数理解析研究所講究録
第 92 巻 1970 年 110-117

輻射輸達方程式の解法について

東大　宇宙研　　阿　部　寛治

§1.　まえがき

輻射輸達方程式は気体論におけるB-G-K模型方程式[1]と類似している。　実際，散乱がないときの輸達方程式は

$$\Omega\cdot\frac{\partial I_\nu(\mathbf{r},\Omega)}{\partial\mathbf{r}} = \alpha_\nu\left[B_\nu(T)-I_\nu\right] \tag{1}$$

と書ける。　ここでΩは方向を示す単位ベクトル，$B_\nu(T)$ はPlankの関数である。　これに対し，定常で外力のないときのB-G-K模型方程式は

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{v})}{\partial\mathbf{r}} = \alpha\left[M-f\right] \tag{2}$$

となる。　ただしαは衝突頻度，Mは局所的平衡分布でMaxwell分布で与えられる。

このように二つの方程式はよく類似しているので，一方の方程式に対する解法はそのまま他方の方程式に対して転用できるであろう。　我々は以前にB-G-K模型方程式を用いて

Couette流れと混合気体の衝撃波構造について数値計算を行なったが，その場合計算精度を落さないまま計算時間を大巾に短縮できる計算方法を見出した。[2,3] そこで，ここではB-G-K模型方程式に対して成功した方法を輸達方程式に適用して，輸達方程式を用いて数値計算を行うときの一つの計算方法を提案したい。

§2.　輻射輸達方程式の解法

いま考えている輻射の方向Ωに沿って位置座標rをとると，輸達方程式(1)は

$$\partial I_\nu/\partial r = \alpha_\nu [B_\nu(T) - I_\nu]$$

となる。この式が次のように積分できることはよく知られている。[4]

$$I_\nu(\tau_\nu) = \exp(\tau_{\nu 0}-\tau_\nu) I_\nu(\tau_{\nu 0}) + \int_{\tau_{\nu 0}}^{\tau_\nu} B_\nu(\tau_\nu') \exp(\tau_\nu' - \tau_\nu) d\tau_\nu' \qquad (3)$$

ここでτ_νは光学的深さで　$\tau_\nu = \int^r \alpha_\nu dr$

で与えられる。また境界条件として$\tau_\nu = \tau_{\nu 0}$で輻射強度が$I_\nu(\tau_{\nu 0})$で与えられるとした。

さて，(3)式を扱いやすくするため，我々は右辺の積分区間を次のように$\tau_\nu - \Delta\tau_\nu$で分割する。

$$I_\nu(\tau_\nu) = \exp(\tau_{\nu 0}-\tau_\nu) I_\nu(\tau_{\nu 0}) + \int_{\tau_{\nu 0}}^{\tau_\nu-\Delta\tau_\nu} + \int_{\tau_\nu-\Delta\tau_\nu}^{\tau_\nu}$$

この場合，右辺の第１項と第２項は

$$\exp(-\Delta\tau_\nu)\left[\exp\{\tau_{\nu 0}-(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)\} I_\nu(\tau_{\nu 0}) + \int_{\tau_{\nu 0}}^{\tau_\nu-\Delta\tau_\nu} B_\nu(\tau_\nu') \exp\{\tau_\nu'-(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)\} d\tau_\nu'\right]$$
$$= \exp(-\Delta\tau_\nu) I_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)$$

となり，(3)式は

$$I_\nu(\tau_\nu) = \exp(-\Delta\tau_\nu) I_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu) + \int_{\tau_\nu-\Delta\tau_\nu}^{\tau_\nu} B_\nu(\tau_\nu') \exp(\tau_\nu'-\tau_\nu) d\tau_\nu' \qquad (4)$$

と書きかえられる。　もし我々がもとの(3)式から輻射強度を得ようとするときは，それぞれの τ_ν に対して繰返し $\tau_{\nu 0}\sim\tau_\nu$ の間の積分を行なわなければならない。　これに対し，(4)式では，$\Delta\tau_\nu$ だけ手前の輻射強度 $I_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)$ が分っていれば，積分は $\tau_\nu-\Delta\tau_\nu \sim \tau_\nu$ の狭い区間についてのみ行なえばよい。したがって，もし $B_\nu(\tau_\nu)$ が分っているときは，比較的簡単に(4)式から逐次的に輻射強度を得ることができる。

