数理解析研究所講究録
第91巻 1970年 142-169

楕円関数とそれに関連する定数の計算について

京大　工学部　　清野　武

1。母数 k を与えてノーム q を計算すること

1・1. 基本式[(2)]

古くから知られているように,

$$\sqrt{k'} = \sqrt{1-k^2} = \vartheta_4/\vartheta_3 \tag{1·1}$$

の関係を利用する方法が一般に採用されている。すなわち,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} \tag{1·2}$$

を仲介として,

$$\varepsilon = \frac{q+q^9+q^{25}+\cdots}{1+2q^4+2q^{16}+\cdots} \tag{1·3}$$

または,

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + 1707\varepsilon^{17} + \cdots \tag{1·4}$$

から q を求める。また必要ならばつぎの関係を利用する。

$$q' = \exp(\pi^2/\log q) \tag{1·5}$$

1·2. *procedure* QK(Q,K2)[8]

これは k^2 を与えて q を求めるためのもので，

(i) $k^2 \leq 1/2$ に対しては，

$$\varepsilon = k^2/(2(1+\sqrt{k'})^2(1+k')) \qquad (1.6)$$

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 \qquad (1.7)$$

によって計算する．

(ii) $k^2 > 1/2$ に対しては，k と k' の立場を入れかえて，さきに q' を求めてから，

$$q = \exp(\pi^2/\log q') \qquad (1.8)$$

によって q を計算する。

東京大学の QNOM(X2,Q)[7] と異る点は，(1·2) の桁落ちを防ぐために (1·6) を用いたこと，および $0 \leq k^2 < 1$ を二つの領域に分け，(1·3) を繰り返し法で解くかわりに，直接 (1·7) で計算したことである．

2。母数 k を与えて完全楕円積分 K, E を求めること

2·1. 種々の計算法

(1) 超幾何級数

$$K = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) \qquad (2·1)$$

$$E = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k^2\right) \qquad (2·2)$$

東京大学のCEIE(X2)[7]は $k^2 \leq 0.2$ に対して(2・2)を用いている。

(2) Landenの変換[(1),(2)]

母数 k に対して,

$$k_1 = (1-k')/(1+k') \tag{2・3}$$

を計算すれば, k_1 に対する周期比 K_1'/K_1 は, k に対する K'/K の2倍になる。

$$K = (1+k_1)K_1 \tag{2・4}$$

$$E = 2E_1/(1+k_1) - (1-k_1)K_1 \tag{2・5}$$

この変換を繰り返せば,

$$K_{n-1} = (1+k_n)K_n \tag{2・6}$$

$$E_{n-1} = 2E_n/(1+k_n) - (1-k_n)K_n \tag{2・7}$$

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \pi/2 \tag{2・8}$$

より, K および E を計算することができる。

(3) 算術幾何平均[(3)]

Landenの変換の変形であって, しばしば採用されている。

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1,\ \ b_0 = k', \\ a_r = (a_{r-1} + b_{r-1})/2, \\ b_r = \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}, \\ c_r = (a_{r-1} - b_{r-1})/2 = a_r - b_{r-1} \end{array}\right\} \tag{2・9}$$

$$K = \pi/(2a_n) \tag{2・10}$$

$$E = K\left(1 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} 2^r c_r^2\right) \qquad (2\cdot11)$$

(4) Landenの変換と超幾何級数

a. K_1, E_1 を k_1^2 の級数で表わす.

$$K = \frac{\pi}{2}(1+k_1)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k_1^2\right) \qquad (2\cdot12)$$

$$E = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+k_1}F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k_1^2\right) \qquad (2\cdot13)$$

東京大学の CEIE(X2)[7] は $k^2 > 0.2$ に対して, (2・13) を用いている.

b. K_2, E_2 を k_2^2 の級数で表わす.

$k^2 = 1/2$ に対し, $k_1 \simeq 0.17$, $k_2 \simeq 0.007$ となるので, この方法はかなり有効である. (後述).

$$K = (1+k_1)(1+k_2)K_2 \qquad (2\cdot14)$$

$$E = \frac{4E_2}{(1+k_1)(1+k_2)} - \frac{K_2}{1+k_1}\left[3 - k_2 - k_1^2(1+k_2)\right] \qquad (2\cdot15)$$

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k_2^2 + \frac{9}{64}k_2^4\right), \\ E_2 &= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}k_2^2 - \frac{3}{64}k_2^4\right) \end{aligned}\right\} k^2 \leq 1/2 \qquad (2\cdot16)$$

(5) q 級数[(1),(2),(4)]

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2 \qquad (2\cdot17)$$

または, $\vartheta_3 = (\vartheta_3 + \vartheta_4)/(1+\sqrt{k'})$ より,

$$K = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{k'})^2}\left(1+2q^4+2q^{16}+\cdots\right)^2 \qquad (2\cdot18)$$

