

ある数値積分公式について

伊理正夫*, 森口繁一*, 高澤嘉光*

1.	問題提起	2
2.	分点と重み	5
3.	誤差の漸近評価	7
4.	数値例	13
	補遺	15

* 東京大学工学部

1. 問題提起

$f(x)$ を区間 $[0, 1]$ において連続でかつ区間 $(0, 1)$ に於いて十分な回数連続微分可能な実数値函数であるとす。

この時、よく知られている Euler-Machaurin の公式 (B_n は Bernoulli 数, R_m は剰余項):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{N-1} f\left(\frac{n}{N}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \sum_{n=1}^{m-1} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{N^{2n}} \left[f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0) \right] + R_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

は、右辺の積分 $\int_0^1 f(x) dx$ の近似値を数値計算するのに、区間 $[0, 1]$ を N 等分して台形公式を用いたときの誤差(打切誤差)の性質を知るのに便利の場合が多い。実際、もし

$$\left. \begin{aligned} f^{(2n-1)}(0) &= f^{(2n-1)}(1), \quad n=1, \dots, m \\ f^{(2m+1)}(0) &\neq f^{(2m+1)}(1) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

であれば、誤差の主要項の大きさは $O(N^{-2(m+1)})$ であることがみられる。

ところが、 $f(x)$ が無限回微分可能で、しかもすべての奇数次の導函数の区間 $[0, 1]$ の両端における値が等しい場合には、(1.1) は誤差評価のために便利でない。そのような場合には、(1.1) の右辺の総和記号の中の項はすべて 0 にな

り、誤差は分割数 N のべきに比例するのではなくて、もっと別の挙動を示すのが——そして、それも N の増大と共に N のべきほどよりは遙かに速やかに小さくなるのが——普通である。たとえば、 $f(x)$ が、周期1の周期函数の場合にはよくこのようになるとが起る。

このことを積極的に利用することを目指して、次のような数値積分公式を考えることができる。まず

$$Q = \int_0^1 \exp\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right] dt$$

$$\left(\equiv 0.00702\ 98584\ 06609\ 65623\ 92412\ 70530\ 3401\dots \right)$$

(1.3)

とおき、函数 $\varphi(t)$ を

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(t) dt, \quad \varphi'(t) \equiv \frac{1}{Q} \exp\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right]$$

(1.4)

により定義する(図1)。そして、変数 $x (=0 \sim 1)$ を $x = \varphi(t)$ により変数 $t (=0 \sim 1)$ に変換すると、 $f(x)$ の区間 $[0, 1]$ の上での積分は次のように表わされる:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(t) dt$$

(1.5)

$$\text{ただし} \quad g(t) \equiv f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

(1.6)

ここで函数 $f(x)$ が、区間 $(0, 1)$ において無限回連続微分可能で、しかも区間 $[0, 1]$ の両端でも連続であるか、或いは

両端の近傍では高々 x^α , $(1-x)^\beta$ (α, β は -1 より大きいある定数) 程度の特異性しか示さなければ, 函数 $f(t)$ は区間 $[0, 1]$ において無限回連続微分可能で, しかも区間の両端において函数値ならびにすべての導函数の値が 0 になる:

$$f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1) = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.7)^*$$

そこで, $f(x)$ の積分を数値計算するのに, (1.5) 式の右辺に台形則を適用すれば, かわち, 公式

$$\left. \begin{aligned} S_N &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} w_m^{(N)} f(x_m^{(N)}), \\ x_m^{(N)} &= \varphi\left(\frac{m}{N}\right), \quad w_m^{(N)} = \varphi'\left(\frac{m}{N}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

により S_N を計算すれば, かなり精度の高い結果が得られるのではないかと, しかも, 区間の両端における $f(x)$ の特異性もある程度抑圧できるのではないかと, ということが予想される。

この予想を理論的考察および数値実験によって定量的に確かめ, 数値積分公式 (1.8) の性質を明らかにすることが, 本論文の目的である。

*補遺 2 に示すように, t が十分小さい所では, $\varphi(t) \sim t^2 \varphi'(t)$ であるから $\varphi(t)^\alpha \varphi'(t) \sim t^{2\alpha} \varphi'(t)^{\alpha+1}$ である。 t が 1 に近い所でも同様。

2. 分点と重み

数値積分公式 (1.8) を用いるためには、分点の位置 $x_m^{(N)}$ および重み $w_m^{(N)}$, すなわち (1.4) の函数 $\psi(t)$ および $\psi'(t)$ の区間 $[0, 1]$ における値を与える必要がある。区間 $[0, 1]$ を N 分割するとき、 $f(x)$ の値を計算すべき分点の数は $N-1$ である。一般に

$$x_m^{(N)} = 1 - x_{N-m}^{(N)}, \quad w_m^{(N)} = w_{N-m}^{(N)} \quad (2.1)$$

という対称性があり、又ある N について N 分割公式に対する分点と重みの表を与えておけば、 N' が N の約数であるとき、 N' 分割公式に対する分点と重みは、その表の項目を N/N' とびに捨っていくることによって知ることが出来る。この後者の性質を利用して、たとえば、 N 分割のときの数値積分値 S_N が得られている場合、単に、更に N 点における和

$$S'_N = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N w_{2m-1}^{(2N)} f(x_{2m-1}^{(2N)}) \quad (2.2)$$

を計算し、 S'_N と S_N との相加重平均を作ることによって、 $2N$ 分割のときの S_{2N} を求めることができる。*

函数 $\exp\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right]$ を $t=0$ から $t=1$ まで Romberg 式の

* 公式 (1.8) は一見 Gauss 型の数値積分公式と類似しているが後者についてはこのようなことは出来ない。

手法で十分な精度で数値積分し (補遺 1 参照), (1, 3) の Q を求め, として (1, 4) の $\psi'(t)$, $\psi(t)$ の値を t の $\frac{1}{N} = \frac{1}{256}$ ($N=256$) とびの点ごとに計算した結果を表 1 に示す。

3. 誤差の漸近評価

函数 $f(x)$ は、之を実数軸上の区間 $[0, 1]$ で定義されたものであるが、解析的延長によって、その定義域を区間 $(0, 1)$ を含む複素平面（リーマン面）上にある開集合 D_0 にまで拡大することができる場合がある。そのようにして複素平面上の領域 D で定義された函数——やはり同じ f を用いて $f(z)$ を記す——が、2点 $z=0$, $z=1$ を除いた D の各点で正則で $z=0$ および $z=1$ の近傍においては、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= az^\alpha + o(|z|^\alpha) \\ f(z) &= b(1-z)^\beta + o(|1-z|^\beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

という性質を有している場合* について、数値積分公式(1.8)の誤差の評価を試みる。

* $f(z)$ が $z=0$, $z=1$ でも正則な場合は勿論含まれるし、 $z=0$, $z=1$ が $f(z)$ の代数特異点で Puiseux 級数に展開される場合も含まれる。(3.1)の形にならない代数特異点など類似の場合に対しても、しかし、本節以下の議論は適当な変更を加えることによって成立する。

函数 $f(x)$ が上記の性質を有するとき, (1.6) の函数 $g(t)$ は区間 $[0, 1]$ で無限回連続微分可能で (1.7) の性質を有するから, $g(t)$ は絶対一様収束する Fourier 級数

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp[-i2\pi kt] \quad (i=\sqrt{-1}, t \in [0, 1]) \quad (3.2)$$

に展開される。ここで

$$C_k = \int_0^1 g(t) \exp[i2\pi kt] dt \quad (3.3)$$

である。さて一方では, 明らかに

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(t) dt = C_0 \quad (3.4)$$

であり, 他方では, $g(0) = 0$ を考慮すると

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} g\left(\frac{m}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g\left(\frac{m}{N}\right) = C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{pN} + C_{-pN}) \quad (3.5)$$

である。そこで, $N-1$ 点公式 (1.8) の近似誤差 E_N は

$$E_N = S_N - \int_0^1 f(x) dx = \sum_{p=1}^{\infty} (C_{pN} + C_{-pN}) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Re} C_{pN} \quad (3.6)$$

と表わされる。ところで, 以下で求められる C_N の形からわかるように

$$\sum_{p=2}^{\infty} \operatorname{Re} C_{pN} / \operatorname{Re} C_N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (3.7)$$

であるから漸近的に

$$E_N \sim 2 \operatorname{Re} C_N \quad (3.8)$$

であるとみなしてよい。このようにして、我々の数値積分公式(1.8)の誤差評価の問題は、函数 $f(t)$ の区間 $[0, 1]$ における Fourier 係数を求める問題に帰着される。

