数理解析研究所講究録
第 95 巻 1970 年 23-39

Finite Group による Association Scheme の構成

池田貞雄

§1. 序

v個の元から成る集合 $V=\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_v\}$ の元の間に次の関係が定義されているとき，V に association が定義されているという。

(a) Vの任意の二元は 1-st, 2-nd, $\cdots$, m-th associates のいずれかである.

(b) Vのどの元も n_i個の i-th associates をもつ。ここで n_iは選んだ元によらない定数.

(c) Vの二元 ϕ_s, ϕ_t が i-th associates であるとき，ϕ_s の j-th associates であり同時に ϕ_t の k-th associates であるような元 ϕ_u の個数は p^i_{jk} で，この数は個々の組 (ϕ_s, ϕ_t) によらない定数である.

ここで，v, n_i, p^i_{jk} を association のパラメータというが，特に Vの任意の元はそれ自身に 0-th associate であるとし，$n_0=1$,

$p_{0k}^i = \delta_{ik}$, $p_{jk}^0 = n_j \delta_{jk}$ とおくと, association のパラメータの間には次の関係式が成り立つ。

$$\text{(1.1)} \quad \begin{aligned} &\sum_{i=0}^m n_i = v, \quad p_{jk}^i = p_{kj}^i, \quad \sum_{j=0}^m p_{jk}^i = n_k, \\ &n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k, \qquad i, j, k = 0, 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

いま二種類の行列を次のように定義する。

$$\text{(1.2)} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_k = \| p_{jk}^i \|' \,(m+1\text{ 次}), & k = 0, 1, \cdots, m, \\ A_i = \| a_{\beta i}^\alpha \| \,(v\text{ 次}), & i = 0, 1, \cdots, m, \end{cases}$$

$$a_{\beta i}^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha, \beta \text{ が } i\text{-th associates のとき} \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

後者を association matrix とよぶ。$A_0, A_1, \cdots, A_m$ はすべて対称行列で, $\sum_{i=0}^m A_i = G_v$ (すべての要素 1), $A_0 = I_v$。更に

$$A_j A_k = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i A_i, \qquad j, k = 0, 1, \cdots, m$$

が成立ち, 当然, $A_j A_k = A_k A_j$, また実数体上の linear closure $[A_0, A_1, \cdots, A_m]$ は linear associative かつ commutative algebra をなし, これが association algebra $\mathfrak{A}$ を作っている。

歴史的に知られている主な association scheme としては, (i) Group divisible type $(m=2)$, (ii) Triangular type $(m=2)$, (iii) L_2-type $(m=2)$, (iv) Cyclic type $(m=2)$ などがある。これらのパラメータは

(i) Group divisible type : $n_1 = n-1$, $n_2 = n(m-1)$, $v = nm$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ n-1 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n-1 \\ n(m-1) & n(m-1) & n(m-2) \end{bmatrix}$$

(ii) Triangular type : $v = n(n-1)/2,\quad n_1 = 2(n-2),\quad n_2 = (n-2)(n-3)/2$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2n-4 & n-2 & 4 \\ 0 & n-3 & 2n-8 \end{bmatrix},\quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & n-3 & 2n-8 \\ \frac{(n-2)(n-3)}{2} & \frac{(n-3)(n-4)}{2} & \frac{(n-4)(n-5)}{2} \end{bmatrix}$$

(iii) L_2-type : $v = n^2,\quad n_1 = 2(n-1),\quad n_2 = (n-1)^2$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2n-2 & n-2 & 2 \\ 0 & n-1 & 2n-4 \end{bmatrix},\quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & n-1 & 2n-4 \\ (n-1)^2 & (n-1)(n-2) & (n-2)^2 \end{bmatrix}$$

(iv) Cyclic type : $v,\ n_1,\ n_2;\quad n_1\alpha + n_2\beta = n_1(n_1-1)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ n_1 & \alpha & \beta \\ 0 & n_1-\alpha-1 & n_1-\beta \end{bmatrix},\quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & n_1-\alpha-1 & n_1-\beta \\ n_2 & n_2-n_1+\alpha+1 & n_2-n_1+\beta-1 \end{bmatrix}$$

これらの association scheme は PBIB design の treatments の関係として用いられてきた。

近年符号化理論の進展に伴なって，design や association scheme の construction その他も単に実用的な実験計画に供するという目的から一歩踏み出して研究されるようになっている。特に association scheme と Graph 理論との関連に関する研究も活潑に行われている。

前回の本共同研究の小川・池田"Combinatorial Problems in Design of Experiments"で觸れた存否不明の二つの BIB design :

