数理解析研究所講究録
第 90 巻 1970 年 110-123

Ⅲ 学習制御

確率的近似法の応用について

九大 理 情報研　深道春男

§1. 序

Robbins-Monro [10] により与えられた確率的近似法は，統計的構造があまり知られていない系において，何らかの意味で最適な解を逐次的に求める一方法であるが，そのアルゴリズムは簡単で，解の近似のどの段階においても過去のサンプルを必要としない点等を考えるとシステムの学習に適していると思われる。

ここでは，二つの問題について確率的近似法の応用を与える．最初に，その特性が線形式で表わされ，かつ外部から雑音が加わるようなシステムにおいて線形式のパラメーターを観測可能な入力（input）と出力（output）の系列を用いて同定する方法を与える。次に，パターン認識の基本的な問題である，線形識別関数のパラメーター（threshold elements）をサンプル列を用いて決定する方法を与える。

§2. 補助定理

ここで考えられる問題において，確率的近似法に基づいたアルゴリズムが妥当であることは次に述べる二つの補助定理を用いることにより証明される。

補助定理1は Blum [3] の結果により，補助定理2は，よく知られた確率変数列に関する収束定理により，容易に証明される。

補助定理1. $\{X_n\}$ は，次の条件をみたす，非負の実数値をとる確率変数の列とする。

条件 (1) $\sup_n E\{X_n\} < \infty$

(2) $E\{X_{n+1} | X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leqq (1+\alpha_n K_1)X_n + \beta_n K_2$

, for $n=1, 2 \cdots$

ここに，K_1, K_2 は非負の定数で，$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ は次の条件をみたす非負の実数列とする．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$

このとき，確率変数 X が存在して，確率1で $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ が成立する。

補助定理2. $\{X_n\}$ は，次の条件をみたす，非負の実数値をとる確率変数の列とする。

条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E\{X_n\} < \infty$

ここに，$\{\alpha_n\}$は $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ なる正数列とする．

このとき$\{X_n\}$の部分列$\{X_{n_p}\}$で，確率1で $\lim_{p\to\infty}X_{n_p}=0$，をみたすものが存在する。

ここで用いられる記号については，ベクトル $\mathbb{a}$，$\mathbb{b}$ に対して $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}$ でそれらの内積，$\|\mathbb{a}\|$，$\|\mathbb{b}\|$ でそれぞれのノルム，$\mathbb{a}^t$，$\mathbb{b}^t$ でそれぞれの転置を，あらわすものとする。

§3. 線形システムのパラメーター同定

時点 n における系の出力 Y_n が次式で与えられる安定な定常線形システムを考える。

(3.1) $Y_n=\mathbb{a}\cdot\mathbb{X}_n+Z_n$

ここに，$\mathbb{a}=(a(1),a(2),\cdots,a(r))^t$ は未知のベクトル・パラメーターで，$\mathbb{X}_n=(X_n(1),X_n(2),\cdots,X_n(r))^t$ は時点 n における入力をあらわす r-次元確率変数で次の条件をみたす。

(3.2) $E\{X_n(i)^4\}=E\{X(i)^4\}<\infty$ $(i=1,2,\cdots r,\ n=1,2\cdots)$

(3.3) $E\{\mathbb{X}_n\mathbb{X}_n^t\}$ $(=E\{\mathbb{X}\mathbb{X}^t\})$ は正値定符号の行列である。ただし，$\mathbb{X}=(X(1),X(2),\cdots,X(r))^t$ は r-次元確率変数とする。Z_n は $\mathbb{X}_n$ とは（確率的に）独立な，次の条件をみたす雑音をあらわす確率変数とする．

(3.4) $E\{Z_n\}=E\{Z\}=0$ $(n=1,2,\cdots\ )$

$$(3.5)\quad \mathrm{Var}\{Z_n\} = \mathrm{Var}\{Z\} < \infty \qquad (n=1,2,\cdots)$$