変数 x と t の間の関係 $x = \varphi(t)$ を複素領域にまで拡張したものは、 $t=0$ と $t=1$ が $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ の真性特異点であるので、相当複雑な写像になるが、図 2(2) に示した複素 z 平面上の台形状の開領域 Δ (ただし、 $\delta = \max(\alpha, \beta)$, θ は π より小さい角度 —— 実は $\tan \theta$ が 4 より少し小さい位の角でよい。) は —— N が十分大きければ —— 写像 $z = \varphi(t)$ により、複素 z 平面の実軸上の区間 $[0, 1]$ を含む十分小さなある近傍に含まれる像領域に写されることは容易に見られる*。この像領域が本節の初めに述べた開集合 D に含まれてしまうように N は十分大きくとられているものとする。

我々の仮定のもとでは、函数 $f(t)$ は $t=0$ と $t=1$ の 2 点を除いて Δ の上で正則であり、また Δ の内部で $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow 1$ のとき $f(t) \rightarrow 0$ である。(したがって、実軸上の積分

* $z=0$, $z=1$ の近くでは、像領域は河重にも重なっている。

$$C_N = \int_0^1 g(t) \exp[i2\pi Nt] dt \quad (3.9)$$

を計算する代りに, $t=0$ から出発して Δ の中を通り $t=1$ に至る任意の経路 C に沿っての複素積分

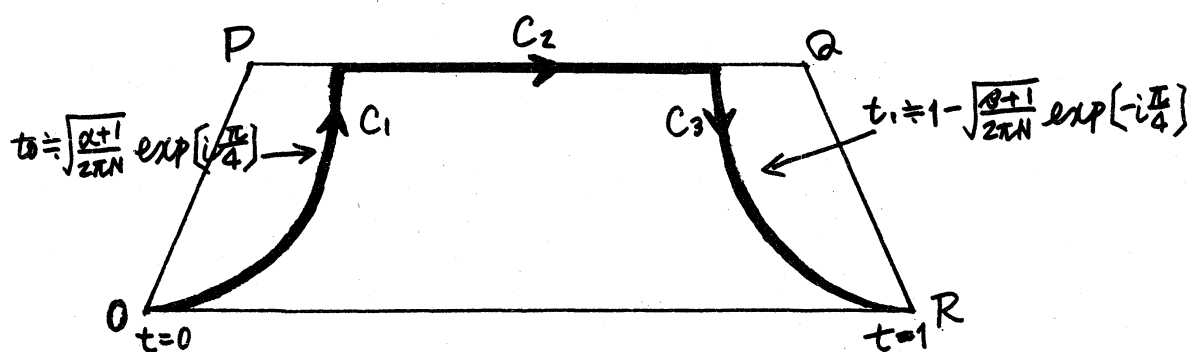
$$C_N = \int_C g(t) \exp[i2\pi Nt] dt \quad (3.10)$$

によって C_N を計算することができる。さらに台形領域 Δ の上底 PQ の上では $f(z)$ の D 内における解析性と $\varepsilon=0$, $\varepsilon=1$ の付近における挙動に対する仮定 (3.1) とを考慮に入れると

$$|g(t) \exp[i2\pi Nt]| = |f(\psi(t)) \psi'(t)| \exp[-2\sqrt{4\pi(\delta+1)N}]$$

$$< O(\exp[-1.5\sqrt{4\pi(\delta+1)N}]) \quad (N \rightarrow \infty) \quad (3.11)$$

であることがわかる。これらの事実に基づいて, C_N (あるいはその実数部) の値の漸近評価式を鞍点法により求めるこ



とができる。詳しい式の計算は補遺3にゆずることにするが $z=0$ の近くで $f(z) \approx a z^\alpha$, $z=1$ の近くで $f(z) \approx b(1-z)^\beta$ であることに注意すると, $g(t) \exp[i2\pi Nt]$ が停留する点(鞍点) t_0 は $\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\pi N}} \exp[i\frac{\pi}{4}]$ の近くと $1 - \sqrt{\frac{\beta+1}{2\pi N}} \exp[-i\frac{\pi}{4}]$ の近くとに, それぞれ1点ずつ (t_0 と t_1) 見出され, それらの点を通って $|g(t) \exp[i2\pi Nt]|$ が最も速やかに減少する道をとると, それぞれ図3の C_1 及び C_3 のような, $t=0$, 及び $t=1$ を通り線分 PQ に交わる経路が得られる(補遺4参照)。それらの交点と間の線分 PQ の部分を C_2 とし, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ を(3.10)の積分路として採用する。 C_1 あるいは C_3 に沿っての積分の値は鞍点 t_0 あるいは t_1 の極く近くの部分のみによって支配され, その実数部の2倍* はそれぞれ $\frac{1}{2} \alpha \in(N, \alpha)$ あるいは $\frac{1}{2} \beta \in(N, \beta)$ となる。ここで

$$E(N, \alpha) \equiv \frac{\sqrt{4\pi}}{(e\alpha)^{\alpha+1}} \cdot \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{(2\pi N)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \exp[-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N}] \cos\left[\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} + \frac{3+4\alpha}{8}\pi\right] \quad (3.12)$$

である。 C_2 に沿っての積分の値は, (3.11)により, N が大きい時には, (3.12)の形のものに比べて無視し得るから, 結局, 我々の数値積分公式(1.8)の誤差 E_N の主要項の—— N が大きい時の——漸近表示として

$$E_N \sim a E(N, \alpha) + b E(N, \beta) \quad (3.13)**$$

が得られる。

以上の結果から次のようなことが観察される。

- (i) 数値積分公式 (1.8) に含まれる誤差は, 被積分函数 $f(x)$ が適当な素直さを有しているならば, 積分区間の両端近くの $f(x)$ の性質によって, ほぼ決定される。
- (ii) 分点の数 $N-1$ を増やす時, 誤差 ε_N は大略 $\exp[-P\sqrt{N}]$ (P はある正の定数) 程度の速さで小さくなる。
- (iii) 積分区間の端 —— 例えば $x=0$ —— で $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = a$ とする時, 誤差 ε_N は α に連続的に依存し, かつ $\alpha < 0$ であっても $-1 < \alpha$ でありさえすれば, $N \rightarrow \infty$ の時 ε_N は相当な速さで 0 に向かう。これは多項式補間に基礎を置く通常の数値積分公式には見られない性質である。

これらの性質とは別に

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} w_m^{(N)} = 1, \quad w_m^{(N)} > 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \max |x_{m+1}^{(N)} - x_m^{(N)}| = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

* 補遺をも参照のこと。(3.8) に注意

** $\alpha \neq \beta$, (例えば $\alpha > \beta$ とする) $\varepsilon_N \sim c \varepsilon(N, \beta)$ とする, $\alpha = \beta$ で $a + b \neq 0$ とする, $\varepsilon_N \sim (a+b) \varepsilon(N, \alpha)$ とする, 等々。しかし $\alpha = \beta$ で $a + b = 0$ の時は $f(z)$ の代りに $\frac{1}{2} [f(z) + f(1-z)]$ を考えて, それが適当な性質を有していると仮定して話を進めればよい。

であることから

(iv) 区間 $[0, 1]$ における任意の連続函数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_0^1 f(x) dx \quad (3.15)$$

である。

ということも認められた。また

(v) 上記の漸近誤差評価が成り立つためには、 $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ 以外における函数 $f(z)$ の特異点は実軸からある程度離れていなければならない；やゝ定量的に表現すれば、複素 z 平面の領域 Δ の $\psi(t)$ による像は複素 z 平面では実軸から約 $\sqrt{\frac{4(r+1)}{\pi N}}$ ($\psi'(\frac{1}{2}) \doteq 3\sqrt{\frac{r+1}{N}}$ ($\psi'(\frac{1}{2}) \doteq 2.6$) 程度の距離の範囲内にあるとみてよいかう、 z 平面上で実軸の区間 $[0, 1]$ から最も近い $f(z)$ の特異点までの距離が δ である時、分割の数 N を $\frac{9(r+1)}{\delta^2}$ より大きく選べば、上記の評価式が成立するとみてよいかう。

4. 数値例

前節 §3 で述べた誤差の各種の性質を数値例について確かめてみるため、我々が行なった実験の中から幾つかを選んで下に示す。

例 1. まず、誤差の N (分点の数 + 1) への依存性を調べ

るために $f(x) = \frac{1}{2}$ をとってみた。この時の誤差 $E_N \equiv S_N - \frac{1}{2}$ と (3.13) による評価 $\frac{1}{2} \varepsilon(N, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon(N, 0) = \varepsilon(N, 0)$ とを比較した結果をまとめると、表2 (および図4の $\alpha=0$ の点および曲線) に示す通りになった。これで見ると、前節の評価法は、かなりよく実際の誤差の振舞をとらえていることが解る。

例2. 誤差の大勢は、区間の両端近くの被積分函数 $f(x)$ の性質によって決定されるということを示す例として、 $f(x) = \frac{1}{2}$ の場合と、 $f(x) = (1+e)^{-1}e^x$ の場合との誤差の比較を表3に示す。前節の評価法によれば、両者とも誤差は $\varepsilon(N, 0)$ 程度であると見積られる。

