数理解析研究所講究録
第93巻 1970年 35-55

Approximation of nonlinear semi-groups

早大 教育 宮寺 功

§1. Introduction

X_0 を Banach 空間 X の部分集合とし, $Cont(X_0)$ を X_0 からそれ自身への(必ずしも linear でない) contraction operator の全体とする.

定義 1.1 $Cont(X_0)$ に属する operator の族 $\{T(t);\ t \geq 0\}$ は, つぎの (i), (ii) をみたすとき contraction semi-group on X_0 とよばれる.

(i) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$

(ii) $\lim_{t \to 0+} T(t)x = x$, $x \in X_0$.

定義 1.2 contraction semi-group $\{T(t);\ t \geq 0\}$ on X_0 の i.g. A_0 (infinitesimal generator) および w. i. g. A' (weak infinitesimal generator) をそれぞれ

$$A_0 x = \lim_{h \to 0+} h^{-1}(T(h) - I)x$$

$$A' x = w\text{-}\lim_{h \to 0+} h^{-1}(T(h) - I)x$$

により定義する．それらの定義域を $D(A_0)$，$D(A')$ とかく．

(nonlinear) contraction semi-group の理論は最近めざましい発展をしつゝあり，linear contraction semi-group について知られてきている結果の多くが nonlinear の場合へ拡張されている．とくに Kōmura [11] にはじまり Kōmura [12]，Kato [9, 10]，Crandall and Pazy [3, 4]，Dorroh [7] 等による，Hille-Yosida の定理の一般化はその著しい成果である．

この小文は contraction semi-groups の approximations および convergence を論じるのが目的である．

§2. Lemmas

定義 2.1　A は $D(A) \subset X$，$R(A) \subset X$ なる必ずしも一価でない operator とする．各 $x, y \in D(A)$，$x' \in Ax$，$y' \in Ay$ に対して

$$\mathrm{Re}\,(x' - y',\ f) \leqq 0$$

なるごとき $f \in F(x-y)$ ($F: X \to X^*$ は duality map) が存在するとき，A は dissipative であるといわれる．また，dissipative operator A は

$$R(I - \lambda_0 A) = X, \quad \text{some } \lambda_0 > 0$$

をみたすとき，m-dissipative とよばれる．

補題 2.1 ([21]) X_0 を X の閉部分集合とし，U を $D(U) = X_0$ なる dissipative, Lipschitz continuous operator とする．

(2.1) $R(I - \lambda U) \supset X_0, \quad \lambda > 0$

ならば，U は contraction semi-group $\{T(t;U);\ t \geqq 0\}$ on X_0 の i.g. でかつ

(2.2) $T(t;U)x - x = \int_0^t UT(s;U)x\,ds, \quad t \geqq 0,\ x \in X_0$

我々の目的に対して基本的な補題をのべる．

補題 2.2 X_0 を X の閉部分集合とし，$C \in Cont(X_0)$,

(2.3) $R(I - \lambda(C - I)) \supset X_0, \quad \lambda > 0$

とする．したがって，補題 2.1 から，$C - I$ および $A^h = h^{-1}(C - I)$, $h > 0$ はそれぞれ contraction semi-groups $\{T(t;C-I);\ t \geqq 0\}$, $\{T(t;A^h);\ t \geqq 0\}$ の i.g. である．このとき，つぎの不等式が成立する．

(2.4) $\|T(m;C-I)x - C^m x\| \leqq \sqrt{m}\ \|(C-I)x\|$

$, x \in X_0, \quad m = 1, 2, 3, \cdots,$

(2.5) $\|T(t;A^h)x - C^{[t/h]}x\| \leqq (\sqrt{th} + h)\|A^h x\|$

$, x \in X_0, \quad t \geqq 0, \quad h > 0.$

証明．(Miyadera and Oharu [17] 参照) $x \in X_0$ とし，

$g_x(t) = e^t T(t; C-I)x$ とおくと

$$g_x(t) = x + \int_0^t e^s C(e^{-s} g_x(s))\, ds, \quad t \geqq 0.$$

以下 [17] §3 におけると同様にして (2.4) をうる. (2.5) はこれから容易である. 実際, $T(t; A^h) = T(th^{-1}; C-I)$ のゆえ, (2.4) から

$$\| T([t/h]h; A^h)x - C^{[t/h]}x \| \leqq \sqrt{th}\, \| A^h x \|.$$

また $\| T(t; A^h)x) - T([t/h]h; A^h)x \| \leqq \int_{[t/h]h}^t \| A^h T(s, A^h)x \| ds$ $\leqq h \| A^h x \|$. 終.

