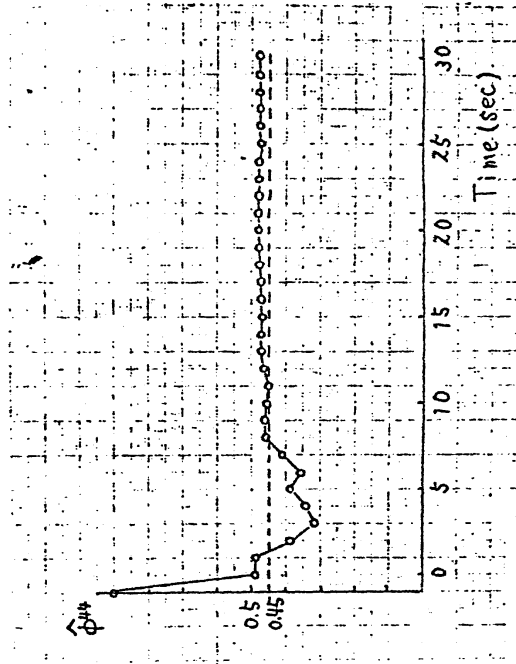
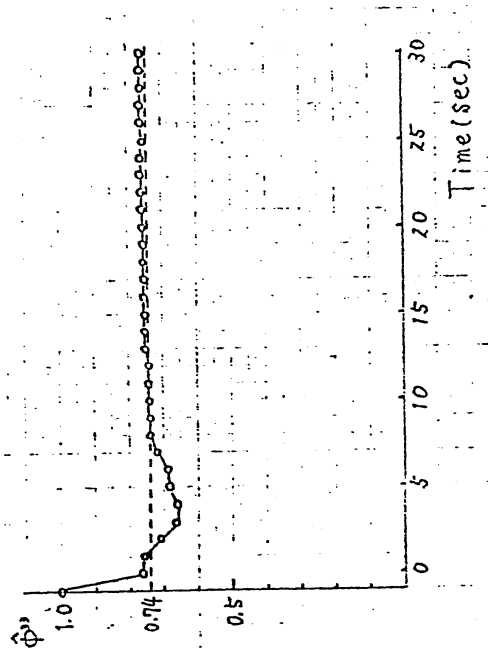
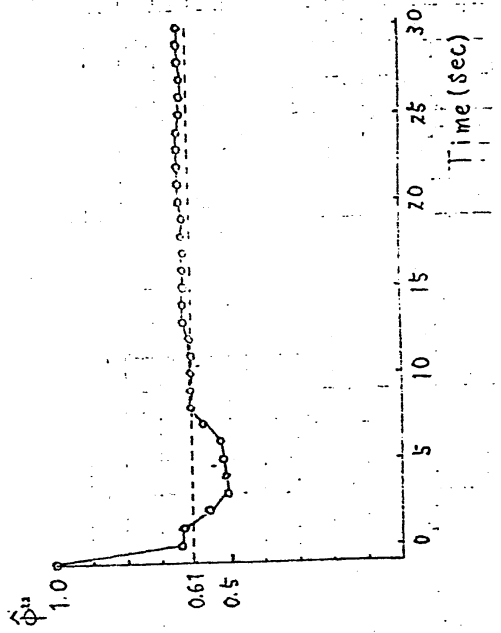
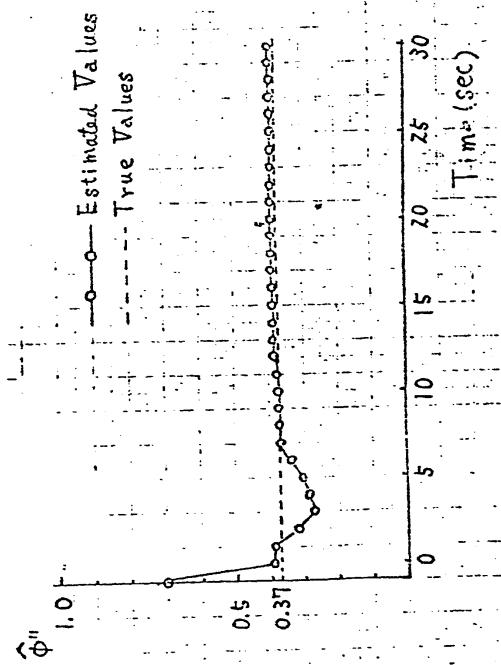