例3. 積分区間 $[0, 1]$ の両端近くでの被積分函数 $f(x)$ の性質と誤差との関係を調べるために

$$f_{-0.5}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$f_{0.5}(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 1)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2} x(1-x) = \frac{1}{2} (x - x^2)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} x^3(1-x)^3 = \frac{1}{2} (x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6)$$

の数値積分を試みた。結果は表4に示す通りとなった。(一部は図4にも示してある。) 前節の方法によると、これらの函数 $f_\alpha(x)$ に対する誤差は $E_N \sim \varepsilon(N, \alpha)$ と評価される。

補遺1. 定数Qおよび函数 $\psi(t)$ の数値計算

(1.3)で定義される定数Qと(1.4)で定義される函数 $\psi(t)$ を数値計算して分点 $x_n^{(256)}$, 重み $w_n^{(256)}$ を求めるために我々が用いた方法は, 大略, 下記の通りである。まず, Qおよび $\psi(t)$ を新しい函数

$$\psi(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right) dt \quad (\text{A1.1})$$

で表わすと

$$Q = \psi(1), \quad \psi(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(1)} \quad (\text{A1.2})$$

となるから, 最初に函数 $\psi(t)$ の値を0から1まで $h (= \frac{1}{256})$ 間隔で求め, その次に全部の値を $\psi(1)$ で割れば求めるものが得られる。

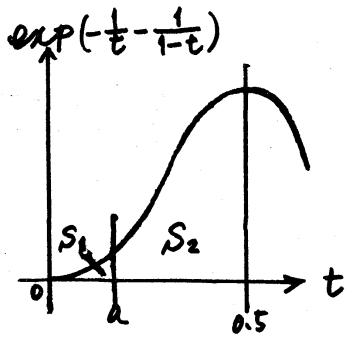
さて, (A1.1)は積分問題であるが, 実際の数値計算ではこれを微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \exp\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right) \quad \psi(0) = 0 \quad (\text{A1.3})$$

に変形して, t を $h (= \frac{1}{256})$ 間隔で0.5まで $\psi(t)$ の値を求める。それより先は(A1.3)の右边が0.5を中心に対称であるから公式

$$\psi(t) = 2\psi(0.5) - \psi(1-t) \quad (\text{A1.4})$$

を使って求めることができる。なお (A1.3) の右辺は、 $t=0$ で特異点になっているが、この処置として、出発点を a だけずらし、 $\psi(a)=0$ とし、 0 と a の間に含まれる点の ψ の値を



全部 0 とすればよい。図のように $t=a$ で分けられた2つの面積を S_1 と S_2 とお。

我々は相対誤差を 10^{-32} の精度で計算を進めたので $a = \frac{3}{256}$ とした。この時、 $S_1 < \frac{1}{2} a \exp(-\frac{256}{3}) = 0.7 \times 10^{-39}$ となり、

この面積は無視できる。

微分方程式 (A1.3) の数値解を求めるのに補外法を適用した。今、ある刻み巾 h で求められた近似解の漸近展開式

$$T(h) = T_0 + a_1 h^{\nu_1} + a_2 h^{\nu_2} + a_3 h^{\nu_3} + \dots \quad (\text{A1.5})$$

のべき列 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ が解っている時、相異なる n 個の h ($h_0 > h_1 > \dots > h_{n-1}$) で求められた $T(h_0), T(h_1), \dots, T(h_{n-1})$ から真の値 T_0 を予測する。これを $T_0^{(n)}$ とする。 $\nu_i = \nu_j$ である時に $T_0^{(n)}$ の誤差は $(h_0 \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_{n-1})^{\nu_i}$ に比例する。したがって $T_0^{(n)}$ のもつ誤差は $|T_0^{(n)} - T_0^{(n+1)}|$ で評価できるので、所望の精度が得られるまで刻み巾の列 h_j を進めて計算を行なってゆけばよい。実際には、微分方程式の数値解法としては中点則を用いたので、 $\nu_j = 2j$ となる。

我々は初めのうち、2倍精度で計算を行っていたが、理論的に、それより先のことが必要になった。東京大学大型計算機センターの4倍精度計算のルーチンを利用した。

補遺2. $\psi(t)/\psi'(t)$ の $t=0$ の付近 ($\text{Re}t > 0$)での漸近展開

$\text{Re}t > 0$ で $|t|$ が十分小さいとき

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^n \exp\left[-\frac{1}{\tau}\right] d\tau &= \int_{1/t}^{\infty} a^{-(n+2)} \exp[-a] da \\ &= \left[-a^{-(n+2)} \exp[-a]\right]_{1/t}^{\infty} - (n+2) \int_{1/t}^{\infty} a^{-(n+3)} \exp[-a] da \\ &= t^{n+2} \exp\left[-\frac{1}{t}\right] - (n+2) \int_0^t \tau^{n+1} \exp[-\tau] d\tau \\ &\sim \left[t^{n+2} - (n+2)t^{n+3} + (n+2)(n+3)t^{n+4} - \dots \right] \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

という関係がある(ただし、積分路は0と t を結ぶ直線分、および0から出発して $1/t$ を通る半直線の $1/t$ から無限遠点までの部分とする)。

$|t|$ が十分小さいとして

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \exp\left[-1 - t - t^2 - t^3 - \dots\right] \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \dots\right) \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

に対して (A2.1) を用いると

である。そこで、

$$t-t_0 = \frac{f^{3/2}}{\sqrt{2(\alpha+1)}} \tau \quad (\text{A3.8})$$

が、実数パラメータ τ (0 の近くを動く) による曲線 C_1 (t_0 の近くの部分) の近似的な表現式となる*。 (A3.8) が曲線 C_1 の、よい近似表現であるための条件は、(A3.7) から見られるように

$$|t-t_0| \ll |f|^{2/3} \quad \text{あるいは} \quad |\tau| \ll |f|^{-1/3} \quad (\text{A3.9})$$

である。一方、 N が十分大きければ (A3.9) が成立する範囲内でも $|\tau|$ が相当大きく — 例えば T まで — とれる。そして (A3.8) でよく近似し得る積分路 C_1 の部分を \tilde{C}_1 と書けば、

$$\int_{\tilde{C}_1} \exp[f(t)-f(t_0)] dt = \frac{f^{3/2}}{\sqrt{2(\alpha+1)}} \int_{-T}^T \exp[-\frac{\tau^2}{2}] d\tau \quad (\text{A3.10})$$

の値は、 T が相当大きければ、

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}_1} \exp[f(t)-f(t_0)] dt &\doteq \frac{f^{3/2}}{\sqrt{2(\alpha+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{\tau^2}{2}] d\tau \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} f^{3/2} \end{aligned} \quad (\text{A3.11})$$

* C_1 としては、 t_0 を通り、 $\text{Im}(f(t)-f(t_0))=0$ なる曲線で、その上では $\text{Re}(f(t)-f(t_0))$ が t_0 において最大になるようなものが選ばれる。この C_1 のより大域的な形を、詳しく補遺4で論じる。

としてよい。また, $\operatorname{Re}[f(t) - f(t_0)]$ が $C_1 - \tilde{C}_1$ においては,
 \tilde{C}_1 の両端におけるより更に小さく (負に大きく) なるから
 $|\exp[f(t) - f(t_0)]|$ は $C_1 - \tilde{C}_1$ の上では無視し得るぐらい小さいと見てよい。そこで

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \exp[f(t) - f(t_0)] dt \\ & \doteq \int_{\tilde{C}_1} \exp[f(t) - f(t_0)] dt \doteq \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \rho^{3/2} \end{aligned} \quad (\text{A3.12})$$

すなわち

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Q^{\alpha+1}} \int_{C_1} \exp[f(t)] dt = \frac{1}{Q^{\alpha+1}} \exp[f(t_0)] \int_{C_1} \exp[f(t) - f(t_0)] dt \\ & \sim \frac{1}{Q^{\alpha+1}} \exp\left[-\frac{2(\alpha+1)}{\rho} - (\alpha+1) + 2\alpha \log \rho\right] \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \rho^{3/2} \\ & = \frac{1}{(eQ)^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{2\pi N}\right)^{\frac{3}{4} + \alpha} \exp\left[-\sqrt{8\pi(\alpha+1)N} e^{-i\frac{\pi}{4}} + i\frac{3+4\alpha}{8}\pi\right] \\ & = \frac{1}{(eQ)^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{2\pi N}\right)^{\frac{3}{4} + \alpha} \exp\left[-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} + i\left\{\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} + \frac{3+4\alpha}{8}\pi\right\}\right] \end{aligned} \quad (\text{A3.13})$$