(4)式をさらに扱いやすくするため，$B_\nu(\tau_\nu')$ を次のように展開する。

$$B_\nu(\tau_\nu') = B_\nu(\tau_\nu) + \frac{\partial B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu}(\tau_\nu'-\tau_\nu) + \frac{\partial^2 B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu^2}\frac{(\tau_\nu'-\tau_\nu)^2}{2} + \cdots\cdots$$

このようにすると(4)式の積分が行なえて

$$I_\nu(\tau_\nu)=\exp(-\Delta\tau_\nu)I_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)+G_0(\Delta\tau_\nu)B_\nu(\tau_\nu)-G_1(\Delta\tau_\nu)\partial B_\nu(\tau_\nu)/\partial\tau_\nu$$
$$+G_2(\Delta\tau_\nu)\partial^2B_\nu(\tau_\nu)/\partial\tau_\nu^2-\cdots\cdots+(-1)^kG_k(\Delta\tau_\nu)\partial^kB_\nu(\tau_\nu)/\partial\tau_\nu^k+\cdots\cdots \tag{5}$$

となる。　ここでG_kは次のように定義される。

$$G_k(\omega)=\frac{1}{k!}\int_0^\omega t^k e^{-t}dt=1-e^{-\omega}\sum_{l=0}^{k}\frac{\omega^l}{l!}$$

この関数$G_k(\omega)$はすべてのkに対し，$G_k(0)=0$で，ωが大きくなると単調に増加し，$G_k(\infty)=1$である。　(5)式中の$B_\nu(\tau_\nu)$の微分を差分で近似し

$$\left.\begin{aligned}\partial B_\nu(\tau_\nu)/\partial\tau_\nu&=[B_\nu(\tau_\nu)-B_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)]/\Delta\tau_\nu\\ \partial^2B_\nu(\tau_\nu)/\partial\tau_\nu^2&=[B_\nu(\tau_\nu+\Delta\tau_\nu)-2B_\nu(\tau_\nu)+B_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)]/\Delta\tau_\nu^2\\ &----------\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

とすると，我々は最終的に

$$I_\nu(\tau_\nu)=\exp(-\Delta\tau_\nu)I_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)+G_0(\Delta\tau_\nu)B_\nu(\tau_\nu)-G_1(\Delta\tau_\nu)[B_\nu(\tau_\nu)$$
$$-B_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)]/\Delta\tau_\nu+G_2(\Delta\tau_\nu)[B_\nu(\tau_\nu+\Delta\tau_\nu)-2B_\nu(\tau_\nu)+B_\nu(\tau_\nu-\Delta\tau_\nu)]/\Delta\tau_\nu^2$$
$$-\cdots\cdots \tag{7}$$

を得る。　もし$\Delta\tau_\nu$の間で$B_\nu(\tau)$が大きく変らず，(6)式のように微分が差分で近似できる範囲では(7)式はもとの(3)式に対し充分良い近似式となる。　実際に数値計算を行うときは，要求される精度に応じて(7)式の右辺を打切ればよい。　このように我々は積分計算を行なわなくても輻射強度を得ることができる。

(7)式の特徴を1次元の場合について検討してみよう。いま，すべての物理量がX軸方向にのみ変化するとすると

$$\Delta\tau_\nu = \alpha_\nu \Delta X / \cos\theta$$

と書けるであろう。ここで θ はいま考えている輻射の方向 Ω とX軸の間の角度である。この場合 θ が $\pi/2$ に近ずくと $\Delta\tau_\nu$ は無限大になるが，α_ν と $B_\nu(T)$ の変る基準長さに比較して ΔX が充分小さくさえあれば，$\Delta\tau_\nu$ の大きさにかかわらず(7)式は成立する。また θ が $\pi/2$ より大きいときは，ΔX が負の値をとるので，$\Delta\tau_\nu$ はたえず正の値をとる。(7)式で最初の2つの項だけとってみると

$$I_\nu(X, \theta) = e^{-\omega} I_\nu(X-\Delta X, \theta) + (1-e^{-\omega}) B_\nu(X) \tag{8}$$

となる。ただし以下の記述を簡単にするため，$\alpha_\nu \Delta X / \cos\theta$ を ω で置きかえた。

さて，ここでもとの輸達方程式(1)に帰り，これを1次元の場合について書くと

$$\cos\theta \, \partial I_\nu(X,\theta)/\partial X = \alpha_\nu [B_\nu(T) - I_\nu]$$