系 2.3 X_0 を X の凸閉部分集合とし, $C \in Cont(X_0)$ とする. このとき不等式 (2.4), (2.5) が成立する.

証明. (2.3) が成立することを示せば十分である. $\lambda > 0$, $x \in X_0$ を任意に固定し

$$Ty = \frac{1}{1+\lambda} x + \frac{\lambda}{1+\lambda} Cy, \quad y \in X_0$$

とおくと, $T: X_0 \to X_0$, strictly contraction. よって $y = Ty$ i.e, $[I - \lambda(C-I)]y = x$ なるごとき $y \in X_0$ が存在する. 終.

注意. 不等式 (2.4) は, はじめに $C \in Cont(X)$, C が linear のとき, Chernoff [5] によりえられた; これの nonlinear への拡張は筆者 [13, 17] による. 系 2.3 は, はじめに X が Hilbert 空間のとき Brezis and Pazy [1] により示された; こ

れの Banach 空間への拡張，即ち補題 2.2 は Miyadera and Oharu [17] による．同じ結果が Brezis and Pazy によりえられている．

<u>系 2.3 の応用．</u>

$\{T(t);\ t \geqq 0\}$ が linear contraction semi-group on X のとき，つぎの $(A_1) \sim (A_4)$ はよく知られている： $A_h = h^{-1}(T(h)-I)$，$\lim_{h\to 0+} A_h x = Ax$ (i.e., A は i.g.)，$J_\lambda = (I-\lambda A)^{-1}$，$\lambda > 0$ とおくとき

$$(A_1) \qquad T(t)x = \lim_{h\to 0+} (\exp tA_h)x \quad \left(= \lim_{h\to 0+} T(t;A_h)x\right)$$

$$(A_2) \qquad T(t)x = \lim_{\lambda\to 0+} (\exp tA(I-\lambda A)^{-1})x$$

$$(A_3) \qquad T(t)x = \lim_{n\to\infty} (I - \frac{t}{n}A)^{-n} x$$

，$x \in X$，$t \geqq 0$；

$$(A_4) \qquad T(t)x = \lim_{n\to\infty} \{(1-t)I + tT(1/n)\}^n x, \quad x\in X,\ 0\leqq t\leqq 1.$$

これらは nonlinear の場合にも成立することを示そう．

X_0 を X の凸閉部分集合，$\{T(t);\ t\geqq 0\}$ を contraction semi-group on X_0 とし

$A_h = h^{-1}(T(h)-I)$，$E = \{x\in X_0;\ \|A_h x\| = O(1) \text{ as } h\to 0+\}$

とおく．(A_1)，(A_4) に対応する結果として

定理 2.4 $\quad x \in \overline{E}$ とする．

(a) 各 A_h は contraction semi-group $\{T(t;A_h);\ t\geqq 0\}$ on X_0

の i.g. で，任意の有限区間で一様に

(2.6) $\qquad T(t)x = \lim_{h\to 0+} T(t;A_h)x \quad , \quad t \geqq 0$;

(b) $\quad 0 \leqq t \leqq 1$ で一様に

(2.7) $\qquad T(t)x = \lim_{n\to\infty} \{(1-t)I + tT(1/n)\}^n x$.

証明. $x \in E$ に対して (2.6), (2.7) を示せば十分である.

(a) $T(h) \in \mathrm{Cont}\,(X_0)$ のゆえ，系 2.3 から

$$\| T(t;A_h)x - T(h)^{[t/h]}x \| \leqq (\sqrt{th} + h)\|A_h x\|, \quad t \geqq 0,\ h > 0.$$

これと $\| T(t)x - T(h)^{[t/h]}x \| \leqq \| T(t-[t/h]h)x - x \|$ とから

(2.6) をうる.