が得られる。(A3.13) の実数部の2倍を $\mathcal{E}(N, \alpha)$ と記すと
 とすると,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(N, \alpha) &= \frac{1}{(eQ)^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{2\pi N}\right)^{\frac{3}{4} + \alpha} \exp\left[-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N}\right] \cos\left[\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3+4\alpha}{8}\pi\right] \end{aligned} \quad (\text{A3.14})$$

である。

補遺4. 積分路 C_1 の概形

鞍点 t_0 を通る積分路 C_1 の概形は次の通りである。 N が十分大で、 ρ や t_0 が十分小さい所では、 (A3.3) を更に簡略化して

$$f(t) \doteq i2\pi Nt - (\alpha+1)t^{-1} \quad (\text{A4.1})$$

と置いてよい。この時

$$f'(t_0) = 0 \quad (\text{A4.2})$$

を満足する t_0 は

$$t_0 = \rho \equiv \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\pi N}} \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right] \quad (\text{A4.3})$$

である。また

$$f(t) = f(t_0) = i2\pi Nt - \frac{\alpha+1}{t} + \sqrt{8\pi(\alpha+1)N} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \quad (\text{A4.4})$$

となる。そこで

$$t = \sqrt{\frac{\alpha+1}{4\pi N}} (x+iy) \quad (\text{A4.5})$$

により実変数 x, y を導入すると、 t_0 は $(x, y) = (1, 1)$ に対応し

$$\text{Im}\{f(t) - f(t_0)\} = \sqrt{4\pi(\alpha+1)N} \left[\frac{x}{2} + \frac{y}{x^2+y^2} - 1 \right] \quad (\text{A4.6})$$

となる。したがって、 t 平面上における曲線

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_0^t \varphi'(\tau) d\tau \\ &\sim \frac{1}{eQ} \left(t^2 - 3t^3 + \frac{17}{2} t^4 - \frac{205}{6} t^5 + \dots \right) \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

を得る。そこで (A2.2) の右辺に

$$\begin{aligned}1 &= Q \exp\left[\frac{1}{1-t}\right] \exp\left[\frac{1}{t}\right] \varphi'(t) \\ &= Q \exp\left[1+t+t^2+t^3+\dots\right] \exp\left[\frac{1}{t}\right] \varphi'(t) \\ &= eQ \left(1+t+\frac{3}{2}t^2+\frac{13}{6}t^3+\dots\right) \exp\left[\frac{1}{t}\right] \varphi'(t) \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

を掛けて

$$\varphi(t) \sim (t^2 - 2t^3 + 7t^4 - 28t^5 + \dots) \varphi'(t) \quad (\text{A2.5})$$

という漸近展開式を得る。

補遺 3. $\varphi(t)^\alpha \varphi'(t)$ の Fourier 係数の計算

§3で論じた通り, C_N (の実数部の2倍) を求めるためには, $z=0$ の近くで $f(z) \doteq z^\alpha$, $z=1$ の近くで $f(z) \doteq (1-z)^\alpha$ であるとして, それぞれ z 平面上の積分路 C_1 および C_3 に沿っての $f(z) \exp[i2\pi Nt]$ の積分 (の実数部の2倍) を計算すればよい。

$z=1$ の近くについても, 全く同様であるから, $z=0$ の近くについてだけ調べればよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= z^\alpha, \quad g(t) \exp[i2\pi Nt] = \frac{1}{Q^{m+1}} \exp[g(t)], \\ g(t) &= i2\pi Nt - \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t} + \alpha \log [Q\psi(t)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1})$$

$$\text{とし, } 2 \operatorname{Re} \int_{c_1} \exp[g(t)] dt \quad (\text{A3.2})$$

の漸近評価式 $\varepsilon(N, \alpha)$ を求めねばよい。

まず, $0 < \arg t < \frac{\pi}{2}$ で $|t|$ が小さい所で, $g'(t)$ が 0 となる点 t_0 — すなわち鞍点 — を求める。(A2.5) により,

$$\left. \begin{aligned} g(t) &= i2\pi Nt - (\alpha+1)t^{-1} + 2\alpha \log t - (\alpha+1) + o(t), \\ g'(t) &= i2\pi N + (\alpha+1)t^{-2} + 2\alpha t^{-1} + o(1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.3})$$

であるから,

$$f \equiv \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\pi N}} \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right] \quad (\text{A3.4})$$

とおけば

$$t_0 \equiv f \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha+1} f + o(f^2)\right) \quad (\text{A3.5})$$

を得る。そして, t_0 においては

$$\left. \begin{aligned} g(t_0) &= -\frac{2(\alpha+1)}{f} + 2\alpha \log f - (\alpha+1) + o(f), \\ g'(t_0) &= 0, \\ g''(t_0) &= -\frac{2(\alpha+1)}{f^3} (1 + o(f)), \\ g^{(m)}(t_0) &= o(f^{-(m+1)}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.6})$$

$$\operatorname{Im}[f(t) - f(t_0)] = 0$$

は (x, y) 平面上では

$$(x-2)(x^2+y^2)+2y=0$$

なる代数曲線に 대응する。この代数曲線に対して曲線追跡の慣習的手法を適用することによって以下の事実がわかる。

- (i) この曲線の多重点は $(x, y) = (1, 1)$ のみで、多重度は 2 である。そして、そこでの切線の勾配は $1 \pm \sqrt{2}$ である。
- (ii) この曲線と勾配 α の直線 $y-1 = \alpha(x-1)$ との、 $(x, y) = (1, 1)$ 以外の、交点は任意の実数 α に対して唯一つ定まる。すなわち、この曲線はパラメータ α により

$$x-1 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 1}{\alpha^2 + 1}, \quad y-1 = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha - 1)}{\alpha^2 + 1} \quad (\text{A4.8})$$

と表わされる。

- (iii) 特殊な α の値に対する曲線上の点 (x, y) , 切線の勾配 dy/dx , および、それらの変化の様子は下表の通りである。

α	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$1-\sqrt{2}$		*		0
x	2	\rightarrow	$1+\sqrt{2}$	\rightarrow	2	\rightarrow	1	\rightarrow	*	\rightarrow	0
y	$-\infty$	\rightarrow	$-1-\sqrt{2}$	\rightarrow	0	\rightarrow	1	\rightarrow	*	\rightarrow	1
dy/dx		$+$	∞	$-$	-2	$-$	$1-\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$1/2$

		$\sqrt{2}-1$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
	\rightarrow	$1-\sqrt{2}$	\rightarrow	0	\rightarrow	1	\rightarrow	2
	\rightarrow	$\sqrt{2}-1$	\rightarrow	0	\rightarrow	1	\rightarrow	$+\infty$
	$+$	∞	$-$	0	$+$	$1+\sqrt{2}$		

曲線の概形は図6のようになる。ここで実線で示した部分は
 その一部が積分路 C_1 として採用されるものであり、その上では
 2重点において、 $\operatorname{Re}[f(t)-f(t_0)]$ が最大(=0)となり、そこから
 離れて $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha+1}{\pi N}} + i\infty$ となると $\rightarrow -\infty$ となる。
 一方、破線の部分では、 $\operatorname{Re}[f(t)-f(t_0)]$ が2重点において、
 最小(=0)で、そこから離れると共に増大し、 $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha+1}{\pi N}} - i\infty$
 となると $\rightarrow +\infty$ となる。

NO.

X(I)

A(I)

