数理解析研究所講究録
第95巻 1970年 1-11

Combinatorial Problem in the Theory of Factorial Design

岡山理大　　藤井　淑夫

§1．　序

要因実験は実験条件に関して考察の対象となる各因子の水準を計画的に変化させて生ずる処理を施したときに得られる観測値（収量または測定値）にもとずいて実験の目的とする各因子の主効果，因子間の交互作用等を統計的にしらべる方法である。

因子の数 n が多くなるとき理論的には各因子の主効果のほかに 2 因子交互作用から n 因子交互作用までのすべての情報が得られるが，高次の交互作用は無視可能であることが多い。　この場合，各因子の水準の全ての組み合わせを実験する必要はない。　これが要因実験における一部実施法である。

また制約された実験条件のもとでは実験単位の数に制限があり，実験単位間における変動は目的とする結論に偏りを与える。この困難性を除く方法として交絡法またはブロック分

け（Confounding or blocking）といわれるものがある。

実験単位の全体を実験条件がよく似ているブロックといわれるものに分割する。われわれの目的とする重要な効果；主効果・二因子交互作用等がブロック間の変動に無関係に評価でき，他方重要でない効果，すなわち高次交互作用等をブロック間の変動と交絡させるように処理をブロックにわりつける必要がある。

以上の条件をみたすように処理をブロックに配置する方法が要因計画の理論である。Fisher [3] [4] はこれらの配置を群論的な考察にもとずいて行なっている。

ここでは対称型要因計画の交絡法の場合について述べる。n を因子数，s（素数または素数巾）を水準数とするとき s^n 個の処理は $EG(n, s)$ の点 $\mathbf{a}$ を標識として処理 $\phi(\mathbf{a})$ で表わされる。処理の間に幾何学的アソシェーション・スキームを導入することにより，一部実施法，ブロック分け等についての代数的な構造が明らかにされる [5]。

s^n 個の処理を各々 s^{n-k} 個（$k \leq n$）の処理からなる s^k 個のブロックに配置するならば，この計画をクラス (s^n, s^k) の計画であるといわれる [1], [7]。この計画においては自由度 (s^k-1) がブロックの変動に交絡される。そこで問題は無視可能な処理効果の自由度を選択し，それをブロックの変動に

交絡させることである。これに関連した問題として，与えられた t 因子交互作用まで交絡しないで評価できるという条件のもとで，計画可能な因子の最大個数 n を決定することである。 $r+k=n$ で，r を固定したとき，すなわちブロックの大きさ s^{n-k} を一定に保ったとき因子の最大個数は $n=m_t(r,s)$ で与えられる。ここに $m_t(r,s)$ は $PG(r-1,s)$ 上のどの t 個の点も一次独立な点の最大個数である [1]。またこのとき，大きさ s^r，制約数 l $(\leq m_t(r,s))$ 水準数 s，強さ t の直交配列が存在する [2]。 $m_t(r,s)$ を求めるという問題は限られた r,s,t の値に対してのみ部分的に解決されているだけである [1],[6]。

クラス (s^n, s^k) の計画の型を決定する k 個の *generating factors* および *generating graph* の概念を導入し，クラス (s^n, s^k) の計画を同値な型に分類する方法が Robillard [7] によって求められている。これに関連して論文 [7] の表の中で不足している例として Table I を掲げる。

§ 2. クラス (s^n, s^k) の交絡計画

s^n 個の処理 $\phi(\underline{x})$; $\underline{x} \in EG(n,s)$ をどのようにブロックに配置するかの仕方を指定する $GF(s)$ 上の階数が k である $k \times n$

行列 $B=[b_{ij}]$ を考える。 $EG(n,s)$ 上の $(n-k)$-*flats*

(2.1) $$\mathcal{B}_{\underline{u}}=\{\underline{x}\mid B\underline{x}=\underline{u}\}\ ;\ \underline{u}\in EG(k,s)$$

を考える。 $\mathcal{B}_{\underline{u}}\ni\underline{x}$ に対応する処理 $\phi(\underline{x})$ によってブロック $\phi(\mathcal{B}_{\underline{u}})=\{\phi(\underline{x})\mid\underline{x}\in\mathcal{B}_{\underline{u}}\}$ を構成する。行列 B' の列ベクトルによって生成される $PG(n-1,s)$ の $(k-1)$-*flat* を $\mathcal{P}(B')$ とすればつぎの *Lemma* によって $(k-1)$-*flat* $\mathcal{P}(B')$ から (s^n,s^k) の計画の交絡の構造が決定される。

Lemma [5]