(b) $\xi \in [0,1]$, $h > 0$ に対して

$$C_h(\xi) = \xi T(h) + (1-\xi)I, \quad A^h(\xi) = h^{-1}(C_h(\xi) - I)$$

とおくと，$C_h(\xi) \in \mathrm{Cont}\,(X_0)$; よって系 2.3 から，$A^h(\xi)$

は contraction semi-group $\{T(t;A^h(\xi))\,;\, t \geqq 0\}$ の i.g., かつ

$$\| T(t;A^h(\xi))x - C_h(\xi)^{[t/h]}x \| \leqq (\sqrt{th} + h)\|A^h(\xi)x\|, \quad t \geqq 0.$$

$A^h(\xi) = \xi A_h$ のゆえ $T(t;A^h(\xi)) = T(t;\xi A_h) = T(t\xi;A_h)$.

よって $\| T(t\xi;A_h)x - C_h(\xi)^{[t/h]}x \| \leqq (\sqrt{th} + h)\|A_h x\|$. ここ

で $t = 1$ とおくと

$$\| T(\xi;A_h)x - \{(1-\xi)I + \xi T(h)\}^{[1/h]}x \| \leqq (\sqrt{h} + h)\|A_h x\| .$$

これと (2.6) とから (2.7) をうる. 終.

つぎに (A_2), (A_3) について調べる.

A を m-dissipative operator とすると，$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$

$\in Cont(X)$, $\lambda>0$. 系2.3から $A^\lambda=\lambda^{-1}(J_\lambda-I)$（$A$が一価のときは $A(I-\lambda A)^{-1}$ と一致する）は contraction semi-group $\{T(t;A^\lambda);t\geqq 0\}$ on X の i.g.，かつ

$$\|T(t;A^\lambda)x-J_\lambda^{[t/\lambda]}x\|\leqq(\sqrt{t\lambda}+\lambda)\|A^\lambda x\|,\quad x\in X,\ t\geqq 0.$$

$x\in D(A)$ のとき $\|A^\lambda x\|\leqq |||Ax|||$ $(=\inf\{\|x'\|;x'\in Ax\})$ ゆえ

$$(2.8)\quad \|T(t;A^\lambda)x-(I-\lambda A)^{-[t/\lambda]}x\|\leqq(\sqrt{t\lambda}+\lambda)|||Ax|||$$

$$,\ x\in D(A),\ t\geqq 0.$$

とくに X^* が uniformly convex のときには，各 $x\in\overline{D(A)}$ に対し

$$(2.9)\quad T(t)x=\lim_{\lambda\to 0+}T(t;A^\lambda)x,\quad t\geqq 0$$

が任意の有限区間で一様に存在して，$\{T(t);t\geqq 0\}$ はつぎの (a), (b) を満足する unique contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ である（[10], [7]）：各 $x\in D(A)$ に対して

(a) $T(t)x$ は強絶対連続

(b) $T(t)x\in D(A)$, $t\geqq 0$, $(d/dt)T(t)x\in A^0T(t)x$ a.a. t,

こゝに A^0 は A の canonical restriction. この $\{T(t);t\geqq 0\}$ を <u>A から生成された contraction semi-group</u> とよぶことにする. (2.8), (2.9) からつぎの定理をうる：

定理2.5 X^* を uniformly convex, A を m-dissipative, $\{T(t);t\geqq 0\}$ を A から生成された semi-group とする. 各 $x\in\overline{D(A)}$ に対して，任意の有限区間で一様に

$$(2.10)\quad T(t)x=\lim_{\lambda\to 0+}T(t;A^\lambda x)$$

$$(2.11)\qquad T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}x \ .$$

注意. A が dissipative, $R(I-\lambda A) \supset \overline{co(D(A))}$, $\lambda>0$ ならば, contraction semi-group $\{T(t);\, t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が存在して (2.11), (2.12) が成立する.