31	0.1436980829	0314729785	8346534300	180-03	0.1181655719	0897445475	4342571389	990-01
32	0.1962922309	7988574645	6080633777	680-03	0.1521812042	1124784653	3194306634	330-01
33	0.2634674995	5531007671	9885987263	240-03	0.1929384577	4942982660	8156153328	780-01
34	0.3479943625	5464414621	7737893223	830-03	0.2411367424	8529934929	2696856697	700-01
35	0.4529133459	3621051146	2943731959	660-03	0.2974577897	2327572179	7112236965	480-01
36	0.5815263947	8483423716	5678258078	980-03	0.3625569668	5703608190	3749096961	580-01
37	0.7373850396	2747189854	5830985217	040-03	0.4370555903	4709966509	0009240169	860-01
38	0.9242757669	3959523299	6211659642	500-03	0.5215343055	7373580334	7865945220	880-01
39	0.1146203016	4454365067	8652883055	800-02	0.6165275567	0769592089	2442061680	130-01
40	0.1407370229	4191567961	6352447541	130-02	0.7225191331	1838443803	9866957546	420-01
41	0.1712159361	1489424281	2185990952	550-02	0.8399387505	8018809029	8036567212	840-01
42	0.2065109250	1424661567	1938642316	400-02	0.9691596048	0141845442	5152762755	590-01
43	0.2470893209	2757200133	4243590608	540-02	0.1110496820	5831763379	3848272396	220-00
44	0.2934296172	2595792349	0545339964	890-02	0.1264206711	1683292918	3201459879	010-00
45	0.3460191694	4557375655	7306577664	930-02	0.1430486758	0468714727	3959925933	220-00
46	0.4053519071	7693082677	2168406134	250-02	0.1609476220	7065306636	1160364812	910-00
47	0.4719260806	2871094913	1842215232	000-02	0.1801257287	7258719166	7003258366	850-00
48	0.5462420613	4241903622	9024415733	760-02	0.2005856684	4867355383	6245720622	470-00
49	0.6288002133	2358813495	6664219002	490-02	0.2223247658	0349330729	4432519822	970-00
50	0.7200988478	6856728427	6504200973	800-02	0.2453352265	7530608846	4753747407	300-00
51	0.8206322726	2959983087	3302129686	050-02	0.2696043901	1359553021	6146084984	790-00
52	0.9308889429	8794628978	6173482107	200-02	0.2951149996	7728671554	8882301319	170-00
53	0.1051349721	5977872802	1772432239	990-01	0.3218454851	4097102063	9047229482	490-00
54	0.1182486250	0173345415	4073650143	620-01	0.3497702534	5201199754	2270937133	410-00
55	0.1324759434	6471508642	7127941422	940-01	0.3788599828	0363431254	5387973942	220-00
56	0.1478618047	7344673228	7135564326	810-01	0.4090819170	7014772828	1335507644	780-00
57	0.1644497442	9591988941	2099544766	660-01	0.4404001575	8565585110	9311852119	240-00
58	0.1822818384	0739857103	2899394717	450-01	0.4727759498	3473888478	2060516110	130-00
59	0.2013985984	2080350792	9009079150	160-01	0.5061679630	6233757523	3719288539	850+00
60	0.2218388752	7440645804	8529245321	300-01	0.5405325612	0142537659	2335175260	370+00

表 1-3

NO.	X(I)	A(I)
61	0.2436397746	1211048599
62	0.2668365818	4860815696
63	0.2914626967	7978453514
64	0.3175495772	7637776385
65	0.3451266915	8476768054
66	0.3742214787	5160247599
67	0.4048593166	8769115822
68	0.4370634973	9020260647
69	0.4708552088	4985107514
70	0.5062535231	8064955746
71	0.5432753905	2330998826
72	0.5819356382	8888485223
73	0.6222469753	2628028419
74	0.6642200006	1539981513
75	0.7078632161	0653805934
76	0.7531830433	4592902280
77	0.8001838435	4680843552
78	0.8488679407	8476144141
79	0.8992356480	1532218553
80	0.9512852956	3062954870
81	0.1005013262	2903113718
82	0.1060414007	7795804967
83	0.1117480107	6647133928
84	0.1176202289	5325975312
85	0.1236569470	6168436201
86	0.1298568796	6280426918
87	0.1362185681	6200957652
88	0.1427403848	7381541203
89	0.1494205371	7065870098
90	0.1562570716	9275525854
	0.2436397746	7706885862
	0.2668365818	1775373599
	0.2914626967	0840853829
	0.3175495772	7885065970
	0.3451266915	2994672852
	0.3742214787	2421706134
	0.4048593166	5424256238
	0.4370634973	4078760603
	0.4708552088	4255700272
	0.5062535231	5965890003
	0.5432753905	8470014481
	0.5819356382	9454666839
	0.6222469753	6072625270
	0.6642200006	4312862363
	0.7078632161	0643127041
	0.7531830433	2533894978
	0.8001838435	9342881635
	0.8488679407	7040433975
	0.8992356480	7760726052
	0.9512852956	3715246873
	0.1005013262	9055884196
	0.1060414007	2503786627
	0.1117480107	6470068325
	0.1176202289	7751625440
	0.1236569470	1508061255
	0.1298568796	1830783362
	0.1362185681	0328627024
	0.1427403848	5892097671
	0.1494205371	5355713161
	0.1562570716	9898079236
	0.5758240638	6302811725
	0.6119949964	3637513994
	0.6489963286	1048452494
	0.6867777008	5555003260
	0.7252876385	9642888432
	0.7644737539	7460986117
	0.8042829352	3244034917
	0.8446615238	6711536007
	0.8855554797	9479185234
	0.9269105348	3978454950
	0.9686723349	2250013600
	0.1010786571	3647293577
	0.1053199101	7640802108
	0.1095856060	9124338321
	0.1138703962	2478787122
	0.1181689790	3369900765
	0.1224761084	8857666725
	0.12678666016	7740636231
	0.1310953456	6008785444
	0.1353973036	2171478102
	0.1396875203	7094706500
	0.1439611272	2829836631
	0.1482133463	4749545016
	0.1524394945	1129724816
	0.1566349864	4132409670
	0.1607953376	5957188231
	0.1649161669	3739628780
	0.1689931983	6586932599
	0.1730222630	7955039827
	0.1769993006	6389050325
	0.5758240638	3577295387
	0.6119949964	8687437364
	0.6489963286	2821499033
	0.6867777008	0309835251
	0.7252876385	8644874197
	0.7644737539	7348043130
	0.8042829352	1439409458
	0.8446615238	6162306886
	0.8855554797	8292195421
	0.9269105348	4219931639
	0.9686723349	0384749604
	0.1010786571	2263156461
	0.1053199101	3207480109
	0.1095856060	7184007773
	0.1138703962	8414711622
	0.1181689790	9352674792
	0.1224761084	2859767567
	0.12678666016	6248533811
	0.1310953456	4144017457
	0.1353973036	3463548395
	0.1396875203	1888493031
	0.1439611272	0819437811
	0.1482133463	9486958965
	0.1524394945	8602149676
	0.1566349864	8271254718
	0.1607953376	1769664122
	0.1649161669	4794521333
	0.1689931983	5201550841
	0.1730222630	3994615774
	0.1769993006	7412152380

NO.	X(I)	A(I)
91	0.1632478786	0.1809203602
92	0.1703906959	0.1847816014
93	0.1776831137	0.1885792949
94	0.1851225787	0.1923098227
95	0.1927063983	0.1959696786
96	0.2004317454	0.1995554682
97	0.2082956621	0.2030639085
98	0.2162950647	0.2064918280
99	0.2244267478	0.2098361664
100	0.2326673885	0.2130939737
101	0.2410735508	0.2162624101
102	0.2495816900	0.2193387452
103	0.2582081568	0.2223203574
104	0.2669492018	0.2252047329
105	0.2758009791	0.2279894655
106	0.2847595513	0.2306722551
107	0.2938208931	0.2332509075
108	0.3029808953	0.2357233332
109	0.3122353694	0.2380875465
110	0.3215800513	0.2403416651
111	0.3310106052	0.2424839088
112	0.3405226281	0.2445125989
113	0.3501116529	0.2464261575
114	0.3597731532	0.2482231063
115	0.3695025467	0.2499020665
116	0.3792951991	0.2514617575
117	0.3891464281	0.2529009964
118	0.3990515069	0.2542186977
119	0.4090056684	0.2554138722
120	0.4190041086	0.2564856265
	0.5123853379	0.7471143797
	0.2799420425	0.9647999679
	0.7220413797	0.6443637744
	0.6420114649	0.7404063955
	0.5663903879	0.9967408290
	0.4033344271	0.4307557824
	0.7334767091	0.3060695330
	0.9177064526	0.7712645408
	0.1628183266	0.3300434240
	0.2236048537	0.2963859124
	0.6614678986	0.3771970916
	0.8207172703	0.5144993916
	0.2628563949	0.1094115498
	0.2225592848	0.7409525233
	0.6670150317	0.4840810145
	0.615932048	0.9233050708
	0.3856941582	0.9506437601
	0.1711317313	0.4296667355
	0.9795208620	0.8007501591
	0.2276458558	0.6965418632
	0.2066368765	0.6308981167
	0.4932781067	0.8192128654
	0.0290991181	0.1830824033
	0.2594119513	0.5876094254
	0.0621182297	0.3553263882
	0.2107305129	0.0966859320
	0.3507333412	0.8933034713
	0.6847933245	0.8666223827
	0.2236754746	0.1613847414
	0.1011994144	0.3702102439
	0.860-00	0.2968261715
	0.820-00	0.2400510848
	0.610-00	0.1282466557
	0.450-00	0.2208121587
	0.730-00	0.5619999979
	0.950-00	0.8764742963
	0.570-00	0.0394126376
	0.130-00	0.5226521737
	0.020-00	0.6684437373
	0.480-00	0.1211254547
	0.380-00	0.5503762770
	0.060-00	0.8087623880
	0.300-00	0.5173803804
	0.430-00	0.3574584979
	0.870-00	0.0363008167
	0.860-00	0.7998546218
	0.610-00	0.2595541440
	0.260-00	0.7570540194
	0.860-00	0.1169554374
	0.050-00	0.3212211633
	0.160-00	0.900+01
	0.860-00	0.800+01
	0.860-00	0.870+01
	0.240-00	0.310+01
	0.890-00	0.620+01
	0.750-00	0.300+01
	0.210-00	0.730+01
	0.950-00	0.830+01
	0.560-00	0.380+01
	0.340-00	0.170+01
	0.340-00	0.830+01
	0.3695025467	0.5923340950
	0.860-00	0.4542059823
	0.680-00	0.5094926829
	0.820-00	0.0013757932
	0.610-00	0.3940111979
	0.450-00	0.830+01
	0.730-00	0.5923340950
	0.2968261715	0.920+01
	0.2400510848	0.030+01
	0.1282466557	0.950+01
	0.2208121587	0.490+01
	0.5619999979	0.550+01