Fig. 3-2-5 パラメータの推定

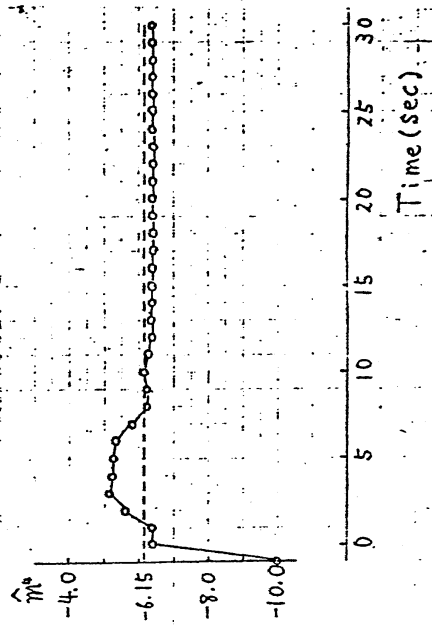
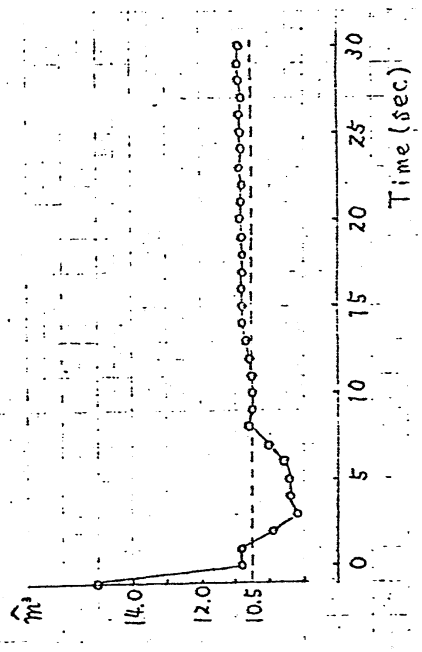
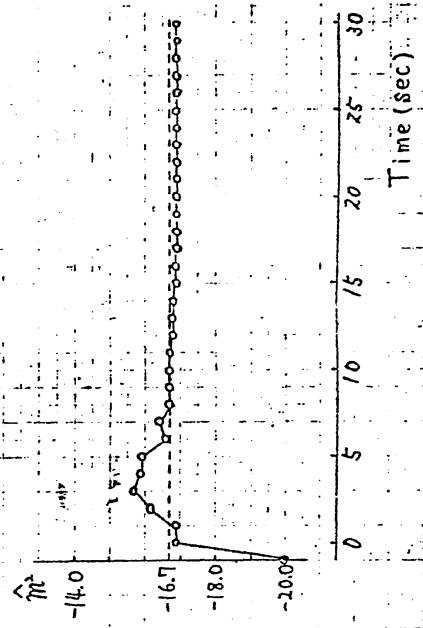
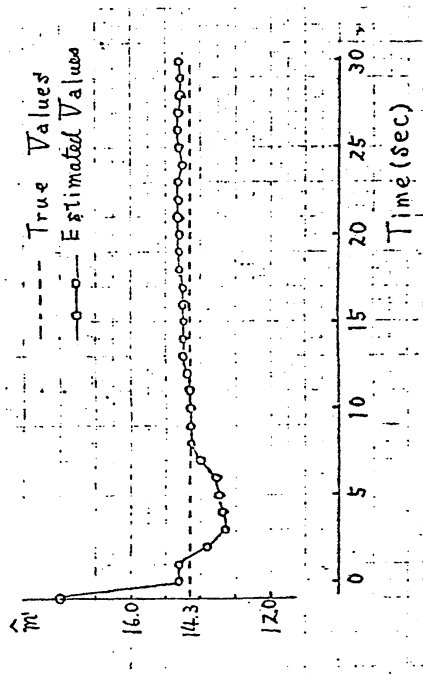