§3. Convergence of semi-groups

本節では linear semi-group に関する Trotter-Kato の定理 ([23], [27]) の nonlinear への拡張を試みる

定理 3.1 ([14]) X は Banach 空間, $X^{(k)}$ ($k=1,2,3,\cdots$) をその部分集合, 各 k に対して $\{T^{(k)}(t);\, t \geqq 0\}$ は contraction semi-group on $X^{(k)}$, その i.g. を $A^{(k)}$ とし, つぎの (a)〜(c) を仮定する:

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}x = Ax, \quad x \in D\ (\subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D(A^{(k)}))$

(b) A (on D) は或る contraction semi-group $\{T(t);\, t \geqq 0\}$ on $X^{(0)}$ ($X^{(0)}$ は X の部分集合) の w.i.g. の restriction

(c) D の部分集合 D_0 が存在して, $x \in D_0$ のとき

(c_1) $\quad T^{(k)}(t)x \in D(A^{(k)})$ a.a. $t \geqq 0$

(c_2) $\quad T(t)x \in D$ a.a. $t \geqq 0$.

このとき, 各 $x \in D_0$ に対して

$$(3.1)\qquad T(t)x = \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geqq 0,$$

上の (3.1) は任意の有限区間で一様収束している.

注意. $\{T^{(k)}(t);\ t\geq 0\}$, $\{T(t);\ t\geq 0\}$ はそれぞれ $\overline{X^{(k)}}$, $\overline{X^{(0)}}$ の上の contraction semi-group に拡張できる. このとき (3.1) は $\overline{D_0}$ の上で成立する. 系 3.2, 3.3 についても同様.

系 3.2 X^* を uniformly convex, $\{T^{(k)}(t);\ t\geq 0\}$ を contraction semi-group on $X^{(k)}$, その i.g. を $A^{(k)}$ とする.

$\lim_{k\to\infty} A^{(k)}x = Ax$, $x\in D(A)$, $R(I-\lambda_0 A)=X$ some $\lambda_0>0$,

ならば, A は m-dissipative (したがって A は contraction semi-group $\{T(t);\ t\geq 0\}$ on $D(A)$ を生成する) かつ各 $x\in D(A)$ に対して収束

$$T(t)x = \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(t)x,\quad t\geq 0$$

が任意の有限区間で一様に成立する.

証明. 各 $A^{(k)}$ が dissipative のゆえ, その極限 A も dissipative, よって A は一価で m-dissipative. このとき A は contraction semi-group $\{T(t);\ t\geq 0\}$ on $D(A)$ の w.i.g. (また, $\{T(t);\ t\geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の w.i.g. でもある) である ([9]). $x\in D(A)$ のとき $T(t)x$, $T^{(k)}(t)x$ は強絶対連続となり, X の reflexivity から, a.a. t で(強)微分可能; D, D_0 としてともに $D(A)$ をとることにより定理 3.1 (c) を満足する. 終.

系 3.3 X, X^* をともに uniformly convex, $\{T^{(k)}(t);\ t\geq 0\}$ を contraction semi-group on $X^{(k)}$ とし, その i.g. を $A^{(k)}$ とする. A が m-dissipative

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)}x = A^{\circ}x, \quad x \in D(A)$$

ならば, 各 $x \in D(A)$ に対して

(3.2) $\quad T(t)x = \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geqq 0,$

収束 (3.2) は任意の有限区間で一様である, こゝに $\{T(t);t\geqq 0\}$ は A から生成される contraction semi-group on $\overline{D(A)}$.

証明. 生成定理から A° は contraction semi-group $\{T(t);t\geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の i.g. であることが知られている. 系 3.2 の証明と同様にして $D_0 = D = D(A)$ ととることにより定理 3.1 (c) が成立するからである. 終

注意. 1°) 系 3.3 において, A が m-dissipative という条件を

(3.3) $\quad A$ は closed dissipative, $R(I-\lambda A) \supset \overline{co}\,(D(A)), \lambda>0$

と弱めることができる. 実際, Brezis and Pazy [1] と同様にして, (3.3) から, 各 $x\in D(A)$ に対して $A^{\circ}x$ が一価として存在し, A° は contraction semi-group $\{T(t)\}$ on $\overline{D(A)}$ の i.g. となるから.