東京大学のCEIK(X2)は$k^2 \leq 1/2$に対して，この式を用いている。実際には，

$$K = 2\pi(1+2q^4)^2/(1+\sqrt{k'})^2 \qquad (2\cdot18')$$

で十分である（$k^2=1/2$のとき，$q^{16} < 0.15\times10^{-21}$）。

Eに対しては，基本式

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}(e_1\omega_1+\eta_1) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_3^2}\left(-\frac{\vartheta_2''}{\pi^2\vartheta_2}\right) \qquad (2\cdot19)$$

より，つぎのような展開式が導かれる。(10)

$$E = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_3^2}\left(\frac{1}{3}(1+\vartheta_3^4+\vartheta_4^4) - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right) \qquad (2\cdot20)$$

$$E = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_3^2}\left(1-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right) \qquad (2\cdot21)$$

$$E = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_3^2}\left(1+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right) \qquad (2\cdot22)$$

$$E = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_3^2}\frac{1+9q^2+25q^6+\cdots}{1+q^2+q^6+\cdots} \qquad (2\cdot23)$$

計算には，(2・23)が適当であるが，場合によっては，つぎの級数による方が有利である。

$$E = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_3^2}\left(1+8(q^2-q^4+4q^6-5q^8+6q^{10}-4q^{12}+8q^{14}\right.$$

$$-13q^{16}+13q^{18}-6q^{20}+12q^{22}-20q^{24}+14q^{26}-\cdots)) \quad (2\cdot 24)$$

(6) η 級数[6]

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{K}{2\pi}\left(1-\sqrt{1-k^2}\right), \\ E &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{1}{K}\left(1+8\eta^2-8\eta^4+24\eta^8-192\eta^{12}+\cdots\right) \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot 25)$$

これは高橋秀俊教授によって開発されたもので，PC-1 のライブラリに採用されている。η と q との間には，

$$\eta = \vartheta_2{}^2(0, q^2)/4 = q(1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots)^2 \quad (2\cdot 26)$$

の関係があり，$k^2=1/2$ のとき，$\eta \simeq q = e^{-\pi}$ となるので，$k^2 \leq 1/2$ に対し，(2·25)は極めて速く収束する．特に，k^2 から出発して，q を経由せずに，E をもとめるためには，この方式が最も有利であろう。

2·2. procedure QKK(Q, QBIS, KK, KKBIS, KORK2, M)[8] および QKKEE(Q, QBIS, KK, KKBIS, EE, EEBIS, KORK2, M)[8]

QKK は k^2 または k を与えて，q, q', K, K' をもとめるためのもので，QKKEE は，このほかに E, E' をもとめる機能をもっている．ここでは QKKEE について説明する．

(1) QKKEE_1

(i) q, q' の計算は QK と同様．

(ii) $k^2 \leq 1/2$ に対し，(2·14) - (2·16) により，K と E

を求める。ただし，桁落ちを防ぐために，(2.3) の代りに，

$$k_1=\frac{k^2}{2+2k'-k^2},\quad k_2=\frac{k_1^2}{2+2k_1'-k_1^2} \tag{2.26}$$

を使用する。

(iii) $k^2\leq 1/2$ に対する K'，E' はそれぞれ，

$$\left.\begin{aligned}K'&=K/(\pi\log(1/q)),\\ E'&=\frac{\pi}{2}\frac{1}{K}+\left(1-\frac{E}{K}\right)K'\end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

による。

(iv) $k^2>1/2$ に対しては，k と k'，q と q'，K と K'，E と E' の立場を入れかえる。

(2) QKKEE$_2$

(i) q, q' の計算は QK と同様

(ii) $k^2\leq 1/2$ に対し，(2.17) により K を，

$$E=\frac{\pi}{6\vartheta_3^2}(1+(2-k^2)\vartheta_3^4-(144q^{10}+168q^8+96q^6+72q^4+24q^2)) \tag{2.28}$$

により E を求める。

(iii) K', E' の計算ならびに $k^2>1/2$ に対する扱いは，QKKEE$_1$ の (iii), (iv) と同様。

注1　QKK に対しては，(2.17) の代りに (2.18$'$) を使用した。

注2　(2.28) よりは，つぎの式の方が有利である。

$$E=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_3^2}\left(1+8(q^2-q^4+4q^6-5q^8+6q^{10})\right) \qquad (2\cdot24')$$

(3) 試験結果

二つのプロセジュア QKKEE$_1$ と QKKEE$_2$ は，本質的に異った方法（一方は Landen の変換，他方は q 級数）に基づいているにもかかわらず，有効数字 10桁 の範囲で，全く等しい結果を与える。