表 1-5

NO.	X(I)	A(I)
121	0.4290419905 7857627739 7150350542 740-00	0.2574331629 4226934736 4787471520 230+01
122	0.4391144479 0741830162 1469319310 230-00	0.2582557785 9597063573 8912613757 020+01
123	0.4492165887 4794494402 3351536613 510-00	0.2589528652 2110204799 9132500142 870+01
124	0.4593434992 7577861684 8660104637 850-00	0.2595239087 3919253919 2637902584 100+01
125	0.4694902474 2008064056 9985472606 610-00	0.2599684889 6321972060 3287558078 730+01
126	0.4796518865 2607083451 9357106177 000-00	0.2602862793 4485501277 6505649824 730+01
127	0.4898234590 0875034225 1418294500 500-00	0.2604770467 7695660015 9074563677 430+01
128	0.5000000000 0000000000 0000000000 000+00	0.2605406514 5200277247 7762398744 270+01

表2. $f(x) = \frac{1}{2}$ の場合の ε_N と $\varepsilon(N, 0)$

N	ε_N		$\varepsilon(N, 0)$	
2	0.15	0	0.18	0
4	-0.26	-2	-0.55	-2
5	-0.40	-2	-0.48	-2
6	-0.18	-2	-0.19	-2
7	-0.46	-3	-0.39	-3
8	0.32	-4	0.90	-4
10	0.10	-3	0.11	-3
12	0.22	-4	0.21	-4
14	-0.23	-5	-0.34	-5
16	-0.35	-5	-0.38	-5
20	-0.19	-6	-0.16	-6
25	0.80	-7	0.84	-7
32	-0.45	-8	-0.49	-8
64	-0.32	-12	-0.30	-12
128	-0.42	-17	-0.42	-17
256	0.40	-25	0.38	-25

表3 相異なる $f(x)$ に対する ε_N

N	$f(x) = \frac{1}{2}$ に対する ε_N	$f(x) = (1+e)^{-x}$ に対する ε_N	$\varepsilon(N, 0)$
2	0.15 0	0.12 0	0.18 0
4	-0.26 -2	-0.40 -2	-0.55 -2
8	0.32 -4	0.35 -4	0.90 -4
16	-0.35 -5	-0.35 -5	-0.38 -5
32	-0.45 -8	-0.45 -8	-0.49 -8
64	-0.32 -12	-0.32 -12	-0.30 -12
128	-0.42 -17	-0.42 -17	-0.42 -17
256	0.40 -25	0.40 -25	0.38 -25

注意: 表中において 小数点を含む数は仮数部を
整数は指数部を表す。

表4(a) $f_\alpha(x)$ に対する ε_N

N	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$
2	-0.16 0	0.15 0	0.10 0	0.79 -1	-0.50 0
4	0.59 -1	-0.26 -2	-0.39 -2	0.34 -2	0.30 -2
8	0.34 -2	0.32 -4	-0.14 -4	-0.83 -5	0.15 -5
16	-0.24 -3	-0.35 -5	0.26 -6	-0.93 -8	-0.35 -10
32	-0.24 -5	-0.45 -8	0.14 -10	0.74 -12	-0.91 -17
64	-0.43 -9	-0.32 -12	0.37 -15	0.12 -17	0.94 -25
128	-0.25 -11	-0.42 -17	0.14 -21	-0.43 -25	?
256	-0.18 -16	0.40 -25	-0.80 -31	?	?

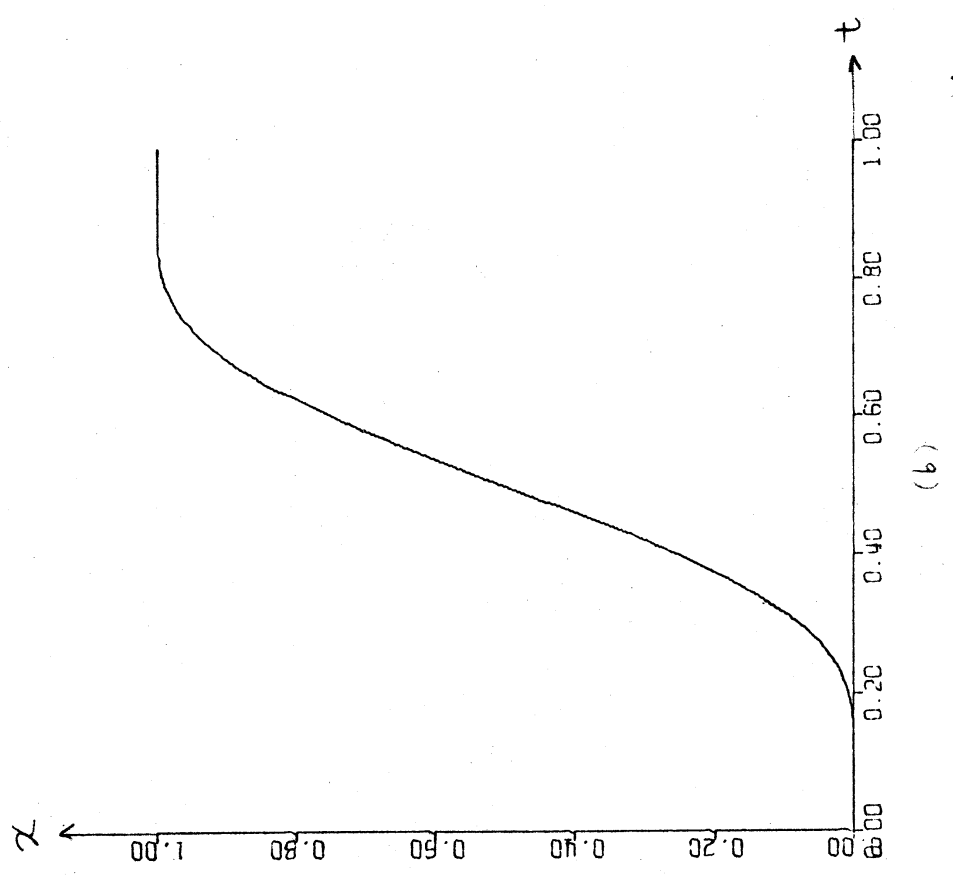
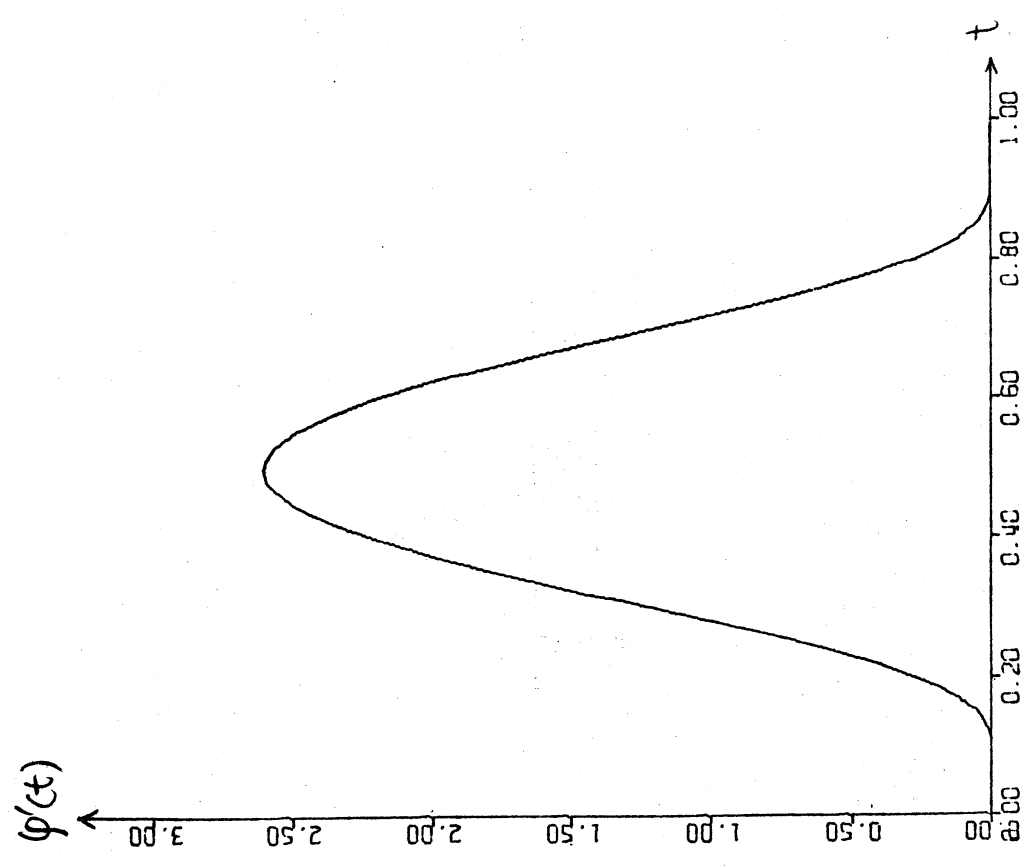
表4(b) $f_\alpha(x)$ に対する $\varepsilon(N, \alpha)$