2°). $A^{(k)}$, A が条件 (3.3) を満足すれば, $\lim_{k\to\infty}(A^{(k)})^{\circ}x = A^{\circ}x$, $x\in D(A)$ から収束 (3.2) がともなう.

定理 3.4 ([1], [16]) X^* は uniformly convex とする. $A^{(k)}$ ($k=1,2,3,\cdots$), A を m-dissipative ; $\{T^{(k)}(t);t\geqq 0\}$ on $\overline{D(A^{(k)})}$

, $\{T(t);\ t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ を，それぞれ $A^{(k)}$, A から生成された contraction semi-group とする．

(i) $\overline{D(A^{(k)})} \supset \overline{D(A)}$

(ii) $\lim_{k\to\infty} J_\lambda^{(k)} x = J_\lambda x$, $x \in X$, $\lambda > 0$

, ここに $J_\lambda^{(k)} = (I - \lambda A^{(k)})^{-1}$, $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$,

ならば，各 $x \in \overline{D(A)}$ に対して 任意の有限区間で一様に

$$T(t)x = \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geqq 0.$$

注意. 1°). m-dissipativity を

"$A^{(k)}$, A は dissipative, $R(I-\lambda A^{(k)}) \supset \overline{co(D(A^{(k)}))}$, $R(I-\lambda A) \supset \overline{co(D(A))}$"

により，また (ii) を

(ii′) $\lim_{k\to\infty} J_\lambda^{(k)} x = J_\lambda x$, $x \in \overline{co(D(A))}$, $\lambda > 0$

によりおきかえることができる．

2°) $\lim_{k\to\infty} J_{\lambda_0}^{(k)} x = J_{\lambda_0} x$, $x \in X$, for some $\lambda_0 > 0$ ならば (ii) が結論される．

これから Trotter-Kato の定理の nonlinear への一般化がえられる．

定理 3.5 ([1], [16]) X^* を uniformly convex, $A^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ を m-dissipative とし，$J_\lambda^{(k)} = (I - \lambda A^{(k)})^{-1}$, $\lambda > 0$ とおく．

(i) 或る $\lambda_0 > 0$ に対して，$\lim_{k\to\infty} J_{\lambda_0}^{(k)} x$ $(= J_{\lambda_0} x$ とかく$)$

$x \in X$ が存在する

(ii) $\overline{D(A^{(k)})} \supset \overline{R(J_{\lambda_0})}$, $k=1,2,3,\cdots$

を仮定するとき，つぎの(a)，(b)をうる：

(a) すべての $\lambda > 0$ に対し，$\lim_{k\to\infty} J_\lambda^{(k)} x$ ($= J_\lambda x$ とかく)，$x \in X$ が存在し，かつ $J_\lambda = (I-\lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$ なるごとき m-dissipative operator A が存在する．

(b) $\{T^{(k)}(t);\, t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A^{(k)})}$, $\{T(t);\, t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ をそれぞれ $A^{(k)}$, A から生成される contraction semi-group とするとき，各 $x \in \overline{D(A)}$ に対して

$$T(t)x = \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geqq 0,$$

この収束は任意の有限区間で一様である．

証明．仮定(i)から(a)が結論される．実際，$\lim_{k\to\infty} J_\lambda^{(k)} x = J_\lambda x$, $x \in X$, $\lambda > 0$ が存在して

$$J_\lambda x = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_\lambda x \right), \quad \lambda, \mu > 0, \ x \in X.$$

これから $R(J_\lambda) = R(J_{\lambda_0})$, $\lambda^{-1}(x - J_\lambda^{-1} x) = \lambda_0^{-1}(x - J_{\lambda_0}^{-1} x)$, $\lambda > 0$, $x \in R(J_{\lambda_0})$．ここで

$$Ax = \lambda_0^{-1}(x - J_{\lambda_0}^{-1} x), \quad x \in R(J_{\lambda_0})$$

により A を定義すれば，A は m-dissipative，$D(A) = R(J_{\lambda_0})$，$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$．その結果，定理3.4から(b)をうる．