(i) $\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B')$ なる $\underline{\alpha}$ に対応する効果（*generalized interaction*）はブロックの変動に無関係に評価出来る（直交する）。

(ii) $\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B')$ なる $\underline{\alpha}$ に対応する交果はブロックに完全に交絡する。

以上の意味より行列 B はこの計画の生成行列（ *generating matrix* ）といわれる [7]。 いま α_i^z を

(2.2) $$\alpha_i^z=\begin{cases}1\ ;\ もし\ \alpha_i\neq 0\ のとき\\ 0\ ;\ \alpha_i=0\ のとき\end{cases}$$

によって定義する。 $\underline{\alpha}'=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ とするとき， $\underline{\alpha}^{z\prime}=(\alpha_1^z,\alpha_2^z,\cdots,\alpha_n^z)$ を対応する $\underline{\alpha}$ の z- ベクトルという。この記号を用いて $\underline{\alpha}$ に対応する *generalized interaction* は $\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B')$ のとき交互作用 $F_1^{\alpha_1^z}F_2^{\alpha_2^z}\cdots F_n^{\alpha_n^z}$（ *Yates* の記号）に属する一部分の自由度 $s-1$ が交絡する。そこでわれわれはつぎの記号を定義

する。$\underline{F}' = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$, $\underline{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とするとき

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \underline{F}^{\underline{\alpha}^{z\prime}} = F_1^{\alpha_1^z} F_2^{\alpha_2^z} \cdots F_n^{\alpha_n^z} \\ \mathscr{P}^{\underline{F}}(B') = \{ \underline{F}^{\underline{\alpha}^z} \mid \underline{\alpha} \in \mathscr{P}(B') \} \end{cases}$$

とする。このとき $\mathscr{P}^{\underline{F}}(B')$ に属する自由度のうちの一部分がブロックの変動に交絡される。

生成行列 B_1 および B_2 によって定義されるクラス (s^n, s^k) の各々の計画 $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ を考える。そのとき因子 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ の適当な変換によって $\mathscr{P}^{\underline{F}}(B_1')$ から $\mathscr{P}^{\underline{F}}(B_2')$ が得られるとき計画 $\mathscr{D}_1$ と $\mathscr{D}_2$ は同等であるという。すなわち，適当な置換行列 E_n に対して

$$(2.4) \qquad \mathscr{P}^{\underline{F}}(B_1') = \mathscr{P}^{E_n \underline{F}}(B_2')$$

が成立するときである。

計画 $\mathscr{D}_1$ と $\mathscr{D}_2$ が同等であるための十分条件としてつぎの Lemma が成立する。

Lemma [7]

B_1, B_2 をそれぞれの計画 $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ に対する生成行列とする。$\mathscr{D}_1$ と $\mathscr{D}_2$ が同等であるための十分条件は

$$(2.5) \qquad B_1' = E_n D_n B_2' C_k$$

である。ここに C_k は $k \times k$ の non-singular matrix，D_n は $n \times n$ の non-singular な対角行列，E_n は $n \times n$ の置換行列とする。

§3. クラス (s^n, s^k) の計画のモジュラー表現

符号理論において Slepian [8] によって最初に導入されたモジュラー表現の概念を導入する。

生成行列 $B(k \times n)$ の零でない列ベクトル $\underline{b}_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ を $PG(k-1,s)$ における点と考える。$\underline{P}_1, \underline{P}_2, \cdots, \underline{P}_N$ $\left(N=\frac{s^k-1}{s-1}\right)$ を $PG(k-1,s)$ の異なるすべての点とする。$k \times 1$ の零ベクトルを $\underline{P}_0$ で表わす。そのとき生成行列 B は $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \cdots, \underline{P}_N$ から重複を許してとられた n 個の点の集合 S_B であるとみなされる。

Lemma [7]

二つの行列 B_1, B_2 $(k \times n)$ に対して $S_{B_1} = S_{B_2}$ であるとき，かつそのときに限り

(3.1) $$B_1 = B_2 D_n E_n$$

である。D_n は non-singular な対角行列で，E_n は置換行列である。

集合 S_B にあらわれる点 $\underline{P}_i$ の回数を G_i^B $i=0,1,\cdots,N$ とする。生成行列が B であるクラス (s^n, s^k) の計画のモジュラー・ベクトル $\underline{G}_B^{*\prime} = (G_0^B, G_1^B, \cdots, G_N^B) = (G_0^B, \underline{G}_B^{\prime})$ を定義する。このとき $\sum_{i=0}^{N} G_i^B = n$ である。同一のモジュラー・ベクトル $\underline{G}^*$