Fig. 3-2-6 観測行列の推定

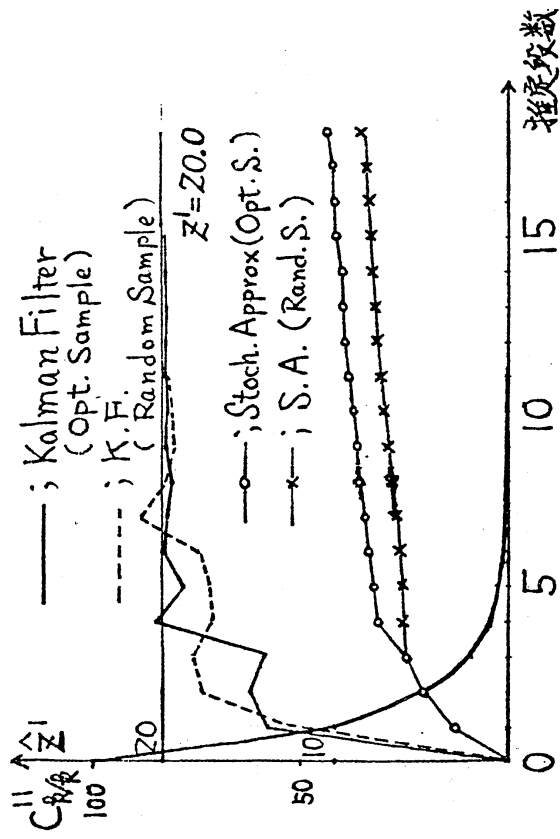


Fig. 3-3-1, 定常未知関数の学習

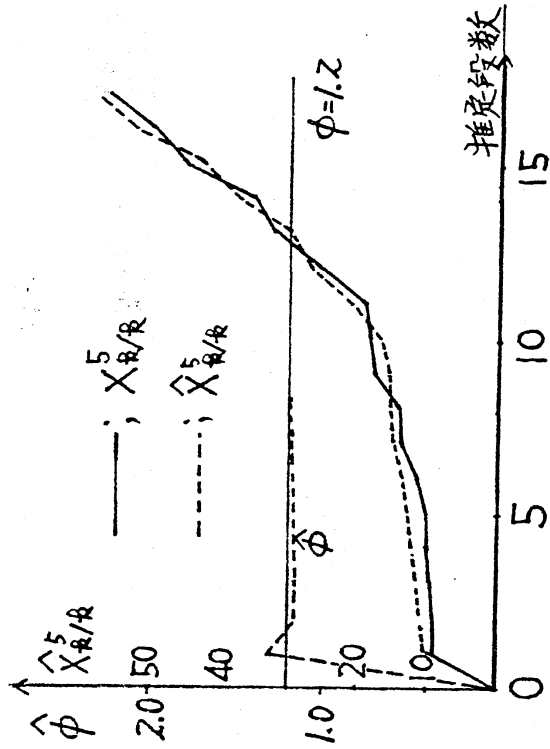


Fig. 3-3-2, 非定常未知関数の学習

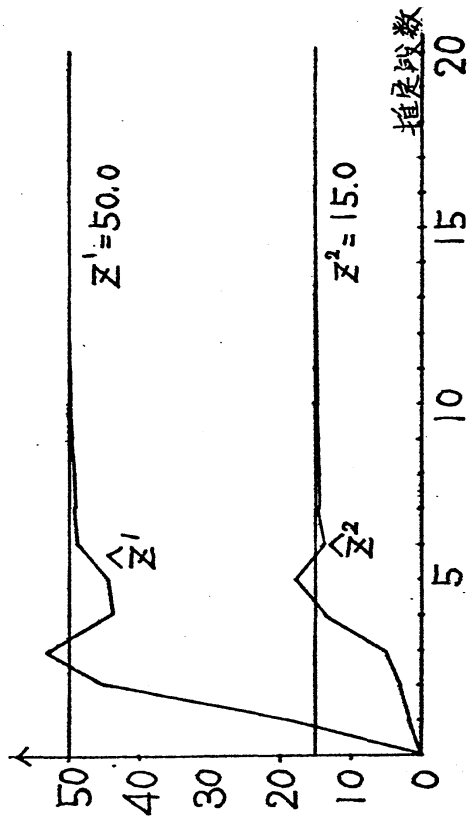