3. q を与えて ϑ_1', ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 を求めること

$\vartheta_1'(0,q)$ および $\vartheta_i(0,q)$ $(i=2,3,4)$ は，基本的な定数として，極めて重要である。

procedure THZERO (I, Q)[10] は，これら四つの定数のうちの一つを求めるための *real procedure* であって，つぎの方針に従っている。

(i) $q<0.043$ に対しては，

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1' &= 2\pi q^{1/4}(1-3q^2+5q^6),\\
\vartheta_2 &= 2q^{1/4}(1+q^2+q^6),\\
\vartheta_3 &= (1+2q^4)-2q(1+q^8),\\
\vartheta_4 &= (1+2q^4)+2q(1+q^8)
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot1)$$

(ii) これ以外の範囲では，

$$
\left.
\begin{aligned}
\vartheta_1' &= 2\pi\left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{3/2} q'^{1/4}\,(1-3q'^{2}+5q'^{6}),\\
\vartheta_2 &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2}\left((1+2q'^{4})-2q'(1+q'^{8})\right),\\
\vartheta_3 &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2}\left((1+2q'^{4})+2q'(1+q'^{8})\right),\\
\vartheta_4 &= 2\left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q'^{1/4}\,(1+q'^{2}+q'^{6})
\end{aligned}
\right\}\quad (3\cdot 2)
$$

試験方法としては，つぎの二つを採用した。

(i) 前述の QK を利用して，k^2 から q を求め，これを THZERO に入れて，既成の表[5]（小数点以下 5 桁）と比較.

(ii) 恒等式[1],[2]

$$\vartheta_2^{\,4} + \vartheta_4^{\,4} = \vartheta_3^{\,4} \qquad (3\cdot 3)$$

および

$$\vartheta_1' = \pi\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4 \qquad (3\cdot 4)$$

の左右両辺を別々に計算し，両者の一致を確かめた。

結果は，$q \leq 0.89$ の範囲で，有効数字 10桁以上の一致を示した。

4. q を与えて k, K, E を求めること

ノーム q を基調とする解析に当っては，前節の ϑ_i のほかに，定数 E, E' の計算が問題になる。

procedure CEIQ (KK, KKBI$, EE, EEBI$, K, KBI$, QBI$, Q)[10] は，q を与えて，K, K', E, E', k, k', q' を

を求めるためのもので，つぎの式を利用している。

$$k = \vartheta_2^{\,2}/\vartheta_3^{\,2}, \qquad k' = \vartheta_4^{\,2}/\vartheta_3^{\,2} \tag{4.1}$$

$$K = (\pi/2)\vartheta_3^{\,2} \tag{4.2}$$

$$E = ((\pi/6)/\vartheta_3^{\,2})(1 + (2 - k^2)\vartheta_3^{\,4} - (144q^{10} + 168q^8 + 96q^6 + 72q^4 + 24q^2)) \tag{4.3}$$

$$K' = (K/\pi)\log(1/q) \tag{4.4}$$

$$E' = \frac{1}{\vartheta_3^{\,2}} - \left(1 - \frac{E}{K}\right)K' \tag{4.5}$$

ただし，これらはいずれも，$q \leq 0.043$ に対するもので，それ以外の範囲では，q と q' の立場を入れかえる。

試験はつぎの方法によった。

(i) QK と CEIQ を組み合せ，QK の引数として与えた k^2 と，CEIQ の結果として得られた k^2 との一致を確かめた。

(ii) 同じ組み合せで，k^2 に対する K, K', E, E' を求め，既成の表ならびに，前述の $QKKEE_1$ の結果と比較した。

結果は，$q \leq 0.7$ （$k^2 < 1.0 - 0.153 \times 10^{-10}$）に対して，10桁の精度が確認された。$0.71 \leq q < 0.9$ でもほとんど問題はないが，E の値にわずかの誤差（10桁目に1単位）が現われる。$q \geq 0.9$ に対しては，q' の underflow（HITAC 5020）のため，計算不能となる。対策については後述。

5. $\vartheta_i(v, q)$ の計算

5・1. 変数領域の制限

4種類の ϑ 関数を，2種類の計算に還元し，変数の領域を，$0 \leq v < 1$ または $0 \leq v < 1/2$ に制限するために，つぎの関係を利用する。