をもつすべての生成行列は同等な計画を生成する。

各々の点 $P_i \in PG(k-1, s)$, $i = 1, 2, \cdots, N$ に対して $(k-2)$-flat $\mathcal{F}_i = \{\underline{x} \mid \underline{x}'\underline{P}_i = 0\}$ および交絡されるベクトル $\underline{\alpha}_i = B'\underline{P}_i \in \mathcal{R}(B')$ が対応する。$\underline{j}_k' \underline{\alpha}_i^z = D_i$ (ここに $\underline{j}_k' = (1, 1, \cdots, 1)$ で，演算は有理数体上で考える) とすれば点 $\underline{P}_i \in PG(k-1, s)$ に対応する D_i 因子交互作用 $\underline{F}^{\alpha_i^z}$ の一部分の自由度がブロックに交絡する。$\underline{P}_i$ に対応する D_i を成分とするベクトル $\underline{D}' = (D_1, D_2, \cdots, D_N)$ を考える。$N \times N$ の結合行列 $C = \| C_{ij} \|$ をつぎのように定義する。

$$(3.2) \qquad C_{ij} = \begin{cases} 0 \ ; & \underline{P}_j \in \mathcal{F}_i \text{ のとき} \\ 1 \ ; & \underline{P}_j \notin \mathcal{F}_i \text{ のとき} \end{cases}$$

Lemma [7]

$\underline{\tilde{G}}_B$ と $\underline{D}$ の間に $C\underline{\tilde{G}}_B = \underline{D}$ の関係がある。ここに $\sum_{i=1}^{N} G_i^B = n - G_0^B$, $G_i^B \geq 0$ である。演算は有理数体で考える。

与えられたベクトル $\underline{\hat{G}}$ に対して対応するクラス (s^n, s^k) の計画が存在するとき $\underline{\hat{G}}$ は許容的であるといわれる。

Lemma [7]

$\underline{\hat{G}}' = (G_1, \cdots, G_N)$ が許容的であるための必要十分条件は

(i) $k \leq \sum_{i=1}^{N} G_i \leq n$

(ii) $G_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$

(iii) $\underline{C}_i' \underline{\hat{G}} > 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$, ここに $C' = (C_1, C_2, \cdots, C_N)$ で

である。以上のことを $\underline{D}'=(D_1, D_2, \cdots, D_N)$ について表わせば

(i′) $k\, s^{k-1} \leqq \sum_{i=1}^{N} D_i \leqq n\, s^{k-1}$

(ii′) $\frac{1}{s^{k-2}}\left[\, \underline{C}_i' - \frac{s-1}{s} \underline{j}_N' \,\right] \underline{D} \geqq 0$, $i=1,2,\cdots,N$

(iii′) $D_i > 0$, $i=1,2,\cdots,N$

である。

モジュラー・ベクトルの概念を用いて，二つの計画が同等であるための必要条件としてつぎの *Lemma* が成立する。

Lemma [7]

二つの計画 $\mathscr{D}_1$ と $\mathscr{D}_2$ が同等であるための必要条件は，その各々の計画に対応するモジュラー・ベクトル $\underline{G}_1^{*\prime}=(G_{10}, \underline{\tilde{G}}_1')$, $\underline{G}_2^{*\prime}=(G_{20}, \underline{\tilde{G}}_2')$ について

(i) $G_{10}=G_{20}$,

(ii) ある置換行列 E_N に対して $\underline{\tilde{G}}_1 = E_N \underline{\tilde{G}}_2$ が成立する。

ことである。

§4. クラス (s^n, s^k) の計画の分類

2章でクラス (s^n, s^k) の計画がその生成行列 B に関係することを示した。$\mathscr{P}(B') \ni \underline{\alpha}$ に対して *generalized interaction* $\underline{F}^{\alpha}$ はブロックの変動に完全に交絡される交互作用 $\underline{F}^{\alpha^z}$ に属する自由度 $s-1$ の成分である。$k\times n$ 行列 B の零でない列ベク

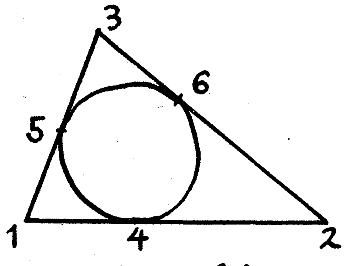
トルは PG(k-1, s) の点を与える。生成行列 B をもつ計画 $\mathcal{D}$ に対して，それは PG(k-1, s) の多くとも n 個の点の集合に附随している。それを (s^n, s^k) の計画の生成グラフ (*generating graph*) という。生成グラフの概念にもとづいてクラス(s^n, s^k) の計画を互に同等な計画に分類する方法が [7] で述べられている。

k = 1, 2, 3 に対して (s^n, s^k) の計画の生成グラフを表わすことが容易で，そのことから計画の交絡の構造を調べることが出来る。これらは次の例によって明らかにされる。