Fig. 3-3-3, 二変数未知関数の学習

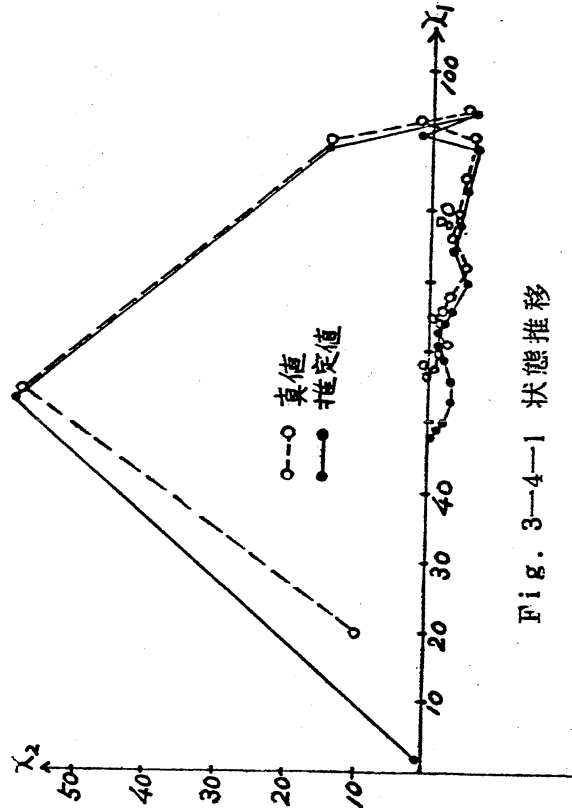


Fig. 3-4-1 状態推移

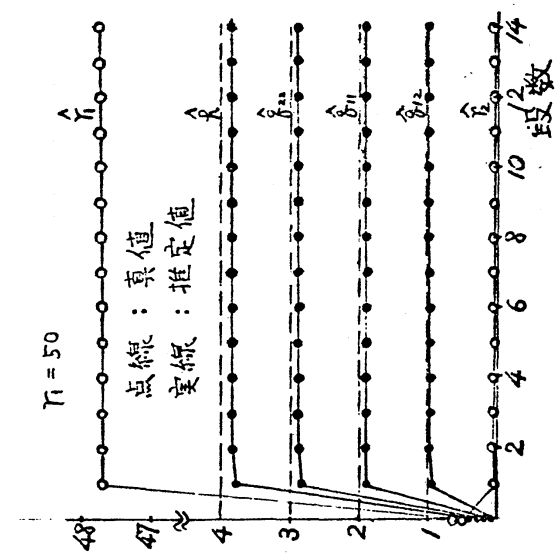


Fig. 3-4-2 パラメータ推定

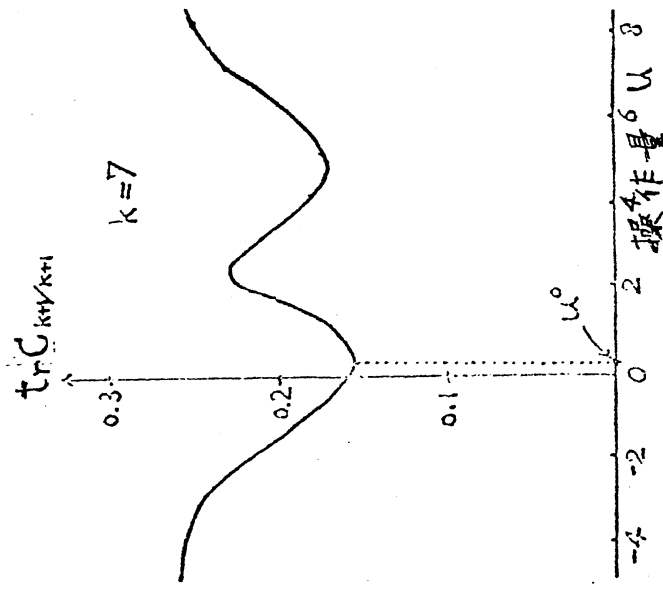