(i) ϑ_1 に対しては，

$$s \leftarrow sign(v), \quad n \leftarrow entier(abs(v)),$$

$$v \leftarrow abs(v) - n,$$

$$\vartheta_1(v) \leftarrow s \times (-)^n \vartheta_1(v), \quad 0 \leq v < 1$$

(ii) ϑ_2 に対しては，

$$\vartheta_2(v) = \vartheta_1(v + 1/2) \tag{5.1}$$

によって，ϑ_1 の計算に帰着させる。

(iii) ϑ_3 に対しては，

$$\vartheta_3(v) = \vartheta_4(v - 1/2) \tag{5.2}$$

によって，ϑ_4 の計算に帰着させる。

(iv) ϑ_4 に対しては，

$$\vartheta_4(v) = \vartheta_4(abs(v) - n) \tag{5.3}$$

によって，領域を $0 \leq v < 1$ に制限する。

(v) さらに必要ならば，

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1(v) &= \vartheta_1(1 - v), \\ \vartheta_4(v) &= \vartheta_4(1 - v) \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

を利用して，領域を $0 \leq v < 1/2$ に制限する．

5.2. 虚数変換の応用[(1),(2)]

q が小さいとき（たとえば $q \leq e^{-\pi}$）は，

$$\vartheta_1(v,q) = 2q^{1/4}(\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - q^{12} \sin 7\pi v + \cdots) \tag{5.5}$$

$$\vartheta_4(v,q) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + 2q^{16} \cos 8\pi v - \cdots \tag{5.6}$$

を利用すればよいが，q が大きいときは，虚数変換

$$\vartheta_1(v|\tau) = i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-(i\pi/\tau)v^2}\, \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right) \tag{5.7}$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-(i\pi/\tau)v^2}\, \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right) \tag{5.8}$$

を利用するのが便利である．すなわち，

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1(v,q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-(\pi K/K')v^2}\, 2q'^{1/4}(\sinh \pi v' - q'^2 \sinh 3\pi v' + q'^6 \sinh 5\pi v' - \cdots), \\ \vartheta_4(v,q) &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-(\pi K/K')v^2}\, 2q'^{1/4}(\cosh \pi v' + q'^2 \cosh 3\pi v' + q'^6 \cosh 5\pi v' + \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

ただし，

$$q' = e^{-\pi K/K'}, \quad v' = (K/K')v \tag{5.10}$$

東京大学の EJSN，EJCN，EJDN[(7)] でも虚数変換公式が た²

$>1/2$ に対して用いられているが，(5.9) の形をそのまま使用することは極めて不経済であって，実際には，

$$\rho' = q^{v'} = q'^{v} = \exp(-(\pi K'/K)v) \qquad (5.11)$$

を一度計算するだけで，あとは ρ' の級数（実は有限の多項式）に還元される．

$$\vartheta_1(v,q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}}\, q'^{v^2+1/4}\left[(\rho'^{-1}-\rho') - q'^2(\rho'^{-3}-\rho'^3) + q'^6(\rho'^{-5}-\rho'^5) - \cdots\right],$$

$$\vartheta_4(v,q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}}\, q'^{v^2+1/4}\left[(\rho'^{-1}+\rho') + q'^2(\rho'^{-3}+\rho'^3) + q'^6(\rho'^{-5}+\rho'^5) + \cdots\right] \qquad (5.12)$$

これらの式の打ち切りによる相対誤差は，

$$\varepsilon_n = q'^{n(n+1)-2nv} \qquad (5.13)$$

から推定することができる．

5.3. *procedure* THETA (I, V, Q)[9]

これは q に対する $\vartheta_i(v,q)$ を求める *real procedure* であって，つぎの方針に従って計算を行なう．

(i) $q < 0.04$ に対しては，5.1 の (i) − (iv) に従って，$\vartheta_1(v)$, $\vartheta_4(v)$ $(0 \le v < 1)$ の計算に還元する．

(ii) 計算はつぎの式による．

$$\vartheta_1(v,q)=2q^{1/4}(\sin w-q^2\sin 3w+q^6\sin 5w),\quad w=\pi v;$$

$$\vartheta_4(v,q)=1-2q(\cos w-q^3\cos 2w+q^8\cos 3w),\quad w=2\pi v \tag{5·14}$$

(iii) $q\geq 0.04$ に対しても，(i)を経由した後に，

$$\vartheta_1(v,q)=\sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}}\,q'^{(v^2-5v+1/4)}(-q'^6z^5+q'^2z^4-z^3+z^2-q'^2z+q'^6),$$

$$\vartheta_4(v,q)=\sqrt{\frac{\pi}{\log(1/q)}}\,q'^{(v^2-5v+1/4)}(q'^6z^5+q'^2z^4+z^3+z^2+q'^2z+q'^6),\quad z=q'^{2v},$$

$$0\leq v<1/2 \tag{5·15}$$

試験は，後述の sn, cn, dn 関数を経由する間接的な方法をとったが，有効数字10桁の範囲で十分信頼できる結果が得られた．

6. sn, cn, dn 関数

6·1. 各種の計算法

(1) 展開式

$$\mathrm{sn}(u,k)=u-(1+k^2)u^3/3!+(1+14k^2+k^4)u^5/5!-\cdots,$$

$$\mathrm{cn}(u,k)=1-u^2/2!+(1+4k^2)u^4/4!-\cdots,$$

$$\mathrm{dn}(u,k)=1-k^2u^2/2!+(4k^2+k^4)u^4/4!-\cdots \tag{6·1}$$

(2) 第一種楕円積分の逆関数として

$$\left.\begin{aligned} u &= F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \\ sn(u, k) &= \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