終．

系 3.6 ([15]) X^* を uniformly convex，$A^{(k)}$ ($k=1,2,\cdots$) を

single-valued m-dissipative, $\{T^{(k)}(t); t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A^{(k)})}$ を $A^{(k)}$ から生成される contraction semi-group とする。

(i) $\quad \lim_{k\to\infty} A^{(k)}x = Ax, \quad x \in D(A)$

(ii) $\quad \overline{R(I-\lambda_0 A)} = X$, some $\lambda_0 > 0$

ならば、$\bar{A}$ は m-dissipative (したがって、$\bar{A}$ は contraction semi-group $\{T(t); t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ を生成する)、かつ各 $x \in \overline{D(A)}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} T^{(k)}(t)x = T(t)x, \quad t \geqq 0,$$

収束は任意有限区間で一様である。

証明. 容易にわかる如く、$\bar{A}$ は m-dissipative, $\lim_{k\to\infty}(I-\lambda_0 A^{(k)})^{-1}x = (I-\lambda_0\bar{A})^{-1}x$, $x \in X$. 定理3.5を用いればよい。終.

§4. Approximation of semi-groups

本節の結果は§3の convergence theorems と補題2.3にもとずくものである。

定理4.1 ([17]) X を Banach 空間, $X^{(k)}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ を X の凸閉部分集合, $C_k \in \mathrm{Cont}(X^{(k)})$, $\{h_k\}$ を $h_k \to 0$ なる正数列とし、つぎの(i)〜(iii)を仮定する。

(i) $\quad \lim_{k\to\infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax, \quad x \in D \left(\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} X^{(k)}\right)$

(ii) A (on D) は或る contraction semi-group $\{T(t); t \geqq 0\}$ on a closed set $X^{(0)}$ の w.i.g. の restriction

(iii) D の部分集合 D_0 が存在して，$x \in D_0$ のとき $T(t)x \in D$ a.a. $t \geqq 0$．このとき各 $x \in \overline{D_0}$ に対して

(4.1) $\quad T(t)x = \lim_{k\to\infty} C_k^{[t/h_k]}x \quad , t \geqq 0 \quad ,$

収束 (4.1) は任意の有限区間で一様である．

証明．$A^{(k)} = h_k^{-1}(C_k - I)$ とおくと，系 2.3 から，$A^{(k)}$ は contraction semi-group $\{T^{(k)}(t)\,;\, t \geqq 0\}$ on $X^{(k)}$ の i.g.，かつ

(4.2) $\quad \| T^{(k)}(t)x - C_k^{[t/h_k]}x \| \leqq (\sqrt{t h_k} + h_k) \| A^{(k)}x \|$

，$x \in X^{(k)}$，$t \geqq 0$． また定理 3.1 から，$x \in D_0$ のとき $T(t)x = \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(t)x$ が任意の有限区間で一様に成立する．これと (4.2) とから，収束 (4.1) は $x \in D_0$ に対して成立する． 終．

系 4.2 $X^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ を X の凸閉部分集合，$C_k \in \mathrm{Cont}(X^{(k)})$，$\{h_k\}$ を $h_k \to 0$ なる正数列とする．

(a) $\left\{ \begin{array}{l} X^* \text{ が uniformly convex}, \ \lim_{k\to\infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax, \\ x \in D(A), \ R(I - \lambda_0 A) = X \ \text{ some } \lambda_0 > 0 \end{array} \right.$

または

(b) $\left\{ \begin{array}{l} X, X^* \text{ ともに uniformly convex}, \ A \text{ を m-dissipative}, \\ \lim_{k\to\infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = A^\circ x \end{array} \right.$

を仮定する．$\{T(t)\,;\, t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ を A から生成される contraction semi-group とするとき，$x \in \overline{D(A)}$ に対して収束 (4.1) が成立する．

証明. (a) のときは, A は $\{T(t); t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の w.i.g. ; (b) のときは, A° は $\{T(t); t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の i.g. の restriction である. かつ $D_0 = D = D(A)$ ととることにより定理 4.1 (iii) が成立する. 終.