N	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$
2	-0.33 0	0.18 0	-0.41 -1	-0.21 0	-0.78 1
4	0.58 -1	-0.55 -2	-0.19 -2	0.35 -2	0.32 -2
8	0.34 -2	0.90 -4	-0.67 -5	-0.58 -5	0.13 -5
16	-0.23 -3	-0.38 -5	0.14 -6	-0.97 -8	-0.34 -10
32	-0.24 -5	-0.45 -8	0.93 -11	-0.99 -12	-0.91 -17
64	-0.34 -9	-0.30 -12	0.45 -15	0.10 -17	0.94 -25
128	-0.24 -11	-0.42 -17	0.14 -21	-0.43 -25	-0.13 -35
256	-0.17 -16	0.38 -25	-0.82 -31	0.24 -36	0.12 -51

表5 $f(x) = \frac{0.125 + 0.5\delta^2}{(x-0.5)^2 + \delta^2}$ に対する ε_N

$N \backslash \delta$	1.000	0.500	0.250	0.167	0.100
2	0.23 0	0.52 0	0.19 1	0.44 1	0.13 2
4	0.35 -2	0.49 -1	0.43 0	0.14 1	0.51 1
8	0.30 -4	0.76 -3	0.39 -1	0.23 0	0.14 1
16	-0.35 -5	-0.33 -5	0.38 -3	0.96 -2	0.18 0
32	-0.45 -8	-0.45 -8	0.34 -7	0.18 -4	0.39 -2
64	-0.32 -12	-0.32 -12	-0.32 -12	0.60 -10	0.18 -5
128	-0.19 -16	-0.22 -16	-0.32 -16	-0.15 -16	0.41 -12

1



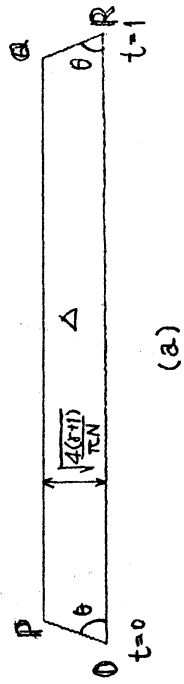
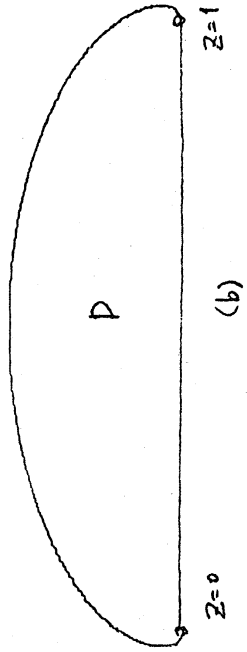