Landen の変換により，まず

$$\varphi_n = u \prod_{r=1}^{n} (2/(1+k_r)), \quad k_n \simeq 0 \qquad (6.3)$$

を求め，

$$\varphi_{r-1} = (\varphi_r + \sin^{-1}(k_r \sin\varphi_r))/2 \qquad (6.4)$$

を反復適用して，順次に $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \cdots, \varphi_0$ ($\varphi_0 = \varphi$) を決定する。これを(6.2)の第2式に代入して $sn(u)$ を計算する。

(3) 算術幾何平均[3]

$$a_0 = 1, \quad b_0 = k', \quad k_0 = k$$

から出発し，

$$\left.\begin{aligned} a_r &= (a_{r-1} + b_{r-1})/2, \quad b_r = \sqrt{a_{r-1} b_{r-1}}, \\ c_r &= a_r - b_{r-1}, \quad k_r = c_r/a_r, \quad k'_r = b_r/a_r \end{aligned}\right\} (6.5)$$

を反復して，$c_n \simeq 0$ となるまで続ければ，(6.3)に相当して，

$$\varphi_{n-1} = 2^{n-1} a_n u \qquad (6.6)$$

が得られる。これを出発点として(6.4)を適用して φ_0 を定める．

$$sn(u) = \sin\varphi_0, \quad cn(u) = \cos\varphi_0 \qquad (6.7)$$

$$dn(u) = \cos\varphi_0 \sec(\varphi_1 - \varphi_0) \tag{6.8}$$

(4) ϑ関数との関係

$$\left.\begin{aligned} sn\,u &= \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ cn\,u &= \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ dn\,u &= \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

たとえば $sn(u,k)$ を計算するには，まず k（または k^2）から q, K, K' を求め（たとえばQKKEEまたはQKKによる），変数を $v = u/(2K)$ に変えて，上述のTHETAによって $\vartheta_1(v,q)$ と $\vartheta_4(v,q)$ を計算すれば，(6.9)の第1式から，簡単に結果が得られる。

この方針で sn, cn, dn に対する *procedure* を作ることは容易であるが，計算量からいえば，主プログラムの側で，(6.9)の計算を行なう方がはるかに経済的である。

6.2. 試験結果

上のような理由に基づき，sn, cn, dn関数に対しては，特別の *procedure* を作らず，QKKとTHETAによって計算し，既成の関数表（小数点以下5桁）と比較したほか，恒等式

$$\left.\begin{aligned} sn^2(u,k)+cn^2(u,k)=1, \\ k^2 sn^2(u,k)+dn^2(u,k)=1 \end{aligned}\right\} \quad (6\cdot10)$$

が成立するかどうかを，種々の k および u について調べた．結果は小数点以下10桁まで確実であることがわかった。

ただし，$k=0$ に対しては，(6.9) が適用できないので，

$$\left.\begin{aligned} sn(u,0)=\sin\pi v=\sin u, \\ cn(u,0)=\cos u, \quad dn(u,0)=1 \end{aligned}\right\} \quad (6\cdot11)$$

を用いなければならない。

7。Jacobi の E 関数

7·1．計算法

(1) 楕円積分として

$$u=F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (7\cdot1)$$

を満足する φ を求め（たとえば (6.5), (6.6), (6.4) より），これを

$$E(u)=E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \quad (7\cdot2)$$

に代入すれば，$E(u)$ を計算することができるが，極めて不経済である。それは，(7·2) の計算に，Landen の変換

$$E(\varphi,k)=\frac{1}{1+k_1}E(\varphi,k_1)-\frac{1-k_1}{2}F(\varphi,k_1)+\frac{k_1}{1+k_1}\sin\varphi_1 \quad (7\cdot3)$$