注意. (b) において, A の m-dissipativity は (3.3) でおきかえてよい.

A を Banach 空間 X の部分集合 $D(A)$ で定義され X の値をとる operator とし, Cauchy 問題

(4.3) $\quad (d/dt)u(t) = Au(t)$ a.a. $t \geqq 0$, $u(0) = x$

を考える. $u(t)$ が $[0, \infty)$ の任意有限区間で強絶対連続, かつ (4.3) を満足するとき, それを Cauchy 問題 (4.3) の解とよぶことにする. A が dissipative ならば解は高々 1 つである.

(4.3) に対して approximating scheme

(4.4) $\quad \begin{cases} u_k((m+1)h_k) = C_k u_k(mh_k) \\ u_k(0) = x \end{cases}$

, ここに $\{h_k\}$ は $h_k \to 0$ なる正数列, C_k は X の部分集合 $X^{(k)}$ で定義される operator, を導入する.

さて, 系 4.2 の条件 (a), (b) の中の A の m-dissipativity は " Cauchy 問題 (4.3) ((b) のときは $(d/dt)u(t) = A^\circ u(t)$) が

初期値 $x \in D(A)$ に対して unique な解 $T(t)x\ (= u(t;x))$ をもつ”ということを導くことに注意する．したがって系4.2は，scheme (4.4) がつぎの条件 (C), (S) を満足するとき，近似解が (4.3) の解に収束する，i.e, $x \in D(A)$ のとき

(4.5) $\quad \lim_{k\to\infty} u_k([t/h_k]h_k) \left(= \lim_{k\to\infty} C_k^{[t/h_k]} x\right) = T(t)x,\ t \geq 0$

となることを意味している：

(C) $\quad \lim_{k\to\infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax \quad ,\ x \in D(A)$

((b) のときには A は A^0 でおきかえる)

(S) $\quad C_k \in \mathrm{Cont}(X^{(k)})$，こゝに $X^{(k)}$ は凸閉部分集合．

一般の Banach 空間においても Cauchy 問題 (4.3) が解をもてば条件 (C), (S) のもとで approximation (4.5) がえられる．すなわちつぎの定理（Lax の定理 [22] の拡張）をうる．

定理 4.3（[17]）X を Banach 空間，A を $D(A), R(A) \subset X$ なる operator とする．

(i) 各 $x \in D(A)$ に対して Cauchy 問題 (4.3) が解 $u(t;x)$ をもつ

(ii) (C) および (S)

を仮定すれば，$x \in D(A)$ に対して

(4.6) $\quad u(t;x) = \lim_{k\to\infty} C_k^{[t/h_k]} x \quad ,\ t \geq 0$,

また (4.6) は任意の有限区間で一様収束である．

証明. (C) および (S) から, A は dissipative. これと (i) とから, $T(t)x = u(t;x)$, $x \in D(A)$, $t \geqq 0$ なるごとき unique contraction semi-group $\{T(t);\, t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が存在する ([17])。これから $x \in D(A)$ のとき

$$(d/dt)T(t)x = AT(t)x \quad a.a.\ t \geqq 0.$$

$D = \bigcup_{x \in D(A)} \{T(t)x\,;\,(d/dt)T(t)x = AT(t)x\}$ とおくと $D \subset D(A)$; よって $\lim_{k\to\infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax$, $x \in D$. 明らかに, A on D は $\{T(t);\, t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の i.g. の restriction. また $D_0 = D$ とおくことにより定理 4.1 (iii) をうる. かくして各 $x \in \overline{D}$ に対し,

$$(4.7) \qquad T(t)x = \lim_{k\to\infty} C_k^{[t/h_k]}x, \quad t \geqq 0$$

が有限区間で一様に成立する. $\overline{D} = \overline{D(A)}$ から (4.6) をうる.

終.

最後に, 系 2.3 と系 3.6 から Trotter の定理 [23; 定理 5.3] の1つの拡張がえられる ([17]).