ここにZは1次元確率変数とする。

また，雑音は各時点で独立におこるものとする。

このとき，独立な入力の列$\{\mathbb{X}_n\}$とそれに対応する出力の列$\{Y_n\}$により，aを同定する問題を考える．そのために，確率的近似法に基づいた次のアルゴリズムを与える。

アルゴリズム1

$$(3.6)\quad \begin{cases} a_1 = \text{任意に与えられた}r\text{-次元ベクトル} \\ a_{n+1} = a_n - \gamma_n(a_n\cdot\mathbb{X}_n - Y_n)\mathbb{X}_n \qquad (n=1,2\cdots) \end{cases}$$

ここに，$\{\gamma_n\}$は $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2 < \infty$をみたす正数列とする。

実際，このアルゴリズムが今の問題で有効であることは次の定理で保証される。

定理1．アルゴリズム1により与えられる$\{a_n\}$に関して，確率1で

$$(3.7)\quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

が成立する。

証明． アルゴリズム1により，

$$(3.8)\quad E\{\|a_{n+1} - a\|^2 | a_n\} = \|a_n - a\|^2 - 2\gamma_n(a_n - a)\cdot E\{\mathbb{X}_n(a_n\cdot\mathbb{X}_n - Y_n)\}$$

$$+\gamma_n^2 E\{\|\mathbb{X}_n\|^2(a_n\cdot\mathbb{X}_n-y_n)^2 \mid a_n\}$$
$$=\|a_n-a\|^2-2\gamma_n(a_n-a)\cdot E\{\mathbb{X}\mathbb{X}^t\}(a_n-a)$$
$$+\gamma_n^2(a_n-a)\cdot E\{\|\mathbb{X}\|^2\mathbb{X}\mathbb{X}^t\}(a_n-a)+\gamma_n^2 E\{\|\mathbb{X}\|^2\}E\{Z^2\}.$$

$A=E\{\mathbb{X}\mathbb{X}^t\}$, $B=E\{\|\mathbb{X}\|^2\mathbb{X}\mathbb{X}^t\}$ とおく。(各行列の存在性は条件 (3.2), (3.3) より明らか) $\lambda_0(A)$ を A の最小固有根, $\lambda_1(B)$ を B の最大固有根とすると, A は正値定符号, B は非負値定符号の行列であるから,

$$(3.9)\quad 0<\lambda_0(A)\|a_n-a\|^2\leqq(a_n-a)\cdot A(a_n-a),$$

$$(3.10)\quad 0\leqq(a_n-a)\cdot B(a_n-a)\leqq\lambda_1(B)\|a_n-a\|^2.$$

これらを (3.8) 式に代入すると,

$$(3.11)\quad E\{\|a_n-a\|^2 \mid a_n\}\leqq\|a_n-a\|^2-2\gamma_n\lambda_0(A)\|a_n-a\|^2+\gamma_n^2\lambda_1(B)\times\|a_n-a\|^2+\gamma_n^2 K$$

ここに, $K=E\{\|\mathbb{X}\|^2\}\cdot E\{Z^2\}$ とする. (仮定 (3.2), (3.4), (3.5) より K は非負の定数である)

今, $u_n=\|a_n-a\|^2$ とおくと, (3.11) より,

$$(3.12)\quad E\{u_{n+1}\}\leqq(1-2\gamma_n\lambda_0(A)+\gamma_n^2\lambda_1(B))E\{u_n\}+\gamma_n^2 K.$$

$\{\gamma_n\}$ に関する仮定及び (3.9), (3.10) より, 自然数 n_0 が存在して, $n\geqq n_0$ なるすべての自然数 n に対して,

$$(3.13)\quad \lambda_1(B)\gamma_n^2-2\lambda_0(A)\gamma_n<-\lambda_0(A)\gamma_n\ (<0).$$

これを (3.12) に代入すると,

$$(3.14)\quad E\{u_{n+1}\}\leqq(1-\gamma_n\lambda_0(A))E\{u_n\}+\gamma_n^2 K$$

$$\leqq E\{U_n\} + \gamma_n^2 K$$
$$\leqq E\{U_{n_0}\} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n^2 K \quad , \text{for } n \geqq n_0 \ .$$

これより，$E\{U_n\} < \infty$ $(n=1, 2, \cdots n_0)$ に注意すると，

(3.15) $\sup_n E\{U_n\} < \infty$.