または算術幾何平均を繰り返す必要があるからである。

(2) ϑ 関数との関係[(1),(2)]

$$E(u)=\int_0^u dn^2(u,k)\,du$$
$$=Z(u)+\frac{E}{K}u, \qquad (7.4)$$
$$Z(u)=\Theta'(u)/\Theta(u)$$
$$=\frac{1}{2K}\frac{\vartheta_4'(v,q)}{\vartheta_4(v,q)}, \quad u=2Kv \qquad (7.5)$$

q が小さいときは，(5.6) より，

$$\vartheta_4(v,q)=1-2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v-2q^9\cos 6\pi v+\cdots,$$
$$\vartheta_4'(v,q)=2\pi(2q\sin 2\pi v-4q^4\sin 4\pi v+6q^9\sin 6\pi v-\cdots) \qquad (7.6)$$

q が 1 に近いときは，(5.9) より，

$$\vartheta_4(v,q)=\sqrt{\frac{K}{K'}}\,q'^{\,v^2+1/4}(\cosh\pi v'+q'^2\cosh 3\pi v'+q'^6\cosh 5\pi v'+q'^{12}\cosh 7\pi v'+\cdots),$$
$$\vartheta_4'(v,q)=-2\pi v'\vartheta_4(v,q)+\sqrt{\frac{K}{K'}}\,q'^{\,v^2+1/4}\,\pi\frac{K'}{K}(\sinh\pi v'+3q'^2\sinh 3\pi v'+5q'^6\sinh 5\pi v'+7q'^{12}\sinh 7\pi v'+\cdots)$$
$$(7.7)$$

$$v'=\frac{K}{K'}v=\frac{u}{2K'}, \quad q'^{\,v^2}=q^{v'^2}$$

7·2. *procedure* EJACOBI (U, KORK2, M)[9]

これは，前述の QKKEE と併用して，u および k（または k^2）に対する $E(u)$ の値を求めるための *real procedure* であって，計算はつぎの方針に従っている。

(i) まず QKKEE により，定数 K, K', E, E', q, q' を求める。

(ii) 変数の領域を $0 \leq u < 2K$ に制限するために，

$$E(u+2K) = E(u) + 2E \qquad (7\cdot8)$$

を利用する。

(iii) $k^2 \leq 1/2$ に対しては，つぎの式により計算する。

$$E(u) = \frac{\pi}{K} 2q \frac{\sin w - 2q^3 \sin 2w + 3q^8 \sin 3w}{1 - 2q(\cos w - q^3 \cos 2w + q^8 \cos 3w)} + \frac{E}{K} u,$$

$$w = 2\pi v = (\pi/K) u \qquad (7\cdot9)$$

(iv) $k^2 > 1/2$ に対しては，

$$z = q'^{\,2v} = e^{-\pi u/K'} \qquad (7\cdot10)$$

と置いて，つぎの式を利用する。

$$E(u) = \frac{\pi}{2K'} \frac{-5q'^6 z^5 - 3q'^2 z^4 - z^3 + z^2 + 3q'^2 z + 5q'^6}{q'^6 z^5 + q'^2 z^4 + z^3 + z^2 + q'^2 z + q'^6}$$

$$+ (1 - E'/K') u \qquad (7\cdot11)$$

この *procedure* の試験には，つぎの方法を採用した。すなわち，E 関数に対する加法定理

$$E(u) + E(w) - E(u+w) = k^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{sn}\, w \,\mathrm{sn}(u+w) \qquad (7\cdot12)$$

の左辺を EJACOBI により，右辺を THETA により，別々に計算して両者を比較した．$k^2 = 0.1(0.1)0.9, 0.95, 0.99$； $u = 0.5$（一定）； $w = 0.0(0.1)4.0$ について行なった計算結果は，有効数字10桁まで完全に一致した。ただし $u \leftarrow u - 2K$ の操作で，引数自体の精度が桁落ちのために失なわれるような場合は，若干の不一致が起る．

例．$k^2 = 0.8$ （$2K = 4.514\cdots$），$u = 0.5$

$w = 3.8$	(7.12)の左辺	0.04898 34112 840	右辺	$\cdots\cdots$ 814
3.9		0.02347 54606 624		$\cdots\cdots$ 560
4.0		0.00256 05166 187		$\cdots\cdots$ 064

8. Z 関数

8.1. Jacobi の諸関数の計算における問題点

二次元ポテンシャルの解析に当っては，sn u, cn u, dn u, $E(u)$ などの関数を使うのが極めて便利であるが，これらをそのまま数値計算に移すことは，つぎのような点で不都合を生ずる場合が多い。

(i) これらの関数は副変数として k を用いるが，多くの問題では k が 1 に近い場合が重要なのであって，計算機の1語では，正確な情報が維持できない場合も起りうる。

(ii) これらの関数は，ϑ 関数の比（または ϑ' と ϑ の比）として計算するのが最も能率的であるが，各関数に対して独立の procedure を作るとすれば，それらに共通な成分（分母の ϑ 関数）を何度も繰り返して計算するという無駄を避けることができない。

