数理解析研究所講究録
第93巻 1970年 1-9

半線型 Schrödinger 方程式に対する差分近似

大阪市立大 工　亀高 惟倫

半線型 Schrödinger 方程式に対する Cauchy 問題を考える

(1)
$$\begin{cases} D_t u = i D^2 u + i|u|^2 u & (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in R^1 \end{cases} \qquad \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t},\ D = \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

この方程式はある種の非線型な波動の伝播現象において非線型効果による波形のゆるやかな変化を記述する。たとえば非線型 Klein - Gordon 方程式とか、プラズマのある種の波の方程式等より物理的処理(?)により導かれる。([1], [2])
又 non linear optics における簡単なモデル方程式として登場する。([3])　(1) は次の様な特殊解を持つ

(2)
$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{2-s^2}}\, dn\left(\pm\sqrt{\frac{\lambda}{2-s^2}}\, x\right) e^{i\lambda t} \qquad (\lambda > 0)$$

ただし $dn\, z$: Jacobi の楕円函数 (modulus s　$0 < s \leq 1$)
(2) は周期 $2K(s)\sqrt{\frac{2-s^2}{\lambda}}$ の periodic wave である。

$$K(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}}$$

$s \to 1$ とすると $\mathrm{dn}\, z \to \mathrm{sech}\, z$ であるから (1) は次の様な solitary wave も特殊解として持つ。

(3) $\quad u(x,t) = \pm\sqrt{2\lambda}\ \mathrm{sech}(\pm\sqrt{\lambda}\, x)\, e^{i\lambda t} \qquad (\lambda > 0)$

これらの特殊解をそのわく内に含む大域解の存在定理がある。もっと一般化可能であるがここでは一番簡単な形で定理をのべておく。存在定理の証明については別の機会にのべる。

[存在定理] ([4])

任意の自然数 k に対し $f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^{2k}$ とすると Cauchy 問題 (1) の大域解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{2k}) \cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{E}_{L^2}^{2k-2}) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^k(L^2)$ $(0 \le t < \infty)$ が一意的に存在する。

又上の結果において $\mathcal{E}_{L^2}^k$ を $\mathcal{P}_\ell^k = \mathcal{E}_{L^2,loc}^k \cap \{\text{period } \ell\}$ で置きかえてもよい。

[系]

$f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^\infty$ ならば $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_{L^2}^\infty)$ である。

$f(x) \in \mathcal{P}_\ell^\infty$ ならば $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{P}_\ell^\infty)$ である。

上の存在定理のためには (1) の解の a priori estimate を得る事が本質的であるが、そのためには (1) が $|u|^2$ と $|Du|^2 - \frac{1}{2}|u|^4$ なる2つの conserved density (T が $D_t T = DX$ なる X を持つとき conserved density と呼ぶ) を持つ事を利用する。

[a priori estimate]

(1) の解 $u(x,t)$ は次の a priori estimate を持つ.

$$\|u\|^2 = \|f\|^2$$
$$\|D^k u\|^2 + \|u\|^2 \leq U_k(t, \|D^k f\|, \cdots, \|f\|)$$
$$k = 1, 2, 3, \cdots$$

ただし $\|u\| = \|u\|_{L^2(R^1)}$, U_k は正値, 各変数にかんし単調増大なめらかな函数である。

ここ Cauchy 問題 (1) に対するほぼ理想的な (数学的に!) 差分近似として次の様な特殊な implicit scheme を考えよう

$$(4)\quad \begin{cases} D^+ u_j^{n-1} = i D_- D_+ \dfrac{u_j^n + u_j^{n-1}}{2} + i\,|u_j^{n-1}|^2 \dfrac{u_j^n + u_j^{n-1}}{2} \\ u_j^0 = f_j \qquad n = 1, 2, \cdots \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

ただし次の様に約束する $u_j^n = u(jh, n\Delta t)$, h : mesh-width

$\Delta t = \lambda h^2$: time-step $\lambda = \text{const}$: mesh ratio

$$D^+ u_j^{n-1} = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}, \quad D_+ u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, \quad D_- u_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}$$