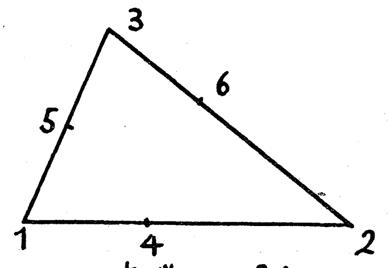
生成行列が

$$(4.1)\qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ B = & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

をもつクラス (s^6, s^3) の計画を考える。これは s が偶数および奇数に応じてつぎの生成グラフを生ずる。



s が偶数の場合



s が奇数の場合

いま PG(2, s) におけるすべての $\frac{s^3-1}{s-1}$ 個の直線の全部を

考える。例えば因子4と5に附随した点を含む直線は $\alpha_4=0$, $\alpha_5=0$ である $\underline{\alpha}'=\underline{\lambda}'B$ が対応する。したがって対応する交絡された *generalized interaction* は s が偶数および奇数の各々の場合に応じてそれぞれ交互作用 $F_1F_2F_3$, $F_1F_2F_3F_6$ に属する。他の場合についても同様に交絡の構造が調べられる。交絡される交互作用をつぎの表であらわす。*Table* における交互作用の右側の数はその交互作用に属する *generalized interactions* の個数を表わす。

TABLE I（s が偶数の場合）

main effect	1st order	2nd order	3rd order	4th order	5th order
		$F_1F_4F_5$ 1	$F_2F_3F_4F_5$ 1	$F_2F_3F_4F_5F_6$ $(s-2)$	$F_1F_2F_3F_4F_5F_6$ $(s-2)(s-3)$
		$F_2F_4F_6$ 1	$F_1F_3F_4F_6$ 1	$F_1F_3F_4F_5F_6$ $(s-2)$	
		$F_3F_5F_6$ 1	$F_1F_2F_5F_6$ 1	$F_1F_2F_4F_5F_6$ $(s-2)$	
		$F_1F_2F_3$ 1		$F_1F_2F_3F_5F_6$ $(s-2)$	
				$F_1F_2F_3F_4F_6$ $(s-2)$	
				$F_1F_2F_3F_4F_5$ $(s-2)$	

TABLE II（s が奇数の場合）[7]

main effect	1st order	2nd order	3rd order	4th order	5th order
		$F_1F_4F_5$ 1	$F_1F_2F_5F_6$ 1	$F_1F_2F_4F_5F_6$ $(s-2)$	$F_1F_2F_3F_4F_5F_6$ (s^2-5s+7)
		$F_2F_4F_6$ 1	$F_1F_3F_4F_6$ 1	$F_1F_3F_4F_5F_6$ $(s-2)$	
		$F_3F_5F_6$ 1	$F_2F_3F_4F_5$ 1	$F_2F_3F_4F_5F_6$ $(s-2)$	
			$F_1F_2F_3F_4$ 1	$F_1F_2F_3F_4F_5$ $(s-3)$	
			$F_1F_2F_3F_5$ 1	$F_1F_2F_3F_4F_6$ $(s-3)$	
			$F_1F_2F_3F_6$ 1	$F_1F_2F_3F_5F_6$ $(s-3)$	

参考文献

[1] Bose, R.C. (1947) Mathematical theory of the symmetrical factorial design. Sankhyā, vol. 8, P107-166.

[2] Bose, R.C. and Bush, K.A. (1952) Orthogonal arrays of strength two and three. Ann. Math. Statist., vol. 23, P508-524.

[3] Fisher, R.A. (1942) The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of groups. Ann. Eugen. London 11, P341-353.

[4] Fisher, R.A. (1945) A system of confounding for factors with more than two alternatives, given completely orthogonal cubes and higher powers. Ann. Eugen. London 12, P283-290.

[5] Fujii, Y. (1967) Geometrical association schemes and fractional factorial designs. J. Sci. Hiroshima Univ. A-I, vol31.

[6] Gulati, B.R. (1969) Some useful bounds in symmetrical factorial designs (Abstract). Ann. Math. Statist., vol. 40, P1514.

[7] Robillard, P. (1968) Combinatorial problems in the theory of factorial designs and error correcting codes. Inst. Statist. mimeo. Ser. no. 594 Chapel Hill, N.C.

[8] Slepian, D. (1956) A class of binary signaling alphabets. Bell System Technical Journal. Vol. 35 P203-234.