(iii) 同様に，関数の計算に必要な定数（特に K，E など）を，同じ k に対して，何度も求めなければならない。

このような事情を顧慮すれば，計算計画に当っては，

(i) q をすべての出発点とする，

(ii) sn, cn, dn 関数は，(6.9) により，ϑ 関数で表わす，

(iii) E 関数は，(7.4)，(7.5) により，Z 関数（ただし，変数は v，副変数は q とする）で表わす，

のが最も合理的であると思われる。

この目的に対しては，上に述べた procedure のうち，諸定数の計算には，CEIQ と THZERO の二つ，関数の計算には THETA が適当であるが，このほかに，Z 関数または E 関数を求めるための ZETA が必要である。

8·2. procedure ZETA (V, Q)[(9)]

関数 $Z(u)$ は，$sn(u, k)$ などと同様に，本来 u と k の関数であるが，上に述べた理由により，$v = u/(2K)$ と

$q = e^{-\pi K'/K}$ を与えて, $Z(u)$ の値を求める procedure があると極めて好都合である。real procedure ZETA (V, Q) は, この目的のために作られたもので, たとえば $E(u)$ を計算するには,

$$E(u) = \mathrm{ZETA}(v, q) + 2Ev \tag{8.1}$$

とすればよいのであって, 必要な定数は, 主プログラムの側で, 1個の k に対して1回だけ計算しておけばよい。

ZETA の内部における計算は, EJACOBI の一部を利用するだけであるから, 特に説明を加える必要はないであろう。

計算の結果は, EJACOBI と一致するはずであるが, 上述の理由により, u が $2K$ に近い所では若干の不一致が起る。

例. $k^2=0.5$ $(2K = 3.708\cdots)$

	EJACOBI による $E(u)$	ZETA による $E(u)$
$u = 3.6$	2.59334 84944	2.59334 84855
3.7	2.69313 84977	2.69313 84843
3.8	2.79300 95833	2.79300 95832

9. Π 関数について

第三種楕円積分は, Π 関数

$$\Pi(u, \alpha) = k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u} \tag{9.1}$$

を用いて，つぎのように表わすことができる．

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -\frac{k^2\mathrm{sn}^3\alpha}{\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}\left(\frac{\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha}u + \Pi(u,\alpha)\right), \qquad (9\cdot2)$$

$$\mathrm{sn}\alpha = 1/(ka)$$

一方において Π 関数は，

$$\Pi(u,\alpha) = \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} + uZ(\alpha) \qquad (9\cdot3)$$

と書くことができるので，実変数に対しては，(9·1) や (9·2) を，上述の procedure によって計算することができる．

$$\left.\begin{aligned} \Theta(u\mp\alpha) &= \mathrm{THETA}(4,(u\mp\alpha)/(2K),q),\\ Z(\alpha) &= \mathrm{ZETA}(\alpha/(2K),q) \end{aligned}\right\} \qquad (9\cdot4)$$

10. q が 1 に近い場合の対策[10]

10·1. 上述の計算法の限界

上に述べたすべての procedure は，k^2 を基調とする限り，$k^2 \leq 0.99999\,99999$ までは，必要な量を10桁の精度で計算することができるが，ノーム q を基調とする場合には，$q \leq 0.7$ を一応の適用範囲とみるのが安全であろう．したがって，$0.7 < q < 1$ に対しては，別な方法によらなければならないが，実はこのような範囲での計算は，極めて簡単な

近似式で高精度の結果を与えるものである。ただ一つの障害は，q' の指数部の underflow による制限であって，若干の工夫によって適用範囲を拡げうる場合もあるが，$0.9 < q$ のような領域が実際上の意味をもつかどうかは疑問である。

さて，$q = 0.7$ に対しては，

$$q' = 0.96066\ 95864 \times 10^{-12},$$

$$k^2 = 1 - k'^2, \quad k'^2 = 0.15370\ 71181 \times 10^{-10},$$

$$K = 13.83557\ 293, \quad K' = 1.57079\ 6327,$$

$$E = 1.00000\ 00000, \quad E' = 1.57079\ 6327$$

となるので，10桁の精度を要求される場合でも，

$$k^2 = 1, \quad E = 1, \quad K' = E' = \pi/2, \quad (q > 0.7) \qquad (10\cdot1)$$

と置くことができる。

10·2. 定数の計算

(1) ϑ_1' および ϑ_i

$$p' = q'^{1/4} = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\log q}\right) \qquad (10\cdot2)$$

と置けば，

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1' &= 2\pi\left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{3/2} p', \\ \vartheta_2 &= \vartheta_3 = \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2}, \\ \vartheta_4 &= 2\left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} p' \end{aligned}\right\} \quad q > 0.7 \qquad (10\cdot3)$$

HITAC 5020の場合は，$q \simeq 0.9$でq'がunderflowを起こすが，(10.2)のp'，したがって(10.3)は，$q \simeq 0.97$まで計算できるはずである。

