数理解析研究所講究録
第93巻 1970年 21-34

巡回的消散作用素により生成された非線形半群について

東大 理　渡辺 二郎

序

実ヒルベルト空間Hにおける縮小作用素の半群の理論は高村幸男氏により基礎が確立された（Kōmura [1], [2]）．この理論によればH×Hの極大な消散[(1)]部分集合はHにおける縮小作用素の半群を生成する．ところでH上で定義された下半連続な凸関数 f の劣微分[(2)] ∂f に対して，$-\partial f$ は極大な消散集合であることが証明される（§5，Moreau [1]）．本稿では，H上の連続な凸関数 f が与えられたとき，$-\partial f$ によって生成される縮小作用素の半群をとりあつかう．

§§1，2，3と5においては必要となる概念について，最後の§9においては主要な結果について述べる．§§4と8は

---

(1)　消散 = dissipative.

(2)　劣微分 = subdifferential.

§9における理論の展開のための準備であり，§§6と7においては例をあげる．

記号についての説明．二つの集合 X と Y の直積 $X \times Y$ の要素を $[x, y]$ とかく．$X \times Y$ の部分集合 A に対して $Ax = \{y ; [x, y] \in A\}$，$D(A) = \{x ; Ax \neq \emptyset\}$ とかく．$D(A)$ を A の定義域という．各 $x \in D(A)$ に対して Ax がただひとつの点からなる集合のとき A を作用素という．Y がノルム空間であるとき，もし Ax に最小のノルムをもつ要素がただひとつだけあるならば，この要素を $A^{\circ}x$ とかく．

§1．凸関数

X は実線形位相空間，X' はその双対空間とする．f は X において定義された広義の実数値関数とする．すべての $x \in X$ に対して $f(x) > -\infty$ であり，ある点において f が有限の値をとるとき，f は適性[1]関数であるということにする．f は X 上の適性関数とする．点 x_0 において f は有限の値をとるとする．$y \in X$ に対して，もしつぎの式の右辺が存在するならば，

$$f'(x_0 ; y) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r}\{f(x_0 + ry) - f(x_0)\}$$

とおく（directional derivative）．f の劣微分 ∂f は

---

(1) 適性 = proper.

$$\partial f = \{[x, x'] \in X \times X' ;\ f(y) \geqq f(x) + \langle y - x, x' \rangle, \forall y \in X\}$$

と定義する．f が適性であるから，明らかに ∂f の定義域 $D(\partial f)$ に属する点において f は有限である．$[x, x'] \in \partial f$ であるとき，f は x において劣微分可能であるといい，x' は x における f のひとつの劣勾配という[1]．

f は X 上の適性凸関数とする．点 $x \in X$ において f が有限ならば，任意の $y \in X$ に対して $f'(x ; y)$ が定義される．このとき $[x, x'] \in \partial f$ と $f'(x ; y) \geqq \langle y, x' \rangle$ $(\forall y \in X)$ が同値であることが容易に証明される．f が x において劣微分可能であるとき，関数 $y \longrightarrow f'(x ; y)$ も適性凸であることが容易にわかる．

凸関数の劣微分可能性に関して二つの定理を述べる．

定理 1 (Brøndsted - Rockafellar [1])．X は実バナハ空間，f は X 上の下半連続な適性凸関数とすれば，$\{x ; f(x)$ が有限$\}$ は $D(\partial f)$ の閉包にふくまれる．

定理 2 (Moreau [2])．X は実線形位相空間，f は X 上の適性凸関数とする．もし f が $z \in X$ において有限かつ連続ならば，f は z において劣微分可能である．

あとで定理 2 をもちいる．

---

(1) 劣微分可能 = subdifferentiable，劣勾配 = subgradient．

§2. 共役凸関数

X は実局所凸線形位相空間，X' はその双対空間，f は X 上の適性関数とする．f の共役関数 f^* は

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} \{ \langle x, x' \rangle - f(x) \}, \quad x' \in X'$$

により定義される．f^* は X' 上の（たとえば弱*位相に関して）下半連続な適性凸関数である．さらに f が下半連続で凸であるならば

$$f(x) = \sup_{x' \in X'} \{ \langle x, x' \rangle - f^*(x') \}, \quad x \in X$$

がなりたつ．

§3. 巡回的単調集合[1]