また，(3.11) より，

(3.16) $E\{U_{n+1} | U_1, U_2, \cdots, U_n\} \leqq (1+\gamma_n^2 \lambda_1(B)) U_n + \gamma_n^2 K$.

従って，$\{U_n\}$ に補助定理1を適用すると，確率変数 U が存在して，確率1で

(3.17) $\lim_{n\to\infty} U_n = U$.

次に $U=0$（確率1で）を云う。

(3.12) 式の両辺を $n=1$ から $n=m$ まで加えると，

(3.18) $0 \leqq E\{U_{m+1}\} \leqq E\{U_1\} - \sum_{n=1}^{m} 2\gamma_n \lambda_0(A) E\{U_n\} + \sum_{n=1}^{m} \gamma_n^2 (E\{U_n\}+K)$.

故に，

(3.19) $\sum_{n=1}^{m} 2\gamma_n \lambda_0(A) E\{U_n\} \leqq E\{U_1\} + \sum_{n=1}^{m} \gamma_n^2 (E\{U_n\}+K)$.

この式と $\{\gamma_n\}$ に関する仮定より

(3.20) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n E\{U_n\} < \infty$.

従って，補助定理2により，$\{U_n\}$ の部分列 $\{U_{n_p}\}$ で，確率1で

(3.21) $\lim_{p\to\infty} U_{n_p} = 0$

をみたすものが存在する。

(3.17) と (3.21) より $U=0$ が云える。即ち定理1の (3.7) が成

立する。（証明終り）

また，収束の速度に関しては次の結果が得られる。

定理2. (3.6)において $\gamma_n = \frac{1}{n}$，$E\{\|\mathbb{X}\|^2\}E\{Z^2\} > 0$，かつ $\lambda_0(A) > 1$ ならば，

$$(3.22) \quad E\{\|a_n - a\|^2\} \leqq \frac{E\{\|\mathbb{X}\|^2\}E\{Z^2\}}{n(\lambda_0(A)-1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

証明　(3.14)の最初の不等式にChung[4]の補助定理を適用すると容易に得られる。

注. アルゴリズム1は，安定な系(3.1)のパラメーター同定法として与えられたものであったが，(3.1)を次の系におきかえても有効である。

$$(3.23) \quad Y_n = a(n)\cdot\mathbb{X}_n + Z_n$$

ここに，$a(n)$は時点nでの未知のベクトル・パラメータで，次の条件をみたす。

$$(3.24) \quad E\{\|a(n+1) - a(n)\|\} = O(\delta_n)$$

ただし，$\{\delta_n\}$は非負の実数列で $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ をみたす。また，$\mathbb{X}_n, Z_n, Y_n$ に関する仮定は(3.1)の場合と同様であるとする。この妥当性の証明は定理1の証明方法をいくらか

modifyすれば出来るので省略する。

§4. 識別ベクトルの決定法

$\mathbb{X}$は確率分布$P_{\mathbb{X}}(\cdot)$をもつr-次元確率変数で，次の仮定(4.1)，(4.2)がみたされているとする。

仮定(4.1) あらかじめ与えられた正数θに対して，集合 $S_\theta=\{a \mid a\cdot\mathbb{X}\geq\theta$（確率1で），$a\in E_r\}$は空でない。（ただし，$E_r$は$r$-次元ベクトル空間とする）

仮定(4.2) 正数αが存在して $\mathrm{Prob}\{\|\mathbb{X}\|\leqq\alpha\}=1$が成立する。

このときS_θの元（識別ベクトル）の元をいかにして見つけるかという問題について考える。（このような問題が，十分な線形分離性の仮定された問題と関連していることはHoribe [7]等により示されている）そのために，$\{\mathbb{X}_n\}$を確率分布$P_{\mathbb{X}}(\cdot)$に従って，独立に観測されるr-次元確率ベクトルの列とし，$\{a_n\}$を次のようにして与えられるベクトルの列とする。