$(u^n, v^n)_h = h \sum_j u_j^n \overline{v_j^n}$, $\|u^n\|_h^2 = h \sum_j |u_j^n|^2$ なる内積及びノルムを入れて考える事にする。(4) の解に関する次の様な a priori estimate が得られる。

[差分近似解に対する a priori estimate]

$$\|u^n\|_h = \|f\|_h \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\|D_+u^n\|_h^2 - \frac{1}{2}\| |u^n|^2 \|_h^2 \leq \|D_+u^{n-1}\|_h^2 - \frac{1}{2}\| |u^{n-1}|^2 \|_h^2 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\|D_+u^n\|_h^2 \leq 2K(2\|f\|_h^2)\|f\|_h^4 + 2\|D_+f\|_h^2 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

ただし $K(z)$ は正係数多項式であって次の様に Sobolev の lemma に現われる。

$$|u^n|^2 \leq \varepsilon\|D_+u^n\|_h^2 + K\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\|u^n\|_h^2 \qquad ({}^\forall\varepsilon>0)$$

ただし $|u^n| = \sup_j |u_j^n|$

I の評価より

$$|u^n|^2 \leq c\left[\|f\|_h^2 + 2K(2\|f\|_h^2)\|f\|_h^4 + 2\|D_+f\|_h^2\right]$$

したがって差分法 (4) の解は存在する限り n にかんし一様に有界である事がわかる。

さて差分法 (4) は u_j^n にかんし implicit であるから u_j^{n-1} をあたえて u_j^n にかんして解く時次の様な逐次近似による。

(5) $$u_j^{n-\frac{1}{m+1}} = u_j^n + \frac{i\lambda}{2}\left[u_{j+1}^{n-\frac{1}{m}} - 2u_j^{n-\frac{1}{m}} + u_{j-1}^{n-\frac{1}{m}}\right] + \frac{i\lambda}{2}\left[u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}\right] + \frac{i\lambda h^2}{2}|u_j^{n-1}|^2 u_j^{n-\frac{1}{m}} + \frac{i\lambda h^2}{2}|u_j^{n-1}|^2 u_j^{n-1}$$

$m = 1, 2, 3, \cdots$

［定理］

$$\rho = 2\lambda\left[1 + \frac{h^2}{4}c\left\{\|f\|_h^2 + 2K(2\|f\|_h^2)\|f\|_h^4 + 2\|D_+ f\|_h^2\right\}\right] < 1$$

とすると逐次近似 (5) は $m\to\infty$ とするとき $\|\ \|_h$ ノルムで収束する。又各点的にも収束する。したがってこの時差分法 (4) は一意的に可解である。

(4) の解に対するさらにくわしい a priori estimate

［a priori estimate］

任意の自然数 k に対し帰納的に次の評価が成り立つ

$n\Delta t \le t$, $c V_{k-1}(t)\Delta t < 1$ とすると.

$$\|D_+^k u^n\|_h \le V_k(t, \|D_+^k f\|_h, \cdots, \|f\|_h)$$

$i + j = k$, $n\Delta t \le t$, $c V_{2k-1}(t)\Delta t < 1$ とすると

$$\|D^{+i} D_+^{2j} u^n\|_h \le V_{2k}(t, \|D_+^{2k} f\|_h, \cdots, \|f\|_h)$$

ただし V_k は正値 各変数について単調増大ななめらかな函数である。

(4) の解 $u_h = u_j^n$ が $h \to 0$ の時 (1) の真の解 $u(x,t)$ に収束する事をいうために次の様に $u_h = u_j^n$ を修正して考える。すなわち ${}^{\forall}T > 0$ を1つ固定しておいて $\varphi(t) \in \mathcal{D}(R^1)$

$\varphi(t) = 1 \quad 0 \le t \le T, \quad \varphi(t) = 0 \quad t \ge T+1$ なる $\varphi(t)$ を1つえらんで $\varphi(n\Delta t)\, u_j^n$ をあらためて u_j^n と書く事とする。しかるのち $n < 0$ に u_j^n を次の様に拡張する

$$u_j^n = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_j^{-\nu n} \qquad n < 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{k} (-\nu)^l a_\nu = 1 \qquad 0 \le l \le k-1$$