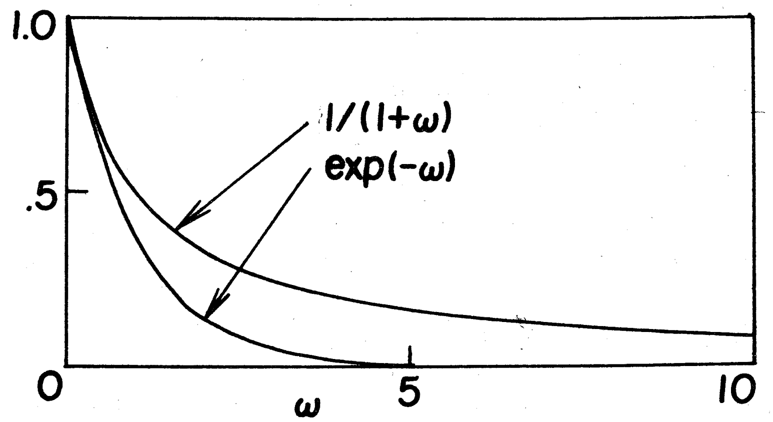
となる。この式を差分方程式に直接書きかえるため

$$\partial I_\nu(X,\theta)/\partial X = [I_\nu(X,\theta) - I_\nu(X-\Delta X,\theta)]/\Delta X$$

と近似すると

$$I_\nu(X,\theta) = \frac{1}{1+\omega} I_\nu(X-\Delta X,\theta) + \left(1-\frac{1}{1+\omega}\right) B_\nu(X) \quad (9)$$

が得られる。 (8)式と単純な差分式(9)を比較すると，(8)式の $\exp(-\omega)$ の代りに(9)式では $1/(1+\omega)$ がきている。 そこで $\exp(-\omega)$ と $1/(1+\omega)$ の違いを見るため，両方の関数を第1図に示した。 この図から分るように，$\omega \simeq 0$ では $\exp(-\omega)$ と $1/(1+\omega)$ は等しいが，大きい ω に対しては両者の間にかなりの差がある。 たとえば，$\omega=2.513$ でその差は最大になり 0.204 である。 したがって単純な差分式(9)で計算する場合，その結果は(8)式を用いたときの結果とかなり異るものになることが予想される。



第1図 $1/(1+\omega)$ と $\exp(-\omega)$

実際に数値計算を行うとき，単純な差分式(9)を用いる場合と(8)式のように一度積分を経た式を用いる場合，どちらの方が良い結果を与えるかまだ確かめていない。 しかし，前節で述べたように，輻射輸達方程式は気体論における B-G-K 模型方程式とよく類似しているので，B-G-K 模型方程式の場合

からある程度の類推ができるであろう。　B-G-K模型方程式(2)に対して輸達方程式のときと同様の手続きをとると

$$f(\tau) = \exp(-\omega) f(\tau-\Delta\tau) + G_0(\omega) M(\tau) - G_1(\omega)\left[M(\tau) - M(\tau-\Delta\tau)\right]/\omega \tag{10}$$

が得られる。　ただし右辺で2次以上の項は打切った。

またτとωは　$\tau = \int^r \alpha dr$,　$\omega = \Delta\tau / V$

で与えられる。　一方，(2)式から直接得られる差分方程式は

$$f(\tau) = 1/(1+\omega)\, f(\tau-\Delta\tau) + (1 - 1/(1+\omega))\, M(\tau) \tag{11}$$

となる。　我々は以前にアルゴン－ヘリウム混合気体の平面衝撃波の構造について実際に数値計算を行なった。[2)]　その場合(10)式を混合気体の場合について拡張して用い，その計算結果は連続の条件等保存則を充分満し，また実験結果と良く一致した。　他方(11)式のような単純な差分式も用いて数値計算を行なってみたが，このときは分布関数 $f(\tau, V)$ がτについて振動発散して解を得ることができなかった。　したがって，少なくともB-G-K模型方程式を用いるときは，単純な階差式(11)式より(10)式を用いた方が有効であると云える。

References

1) P.L.Bhatnagar, E.P.Gross and M.Krook, A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems, Phys. Rev., Vol.94, No.3, 1954, P.511.

2) K.Abe and H.Oguchi, Shock Wave Structure in Binary Gas Mixtures, in 'Rarefied Gas Dynamics', L.Trilling and H.Y. Wachman ed.(Academic Press Inc., New York, 1969), Vol.I, P.425.

3) K.Abe, A Numerical Analysis of Plane Couette Flow of Rarefied Binary Gas Mixture, Report of Inst. of Space and Aero. Sci., Univ. of Tokyo, No.440(Vol.34, No.7), 1969, P.117.

4) For example, see V.G.Vincenti and C.H.Kruger,Jr., 'Introduction to Physical Gas Dynamics' (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967), Chap.XI.