定義 3．A は $X \times X'$ の部分集合とする．(i) すべての $[x_i, x_i'] \in A$, $i = 1, 2$, に対して $\langle x_1 - x_2, x_1' - x_2' \rangle \geqq 0$ がなりたつとき A は単調であるという．(ii) (Rockafellar [1])．A のすべての有限部分集合 $\{[x_i, x_i']\}_{i=0}^{n}$ に対して

$$\langle x_0 - x_n, x_n' \rangle + \langle x_n - x_{n-1}, x_{n-1}' \rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, x_0' \rangle \leqq 0$$

がなりたつとき，A は巡回的単調であるという．

---

(1) 巡回的 = cyclically，単調 = monotone．

実線形位相空間 X 上の適性関数 f に対してその劣微分 ∂f は巡回的単調である．逆に $X \times X'$ の部分集合 A が巡回的単調であれば，X 上の下半連続な適性凸関数 f で，$A \subseteq \partial f$ をみたすものが存在する（Rockafellar [1]）．したがって A が極大な巡回的単調集合ならば，X 上の下半連続な適性凸関数 f で，$A = \partial f$ をみたすものが存在する．

§4. 劣微分と directional derivative の関係

つぎに述べる定理は Rockafellar [1] が注意したものである．

定理4．X は実局所凸線形位相空間，f は X 上の適性凸関数とする．もし f が $z \in X$ において劣微分可能であれば

$$(1) \qquad \liminf_{y \to x} f'(z\,;\,y) = \sup_{u \in (\partial f)z} \langle x, u \rangle, \quad x \in X$$

がなりたつ．

略証．(1)の左辺によって定義される関数を $g(x)$ とかくことにすれば，g は X 上の下半連続な適性凸関数であることがわかる．g の共役凸関数 g^* は

$$g^*(u) = \begin{cases} 0, & u \in (\partial f)z \\ \infty & u \in X' \setminus (\partial f)z \end{cases}$$

となることが，g の正同次性などからわかる．したがって

$$g(x) = \sup_{u \in X'} \{\langle x, u\rangle - g^*(u)\} = \sup_{u \in (\partial f)z} \langle x, u\rangle$$ が得られる。

Moreau [2] はつぎの定理を証明した。

定理 5. X は実線形位相空間，f は X 上の適性凸関数とする。f が $z \in X$ において有限かつ連続であれば

$$f'(z; x) = \sup\{\langle x, u\rangle ; u \in (\partial f)z\}, \quad x \in X$$

がなりたつ。

もし定理 5 において，X が局所凸であると仮定するならば定理 5 は定理 4 から容易にみちびかれる。

つぎの補題は §9 において利用される。

補題 6. f は実ヒルベルト空間 H 上の適性凸関数とする。f が $z \in H$ において有限かつ連続であれば，$(\partial f)^\circ z \neq 0$ のとき

$$f'\left(z; -\frac{(\partial f)^\circ z}{\|(\partial f)^\circ z\|}\right) = \min_{\|x\|=1} f'(z; x) = -\|(\partial f)^\circ z\|.$$

略証. $x \in H$, $\|x\| = 1$ とする。

$$f'\left(z; -\frac{(\partial f)^\circ z}{\|(\partial f)^\circ z\|}\right) = \sup_{y \in (\partial f)z}\left(-\frac{(\partial f)^\circ z}{\|(\partial f)^\circ z\|}, y\right) = \left(-\frac{(\partial f)^\circ z}{\|(\partial f)^\circ z\|}, (\partial f)^\circ z\right)$$

$$\leq (x, (\partial f)^\circ z) \leq \sup_{y \in (\partial f)z} (x, y) = f'(z; x).$$

§5. ヒルベルト空間上の凸関数の劣微分

f は実ヒルベルト空間 H 上の下半連続な適性凸関数とする。

$z \in H$ と $t > 0$ に対して

$$g(u) = \frac{1}{2t}\|u - z\|^2 + f(u), \quad u \in H$$

とおけば，g は最小値をただひとつの点においてとる．この点を $J_f(t)z$ とかくことにする．

定理7．f は H 上の下半連続な適性凸関数，f^* は f の共役凸関数とすれば

$$z = J_f(t)z + tJ_{f^*}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{z}{t}, \quad z \in H, t > 0$$

と

$$\partial f = \left\{\left[J_f(t)z, J_{f^*}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{z}{t}\right] ; z \in H\right\}$$