アルゴリズム2

$$(4.3)\quad \begin{cases} a_1=\text{任意に与えられた}r\text{-次元ベクトル} \\ a_{n+1}=a_n+\gamma_n\left(1-\mathrm{sgn}(a_n\cdot\mathbb{X}_n-\theta)\right)\mathbb{X}_n \quad (n=1,2\cdots) \end{cases}$$

ここに，$\{\gamma_n\}$に関する仮定はアルゴリズ1の場合と同じとす

る。また，

$$(4.4)\quad \begin{aligned} sgn(\varphi) &= 1 \quad \text{for } \varphi \geqq 0 \\ sgn(\varphi) &= 0 \quad \text{for } \varphi < 0 \end{aligned}$$

とする。

このとき，(4.3)で定義される $\{a_n\}$ に関して，次の定理が成立する。

定理3. 仮定(4.1),(4.2)のもとで，アルゴリズム2により与えられる $\{a_n\}$ に関して，確率1で

$$(4.5)\quad \lim_{n\to\infty} \inf_{a\in S_\theta} \| a_n - a \|^2 = 0$$

が成立する。

証明. (4.3)よりすべての $a\ (\in S_\theta)$ に対して，

$$(4.6)\quad \| a_{n+1} - a \|^2 = \| a_n - a \|^2 + 2\gamma_n (a_n - a)\cdot \mathbb{X}_n (1 - sgn(a_n\cdot \mathbb{X}_n - \theta)) + \gamma_n^2 \|\mathbb{X}_n\|^2 (1 - sgn(a_n\cdot \mathbb{X}_n - \theta))^2 .$$

仮定及び(4.4)より，すべての $a\ (\in S_\theta)$ に対して，確率1で，

$$(4.7)\quad (a_n - a)\cdot \mathbb{X}_n (1 - sgn(a_n\cdot \mathbb{X}_n - \theta)) \leqq 0$$

及び

$$(4.8)\quad \|\mathbb{X}_n\|^2 (1 - sgn(a_n\cdot \mathbb{X}_n - \theta))^2 \leqq \alpha^2$$

それ故，すべての $a\ (\in S_\theta)$ に対して，確率1で

(4.9) $\|a_{n+1}-a\|^2 \leqq \|a_n - a\|^2 + \gamma_n^2\alpha^2$.

これより，$Y_n = \inf_{a\in S_\theta}\|a_n - a\|^2$ とおくと，

(4.10) $E\{Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\} \leqq Y_n + \gamma_n^2\alpha^2 \quad (n=1,2\cdots)$.

また，(4.9) より，任意に与えられた $\bar{a}\,(\in S_\theta)$ に対して，確率1で

(4.11) $\|a_{n+1}-\bar{a}\|^2 \leqq \|a_1 - \bar{a}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2\alpha^2 \quad (n=1,2,\cdots)$.

この不等式と $\{\gamma_n\}$ に関する仮定から $\{a_n\}$ は(確率1で)有界なベクトル列であることが分る.

それ故，

(4.12) $\sup_n E\{Y_n\} < \infty$.

(4.10), (4.12) より，確率変数 Y が存在して，確率1で，

(4.13) $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$. （補助定理1による）

次に $Y=0$ を示す. a を S_θ の元とすると，(4.6) と (4.8) より，

(4.14) $E\{\|a_{n+1}-a\|^2\} \leqq E\{\|a_n - a\|^2\}$

$+ 2\gamma_n E\left\{\int_{a_n\cdot X\leqq\theta}(a_n - a)\cdot X\, P_X(dX)\right\} + \gamma_n^2\alpha^2$.

この式より，

(4.15) $2\sum_{n=1}^{m}\gamma_n E\left\{\int_{a_n\cdot X\leqq\theta}(a - a_n)\cdot X\, P_X(dX)\right\} \leqq E\{\|a_1 - a\|^2\} + \sum_{n=1}^{m}\gamma_n^2\alpha^2$.