(2) K

式(10.1)が成立する場合にも，Kの値だけはqに依存する．その計算は，

$$K = -\pi^2/(2\log q), \quad q>0.7 \qquad (10.4)$$

によって，ほとんど無制限に行なうことができる。

(3) k'

基本式から，

$$k' = 4q'^{1/2}, \quad q>0.7 \qquad (10.5)$$

が得られるが，(10.2)のp'を用いて，

$$k' = 4p'^2 \qquad (10.6)$$

とした方が，適用範囲は広くなる($q \simeq 0.94$まで)．ただし，k'^2は$q \simeq 0.89$でunderflowを起こす．

10.3. 関数の計算

(1) $\vartheta_i(v, q)$

上述のように，関数の種類としては$\vartheta_1(v)$と$\vartheta_4(v)$，変数の領域としては，$0 \leq v < 1/2$だけを考えればよい．ただしこの場合にも，q'のべきがunderflowをなるべく起

こさないような配慮が必要である。

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_1(v,q) &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q'^{(v^2+1/4)}\left(q'^{-v}-q'^{v}\right),\\ \vartheta_4(v,q) &= \left(-\frac{\pi}{\log q}\right)^{1/2} q'^{(v^2+1/4)}\left(q'^{-v}+q'^{v}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$0.7<q,\quad 0<v<1/2 \qquad (10.7)$$

HITAC 5020 の場合は, $q \simeq 0.94$ まで計算可能.

(2) $Z(u)$

$$Z(u)=\frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}}-\frac{u}{K},\quad 0\leq u<K,\quad q>0.7 \qquad (10.8)$$

$$\mathrm{ZETA}(v,q)=\frac{q'^{-v}-q'^{v}}{q'^{-v}+q'^{v}}-2v,\quad 0\leq v<1/2,\quad q>0.7 \qquad (10.9)$$

(3) $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{sn}(u,k) &= \tanh u,\\ \mathrm{cn}(u,k) &= \mathrm{dn}(u,k)=\mathrm{sech}\,u\end{aligned}\right\}\ k\simeq 1 \qquad (10.10)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{sn}(u,k) &= \frac{q'^{-v}-q'^{v}}{q'^{-v}+q'^{v}},\\ \mathrm{cn}(u,k) &= \mathrm{dn}(u,k)=\frac{2}{q'^{-v}+q'^{v}}\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&0\leq v<1/2,\\ &q>0.7\end{aligned} \qquad (10.11)$$

(4) $E(u)$

$$\begin{aligned}E(u) &= \tanh u\\ &= \frac{q'^{-v}-q'^{v}}{q'^{-v}+q'^{v}},\quad 0\leq v<1/2,\quad q>0.7\end{aligned} \qquad (10.12)$$

文　献

(1) 竹内端三：楕円関数論，岩波書店（1939）

(2) 友近晋：楕円関数論，河出書房（1943）

(3) G.N. Lance: Numerical Methods for High Speed Computers, Iliffe and Sons (1960)

(4) Jahnke-Emde: Funktionentafeln, Teubner (1933)

(5) 林桂一，森口繁一：高等関数表，第2版，岩波書店（1967）

(6) 高橋秀俊：完全楕円積分 $K(k)$, $E(k)$ の計算について，PC-1 Document No.9 (1960)

(7) 山本致子：QNOM, CEIK, CEIE, EJSN, EJCN, EJDN
東京大学大型計算機センターライブラリプログラム，
第I集（1967）

(8) 清野，藤井：楕円関数に関連した定数の計算について，京都大学計算センター月報，vol.4, no.10 (1969)

(9) 清野，藤井：楕円関数の計算について，同上，no.11 (1969)

(10) 清野，藤井：楕円関数の計算についての補遺，同上，no.12，予定

追記

報告後の討論において，ライブラリプログラムに関する一つの問題点として，“利用上の便宜と計算機の無駄使いをどのように調整すべきか”が論議された。

たとえば，本文に述べたように，sn，cn，dn関数のためのサブルティーンが登録されていれば，利用者が便宜を受ける場合も多いであろうが，反面，計算機時間の浪費を奨励する結果にもなりかねない。この問題を解決するために，

(1) 登録されているプログラムを活用して，特殊な関数を経済的に計算する方法を，マニュアルやニュースを通して，推薦ないし指導する。

(2) 一応，すべての関数に対するプログラムを登録しておき，利用上の便利さと，経済性のいずれをとるかは，適切な情報を与えた上で，利用者の選択にまかせる。

という提案がなされたが，いずれも得失があり，結論は得られなかった。

ただ，この種の問題が，楕円関数に限らず，ライブラリプログラム一般に関する考え方として，重要な意味をもつことが，改めて認識された。