がなりたつ．

Moreau [1] では，$t = 1$ の場合が述べられているが，それは本質的な変更なしに一般の $t > 0$ に対しても有効である．もし f が最小値をとるならば，f が最小値をとる点の全体 N は閉かつ凸である．このときつぎの式がなりたつ

$$\lim_{t \to \infty} J_f(t)z = \mathrm{proj}_N z, \quad z \in H.$$

定理7から，H 上の下半連続な適性凸関数 f に対して，∂f は極大な単調集合であることがわかる．したがって§3に述べたひとつの結果をもちいれば，$H \times H$ の極大な巡回的単調部分集合は極大な単調集合であることもわかる．

§6. 巡回的単調な線形作用素

実ヒルベルト空間Hにおける線形非負対称作用素は巡回的単調であることが容易に証明できる。また，Hにおける線形非負自己共役作用素Aはあきらかに極大単調である。したがってAに対してH上の下半連続な適性凸関数fで，$\partial f = A$をみたすものが存在する（§3）。逆に，もしfがH上の下半連続な適性凸関数であり，∂fが一価線形の作用素で，その定義域$D(\partial f)$がHにおいて稠密ならば，∂fはHにおける非負自己共役作用素である。さらにこのとき

$$f(x) = f(0) + \frac{(x, (\partial f)x)}{2}, \qquad x \in D(\partial f)$$

がなりたつ。これらのことは数直線上の有限な凸関数は各有限区間において絶対連続であるというよく知られた結果をもちいて証明することができる。

§7. 巡回的単調な非線形作用素の例

極大な巡回的単調非線形作用素の例をあげる。ΩはR^3の有界な開集合で，その境界はなめらかとする。$L^2(\Omega)$における二つの作用素AとBをつぎのように定義する：AとBの定義域はともに$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$であり，$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$に対して

$$Au = -\Delta u, \quad Bu = |u|^\rho u, \quad (\rho > 1)$$

とおく．このときAは$L^2(\Omega)$における非負自己共役作用素であるから，極大巡回的単調である（§6）．$H^2(\Omega)$に属する関数はΩにおいて有界であるから，$u \in D(B)$に対してBuは$L^2(\Omega)$に属すことに注意する．

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$の単調集合は巡回的単調であることが容易に証明される．したがって$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への単調増加関数$\xi \to |\xi|^\rho \xi$は巡回的単調である．したがってBは$L^2(\Omega)$において巡回的単調である．ところで高村氏の方法により$A+B$は$L^2(\Omega)$において極大な単調作用素であることがわかる（この講究録の中で高村氏の論文をみよ）．したがって$A+B$は$L^2(\Omega)$において極大巡回的単調であることがわかる．したがって，§3の結果によれば，H上の下半連続な適性凸関数でその劣微分がちょうど$A+B$に一致するようなものが存在する．

§8. 連続な凸関数

この節ではつぎの定理が基本的である.

定理8. A は $H\times H$ の単調部分集合で, その定義域の内部, $\mathrm{Int}\,D(A)$, は空でないとする. このとき A は $\mathrm{Int}\,D(A)$ において局所有界である, すなわち各 $u\in \mathrm{Int}\,D(A)$ に対して u の近傍 $U\subseteq \mathrm{Int}\,D(A)$ が存在して

$$\sup\{\|v\|\,;\ [v,w]\in A \text{ かつ } v\in U\}<\infty.$$

この定理8は Crandall－Pazy [1], p.392, Remark 2.4 において注意されたものである. この証明に Kato [1] の結果をもちいる.

定理9. f は H 上の適性凸関数で, $D(\partial f)$ は空でない開集合であるとすれば, f は $D(\partial f)$ において連続である.

証明. 任意の $z\in D(\partial f)$ に対して

$$f(x)\leqq (x-z,\,y)+f(z),\quad [x,y]\in\partial f$$

がなりたつ. したがって定理8により, f は $D(\partial f)$ において局所的に上に有界である. したがって f の凸性により f は $D(\partial f)$ において連続である.