定理 4.4 X^* を uniformly convex, $C_k \in \mathrm{Cont}(X)$, $\{h_k\}$ を $h_k \to 0$ なる正数列とする.

(i) $\lim_{k\to\infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax$, $x \in D(A)$

(ii) $\overline{R(I - \lambda_0 A)} = X$ some $\lambda_0 > 0$

ならば

(a) $\bar{A}$ は m-dissipative，したがって $\bar{A}$ は contraction semi-group $\{T(t)\,;\, t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ を生成する

(b) 各 $x \in \overline{D(A)}$ に対し，任意の有限区間で一様に

$$T(t)x = \lim_{k} C_k^{[t/h_k]} x \,, \quad t \geqq 0 .$$

注意．(a) から $T(t)x$ $(x \in D(\bar{A}))$ は Cauchy 問題

$$(4.8) \qquad (d/dt)\, u(t) \in (\bar{A})^{\circ}\, u(t),\ \text{a.a. } t \geqq 0\,, \quad u(0) = x$$

の unique な解である．したがって，この定理は "(4.3) に対する approximating scheme (4.4) が (C)，(S)（ただし $X^{(k)} = X$）をみたすとき，附帯条件 $\overline{R(I-\lambda_0 A)} = X$ のもとで，各 $x \in D(\bar{A})$ に対して Cauchy 問題 (4.8) は unique な解をもち，かつこの解に近似解が収束する" ことを意味している．

References

1. H. Brezis and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions on convex sets, to appear.

2. F. E. Browder, Nonlinear equation of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 867 – 874.

3. M. G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, Jour. Func. Anal. 3 (1969),

376 - 418.

4. M. G. Crandall and A. Pazy, On accretive sets in Banach spaces, to appear in Jour. Func. Anal.

5. P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semi-groups, Jour. Func. Anal., 2 (1968), 238 - 242.

6. J. R. Dorroh, Some classes of semi-groups of nonlinear transformations and their generators, Jour. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 437 - 455.

7. J. R. Dorroh, A nonlinear Hille - Yosida - Phillips theorem, Jour. Func. Anal., 3 (1969), 345 - 353.

8. E. Hille and R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31, 1957.

9. T. Kato, Nonlinear semi-groups and evolution equations, Jour. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508 - 520.

10. T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, to appear in Proc. Symposium Nonlinear Func. Anal. A. M. S.

11. Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, Jour. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493 - 507.

12. Y. Kōmura, Differentiability of nonlinear semi-groups, Jour. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375 - 402.

13. I. Miyadera, Note on nonlinear contraction semi-groups, Proc. Amer. Math. Soc., 21 (1969), 219 - 225.

14. I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semi-groups, Tôhoku Math. Journ., 21 (1969), 221 - 236.

15. I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semi-groups II, Jour. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 403 - 412.

16. I. Miyadera, Nomlinear semi-groups の収束について, 数学論文集, 早大・教育・数学教室, 5 (1969).

17. I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semi-groups of nonlinear operators, to appear in Tôhoku Math. Jour.

18. J. W. Neuberger, An exponential formula for one-parameter semi-groups of nonlinear transformations, Jour. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 154-157.

19. S. Oharu, Note on the representation of semi-groups of nonlinear operators, Proc. Japan Acad., 42 (1966), 1149 - 1154.

20. S. Oharu, Nonlinear semi-groups in Banach spaces, to appear.

21. S. Oharu, On the generation of semi-groups of nonlinear contractions, to appear.

22. R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference method for initial-value problems, Interscience, 1967.

23. H. F. Trotter, Approximation of semi-group of operators, Pacific Jour. Math., 8 (1958), 887 - 919.

24. J. Watanabe, Semi-groups of nonlinear operators on closed convex sets, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 219 - 223.

25. G.F. Webb, Representation of semi-groups of nonlinear transformations in Banach spaces, to appear in Jour. Math and Mech.

26. G.F. Webb, Nonlinear evolution equations and product integration in Banach spaces, to appear.

27. K. Yosida, Functional analysis, Springer, 1965.