ここで，$m\to\infty$ とすると，$\{\gamma_n\}$ に関する仮定より

$$(4.16)\ \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n E\left\{\int_{\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{X}\leqq\theta}(\mathbf{a}-\mathbf{a}_n)\cdot\mathbf{X}\,P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{X})\right\}<\infty \quad .$$

$f(\mathbf{b})=\int_{\mathbf{b}\cdot\mathbf{X}\leqq\theta}(\theta-\mathbf{b}\cdot\mathbf{X})\,P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{X})$ とおくと，仮定より，

$$(4.17)\quad 0\leqq f(\mathbf{a}_n)\leqq\int_{\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{X}\leqq\theta}(\mathbf{a}-\mathbf{a}_n)\cdot\mathbf{X}\ P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{X}) \quad .$$

従って，

$$(4.18)\quad 0\leqq E\{f(\mathbf{a}_n)\}\leqq E\left\{\int_{\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{X}\leqq\theta}(\mathbf{a}-\mathbf{a}_n)\cdot\mathbf{X}\,P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{X})\right\}.$$

それ故，(4.18)より，

$$(4.19)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n E\{f(\mathbf{a}_n)\}<\infty \quad .$$

$\{f(\mathbf{a}_n)\}$ に補助定理2を適用すると，(4.19)により，$\{f(\mathbf{a}_{n_p})\}$ が存在して確率1で次式をみたす．

$$(4.20)\quad \lim_{p\to\infty}f(\mathbf{a}_{n_p})=0 \quad .$$

$\{\mathbf{a}_{n_p}\}$ は確率1で有界なベクトルの列であり，$f(\mathbf{b})$ は仮定(4.2)の下で E_r 上で連続（実際，任意の $\mathbf{b}, \mathbf{b}'(\in E_r)$ に対して $|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{b}')|\leqq 3\alpha\|\mathbf{b}-\mathbf{b}'\|$ が成立する）であるから，(4.20)より，確率1で

$$(4.21)\quad Y_{n_p}=\inf_{\mathbf{a}\in S_\theta}\|\mathbf{a}_{n_p}-\mathbf{a}\|^2\to 0 \quad (p\to\infty) \quad .$$

(4.13)，(4.21)より $Y=0$（確率1で）が云える．即ち定理3が云える．（証明終り）

謝辞. この原稿を作成するにあたり,日頃御指導いただく北川敏男教授,加納省吾教授に感謝いたします。

参考文献

[1] Albert, A.E. and Gardner, L.A., "Stochastic Approximation and Nonlinear Regression." M.I.T. press. Cambrige, Massachusettes (1967).

[2] Bellman, R., "Introduction to Matrix Analysis," McGraw-Hill Book Company Inc. New York (1960).

[3] Blum, J.R., "Multidimentional Stochastic Approximation Methods", Ann. Math. Stat., 25 (1954), pp 737 − 744.

[4] Chung, K.L., "On Stochastic Approximation Methods", Ann. Math. Stat., 25 (1954), pp 463 − 483.

[5] Chung, K.L., " A Course in Probability Theory," Harcourt, Brace & World, Inc. New York (1968).

[6] Ho, Y.C. and Kashyap, R.L., "A Class of Iterative Procedures for Linear Inequalities," J. SIAM. Cont, 4 (1966), pp 112−115.

[7] Horibe, Y., "On an Adaptive Process for Learning Finite Patterns," Kōdai Math. Sem. Rep., 19 (1967), pp 43−52.

[8] Martinez, H.M., "A Convergence Theorem for Linear Threshold Elements," Bull. Math. Biophysics, 27 (1965) pp 153 − 159.

[9] 野田淳彦, "学習的同定法における雑音およびパラメータ変動の影響," 計測と制御 8 (1969) pp 303-312.

[10] Robbins, H. and Monro. S., "A Stochastic Approximation method", Ann. Math. Stat., 22 (1951) pp 400-407.