定理10. A は $H\times H$ の極大な巡回的単調部分集合で, $D(A)$ は H の開集合であるとする. このとき

(i) H上の下半連続な適性凸関数 f で，$A = \partial f$ かつ f は $D(A)$ において連続であるような f が存在する．

(ii) もし f と g が H 上の下半連続な適性凸関数で $A = \partial f = \partial g$ をみたすならば，実数 c が存在して $f(x) = g(x) + c$, $x \in D(A)$ がなりたつ．

(i) の証明．§3 の結果により，$A = \partial f$ をみたす下半連続な適性凸関数 f が存在するが，このとき定理9により f は $D(A)$ において連続である．(ii) の証明には定理5を適用すればよい．

§9．縮小作用素の半群

f は実ヒルベルト空間H上の下半連続な適性凸関数であり，その劣微分の定義域 $D(\partial f)$ はHの開集合であるものとする．非線形半群の理論によれば，∂f の極大単調性により，任意の $x \in D(\partial f)$ に対して絶対連続な関数 $u : [0, \infty) \to D(\partial f)$ で

$$u(0) = x, \quad u'(t) \in -(\partial f)u(t) \quad (\text{ほとんどすべての } t \geq 0)$$

をみたす u がただひとつ存在する．このときすべての $t \geq 0$ において $D^+u(t) = -(\partial f)^0 u(t)$ がなりたつことが証明される．$u(t)$ を $T_t x$ とかくことにすれば，$\{T_t ; t \geq 0\}$ は $D(\partial f)$ 上の縮小作用素の半群である．$\{T_t\}$ を $-\partial f$ により

生成された半群とよぶ．$\{T_t\}$ と f とのあいだにつぎの関係が成立する：$x \in D(\partial f)$ に対して

(2) $\quad f(T_t x) - f(T_s x) = -\int_s^t \|T'_r x\|^2 dr, \quad t, s \geqq 0$

および

(3) $\quad \lim_{t\to\infty} f(T_t x) = \inf\{f(y);\ y \in H\}.$

(2) の証明に補題6と，f の $D(\partial f)$ 上の局所リプシッツ連続性をもちいる．(3) の証明は容易である．

定理10と (3) をもちいてつぎの定理を証明することができる．

定理11. 定義域が開集合であるような極大巡回的単調集合 A に対して，$-A$ により生成された $D(A)$ 上の半群を $\{T_t\}$ とする．もし $x \in D(A)$ と $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, が存在して，$T_{t_n} x$ が $n \to \infty$ のときある $z \in H$ に弱収束するならば，z は $\{T_t\}$ の不動点である．

定理11からつぎのことがわかる：H が有限次元であり，$-A$ により生成された半群 $\{T_t\}$ が不動点をもつならば，任意の $x \in D(A)$ に対して $T_t x$ は $t \to \infty$ のとき $\{T_t\}$ のある不動点に収束する．このことは H が無限次元である場合にも成立するであろうと予想される．

$\{T_t\}$ が不動点をもつ場合につぎの補題がなりたつ．

補題 12. Aは極大な巡回的単調集合であり，$D(A)$は開集合であるとする．$-A$により生成された半群$\{T_t\}$が不動点をもつと仮定する．このとき任意の$x \in D(A)$に対して関数$t \longrightarrow t\|T_t x\|^2$は$[0, \infty)$において可積分である．

補題 12 をもちいれば，つぎの定理を証明することができる．

定理 13. Aと$\{T_t\}$は補題 12 の仮定をみたすものとする．もし$x \in D(A)$に対して，ある$z \in H$があり

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T_r x \, dr = z$$

であるならば，zは$\{T_t\}$のひとつの不動点であり，

$$\lim_{t \to \infty} T_t x = z$$

がなりたつ．

参考文献

Bishop, E. and R.R. Phelps : [1] The support functional of a convex set, Convexity, Proc. Sympos. Pure Math. Vol.7, Am. Math. Soc. 27

-35 (1962).

Brøndsted, A. and R.T. Rockafellar: [1] On the subdifferentiability of convex functions, Proc. Am. Math. Soc. 16, 605-611 (1965).

Crandall, M.G. and A. Pazy: [1] Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Func. Anal. 3, 376-418 (1969).

Kato, T: [1] Demicontinuity, hemicontinuity, and monotonicity. II, Bull. Am. Math. Soc. 73, 886-889 (1967).

Kōmura, Y.: [1] Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19, 493-507 (1967).

[2] Differentiability of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 21, 375-402 (1969).

Moreau, J.J. [1] Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. math. France, 93, 273-299 (1965).

[2] Fonctionnelles convexes, Seminaire sur les équations aux dérivées partielles II, Collège de France (1966-1967).

Rockafellar, R.T. [1] Characterization of the sub-differentials of convex functions, Pacific J. Math. 17, 497-510 (1966).