图 2

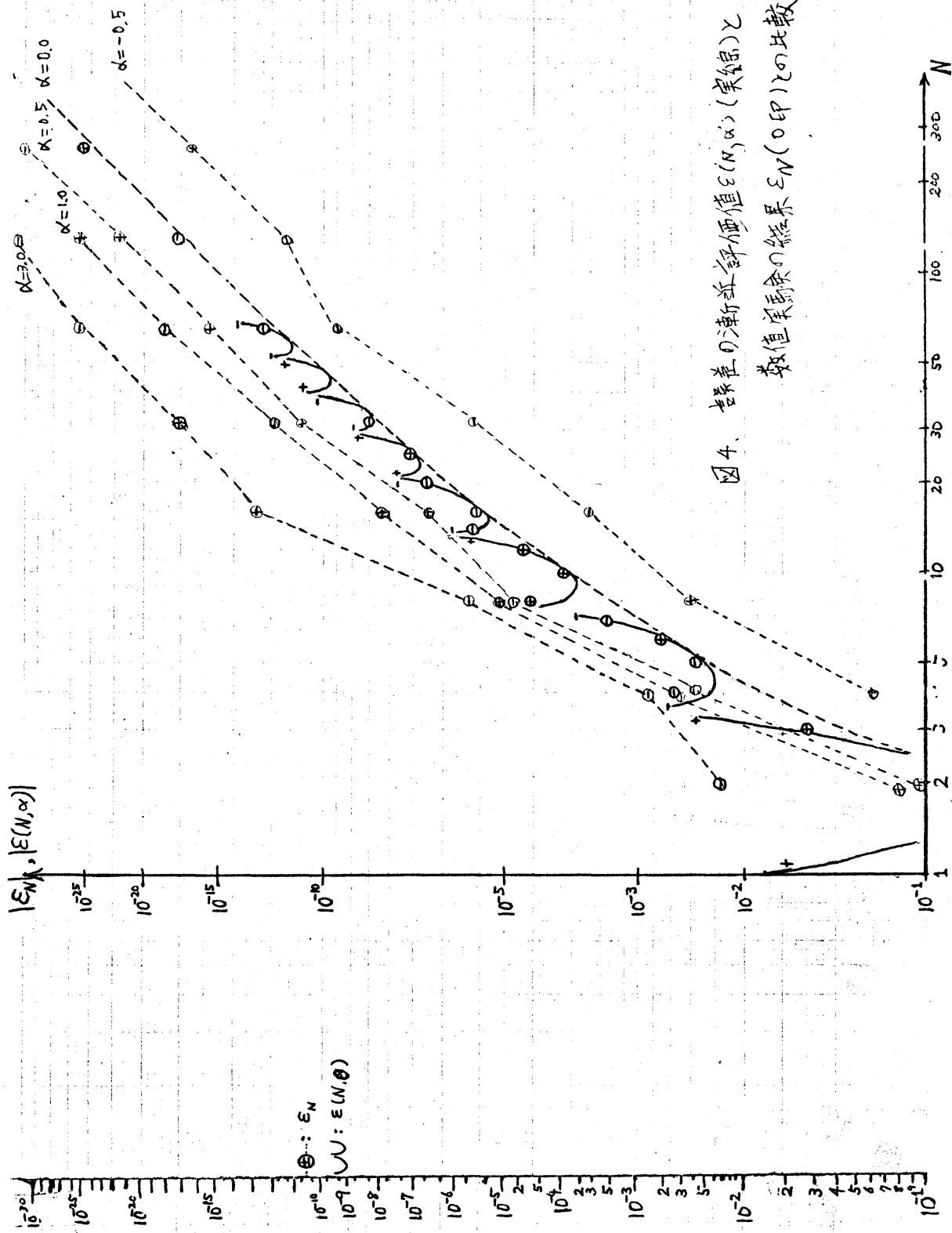
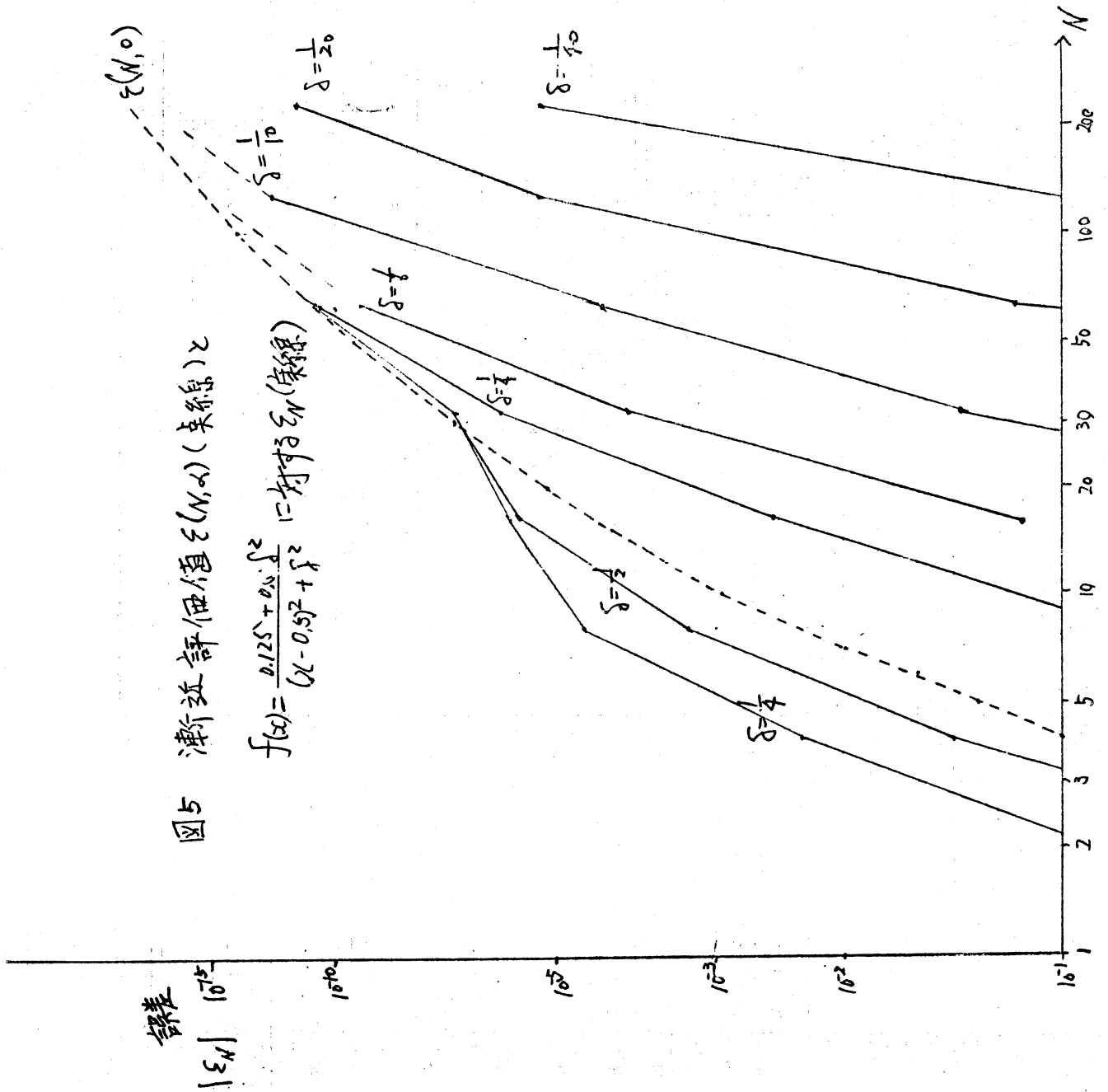
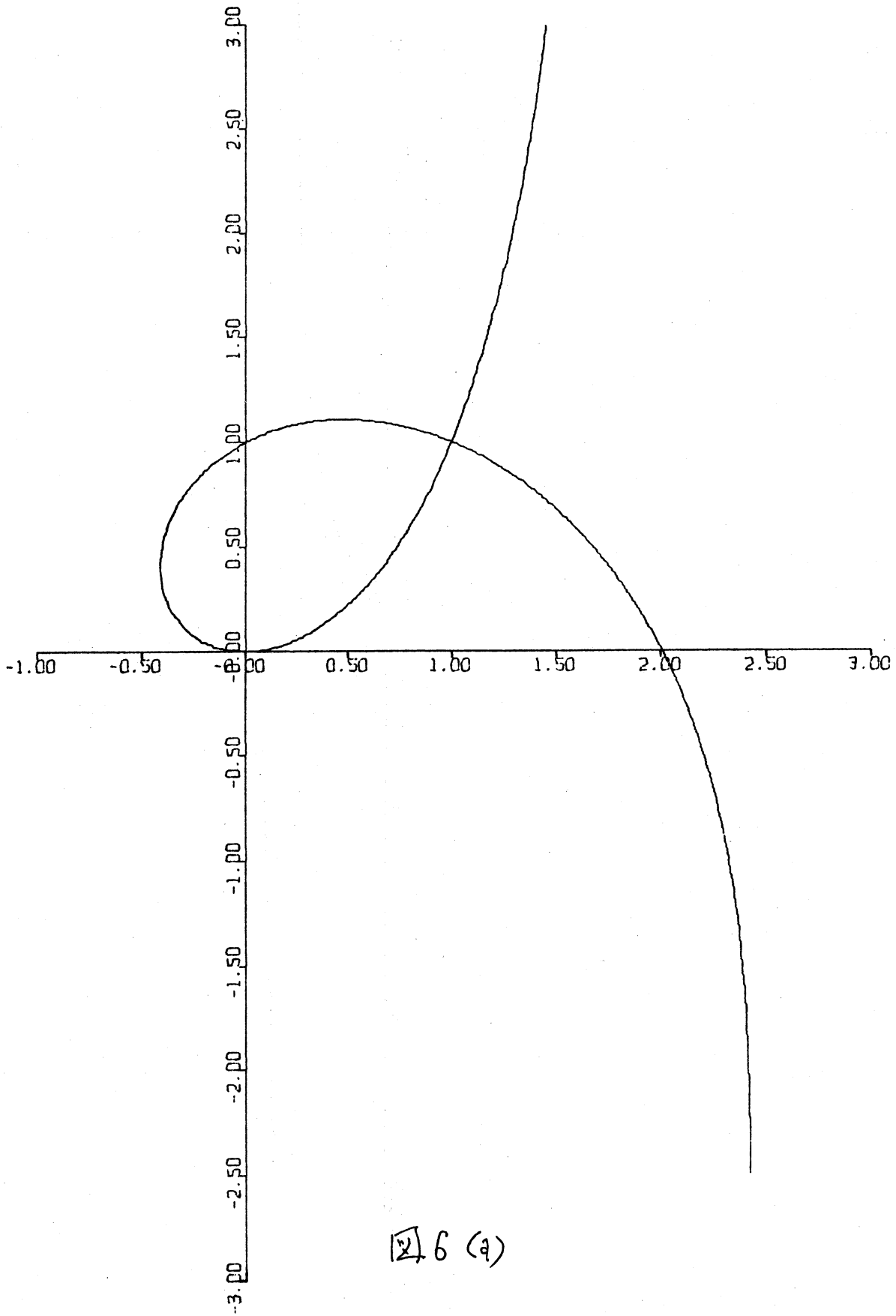
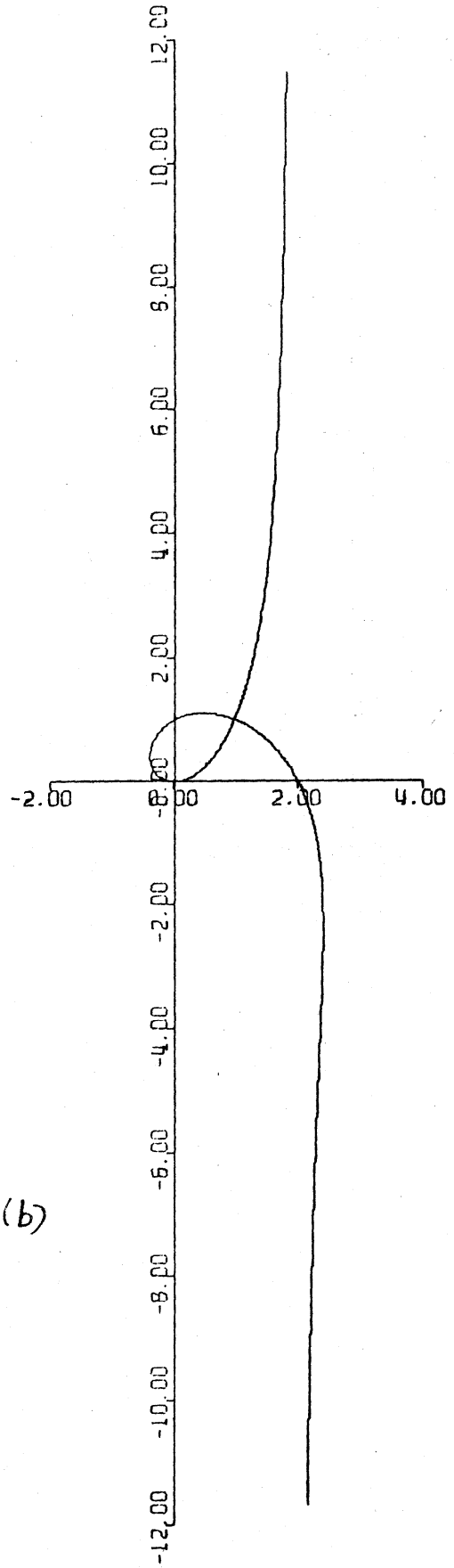


図4. 誤差の漸近評価値 $\epsilon(N, \alpha)$ (実線) と
 数値実験の結果 ϵ_N (0印) との比較





26 (a)



18) 6 (b)