この様にして全ての (n, j) に対して定義された u_j^n が得られるが この修正された u_j^n に対しても上のくわしい a priori estimate が成り立つと思ってよい。

[定義]

$$\tilde{u}_h(x,t) = \int_{\substack{|2\xi h| \le 1 \\ |2\tau\Delta t| \le 1}} e^{2\pi i(\xi x + \tau t)}\, \hat{u}_h(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

$$\hat{u}_h(\xi,\tau) = \sum_{j,n} e^{-2\pi i(\xi j h + \tau n \Delta t)}\, u_j^n\, h \cdot \Delta t$$

$\tilde{u}_h(jh, n\Delta t) = u_j^n$ であるからこの様に定義された $\tilde{u}_h(x,t)$ は u_j^n の smooth interpolation を与える。

[補題]

$$\|D^{+i} D_+^{j} u_h\|_{L^2_h(R^2)} \le \|D_t^{i} D^{j} \tilde{u}_h\|_{L^2(R^2)} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{i+j} \|D^{+i} D_+^{j} u_h\|_{L^2_h(R^2)}$$

for $\forall i, j$

ただし

$$\|u_h\|^2_{L^2_h(R^2)} = \sum_{j,n} h \Delta t |u_j^n|^2$$

上の補題より $\tilde{u}_h$ に対する次の評価が従う。

[命題]

$$\|D_t^{i} D^{2j} \tilde{u}_h\|_{L^2(R^2)} \le const. \sup_{0\le h\le h_0} V_{2k}\left(T+1, \|D_+^{2k} f\|_h, \cdots, \|f\|_h\right)$$

for $i+j \le k$

Sobolev's lemma より

$$|D_t^{i} D^{2j} \tilde{u}_h|_{\mathcal{B}^1(R^2)} \le const_1 \|D_t^{i} D^{2j} \tilde{u}_h\|_{\mathcal{E}^3_{L^2}(R^2)}$$

$$\le const. \sup_{0\le h\le h_0} V_{2(k+3)}\left(T+1, \|D_+^{2(k+3)} f\|_h, \cdots, \|f\|_h\right)$$

したがって Ascoli - Arzela の定理より

[収束定理]

任意の自然数 k に対し $i+j \le k$ なる時 $D_t^{i} D^{2j} \tilde{u}_h$ の部分列 $D_t^{i} D^{2j} \tilde{u}_{h'}$ があって $h' \to 0$ とすると $D_t^{i} D^{2j} u$ に $R^1 \times [0,T]$ において compact 一様に収束する。ただし u は

Cauchy 問題 (1) の真の解である。

最後に誤差評価にかんして次の定理を得る。ただしこの時 $u_h = u_j^n$ は $((j-\frac{1}{2})h, (j+\frac{1}{2})h)$ なる区間で一定値 u_j^n を取る階段函数とみなす。

[誤差評価]

$u(x,t)$ を (1) の真の解 u_j^n を (4) の解とすると

$$\|u(x,t) - u_j^n\|_{L^2(R^1)} \le O(h)\, W_1(t, \|D^5 f\|, \cdots, \|f\|)$$

$$+\, O(|t - n\Delta t|)\, W_2(t, \|D^2 f\|, \cdots, \|f\|)$$

for $\forall t \ge 0$ $\forall n \ge 0$

ただし W_1, W_2 は正値，各変数について単調増大ななめらかな函数である。

References

1 Taniuti, T., and Yajima, N., Perturbation method for a nonlinear wave modulation. I, J. Math. Phys., Vol.1o, 1369-1372 (1969).

2 Asano, N., Taniuti, T., and Yajima, N., Perturbation method for a nonlinear wave modulation. II, (to appear).

3 Kelley, P. L., Self-focusing of optical beams, Phys. Rev. Letters, Vol.15, 1oo5-1oo8 (1965).

4 Kametaka, Y., On the global solutions of a semilinear Schrödinger equation, (to appear).