Fig. 3-4-3 操作量 \$\mu_k\$ と \$trC_{k+1/k+1}\$ の関係

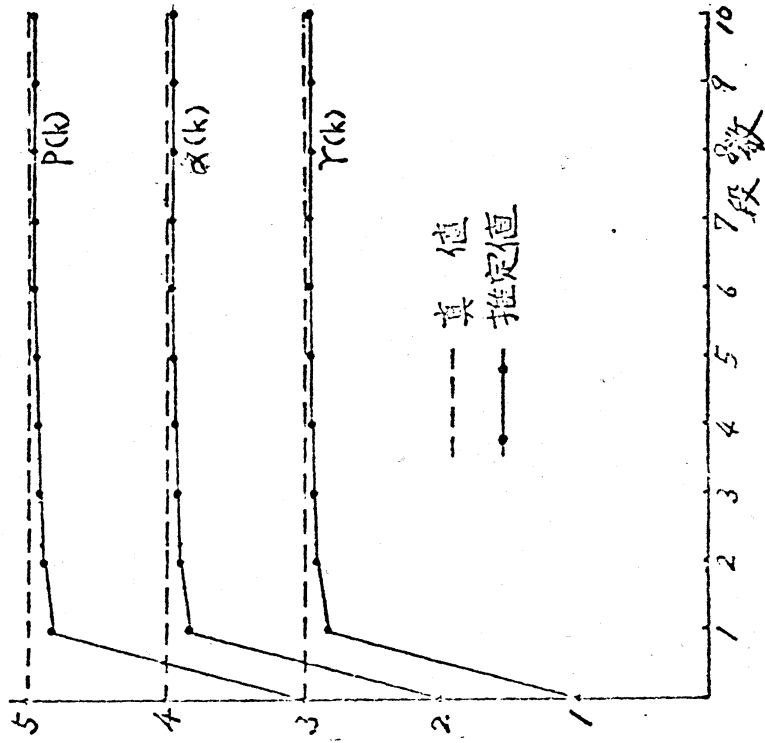


Fig. 3-4-5 パラメータ推定

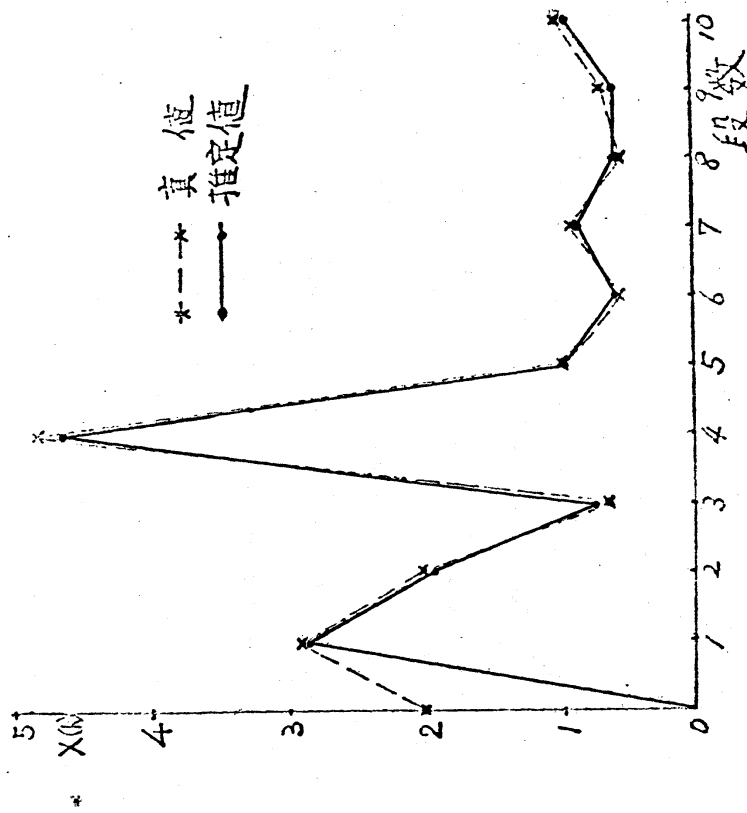


Fig. 3-4-4 最適推定のための状態推移とその推定値