(1.3) $\quad v = 46,\ b = 69,\ r = 9,\ k = 6,\ \lambda = 1$

(1.4) $\quad v = 51,\ b = 85,\ r = 10,\ k = 6,\ \lambda = 1$

は，各々に対応する Singly Linked Block (SLB) association scheme

の存在を含む。したがってそれらの SLB association scheme の不存在が示されれば，これらの BIB design の不存在が証明されることになる。

§2. 置換行列から構成される association scheme

Chakravarti-Blackwelder [1] は association scheme から得られる BIBD を調べたが，その中で置換行列から association scheme を構成するのに基本的な定理を与えている。本節ではそれについて述べる。

(2.1) $$\mathcal{P} = \{P_0 = I_v,\ P_1,\ \cdots,\ P_{v-1}\}$$

を v 個の v-次置換行列とし，これを $m+1$ 個のグループに分けて

(2.2) $$\mathcal{P}_0 = \{P_0\},\ \mathcal{P}_1,\ \cdots,\ \mathcal{P}_m,$$

とする。各 $\mathcal{P}_i$ に属する P_α の和

(2.3) $$A_i = \sum_{P_\alpha \in \mathcal{P}_i} P_\alpha, \quad i = 0, 1, \cdots, m.$$

この $m+1$ 個の行列が association matrices の set をなすための必要十分条件は次の補題で述べる通りである。

[補題 2.1] $A_0, A_1, \cdots, A_m$ を v 次の行列とするとき，これらが，パラメータ

(2.4) $$v,\ p^i_{jk},\ i, j, k = 0, 1, \cdots, m,$$

の m-class association scheme の association matrices の set であるための必要かつ十分な条件は

$$(2.5)\begin{cases}\text{(i)} & \text{各 } A_i \text{ は } (0,1)\text{-行列で対称,}\\ \text{(ii)} & \sum_{i=0}^{m} A_i = G_v,\\ \text{(iii)} & A_j A_k = \sum_{i=0}^{m} p_{jk}^{i} A_i,\quad j,k=0,1,\cdots,m.\end{cases}$$

今の場合には，この条件は次のように書ける。

$$(2.6)\begin{cases}\text{(i)} & \sum_{\mathcal{P}_i} P_\alpha = \sum_{\mathcal{P}_i} P_\alpha^{-1},\\ \text{(ii)} & \sum_{\mathcal{P}} P_\alpha = G_v,\\ \text{(iii)} & \sum_{\mathcal{P}_j} P_\beta \sum_{\mathcal{P}_k} P_\gamma = \sum_{i=0}^{m} p_{jk}^{i} \sum_{\mathcal{P}_i} P_\alpha.\end{cases}$$

そこで，二つの行列 $R=\|r_{ij}\|$, $S=\|s_{ij}\|$ が $R\cdot S=\|r_{ij}s_{ij}\|=O$ のとき，互に disjoint とよぶことにすると，(2.6)(ii) の条件は (2.1) の $\mathcal{P}$ が互に disjoint な v 個の置換行列の集合であることを示している。このことから

[補題 2.2] $\mathcal{P}$ が条件(2.6)(ii)を満していれば，任意の実数 c_α, d_α について，条件

$$\sum_{\alpha=0}^{v-1} c_\alpha P_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{v-1} d_\alpha P_\alpha$$

は，$c_\alpha = d_\alpha$, $\alpha=0,1,\cdots,v-1$ を含む。

$$(2.7)\qquad \mathcal{P}_i^{-1} = \{P_\alpha^{-1} \mid P_\alpha \in \mathcal{P}_i\},\quad i=0,1,\cdots,m$$

とおくと，Chakravarti-Blackwelder による結果は次のように述べられる。

[定理 2.1] (2.1) の $\mathcal{P}$ が v 次の有限群をなすとする。このとき (2.3) の $A_0, A_1, \cdots, A_m$ が (2.4) をパラメータとする m-class association scheme の association matrices の set であるための必要

かつ十分な条件は次の三条件が同時に満足されることである。

$$
(2.8)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \underline{\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^{-1},\ i=0,1,\cdots,m,} \\ \text{(ii)} & \underline{\sum_{\alpha=0}^{m} P_\alpha = G_v,} \\ \text{(iii)} & \underline{\text{任意の } P_\alpha \in \mathcal{P}_i \text{ に対して } P_\beta P_\gamma = P_\alpha \text{ となる } (P_\beta, P_\gamma)} \\ & \underline{P_\beta \in \mathcal{P}_j,\ P_\gamma \in \mathcal{P}_k \text{ が } p_{jk}^i \text{ 個存在する}, j,k=0,1,\cdots,m.} \end{cases}
$$

[証明] (2.8) が (2.6) の十分条件になっていることは明らかである。必要なことを示す。$\mathcal{P}$ は群をなすから $\mathcal{P}^{-1}=\mathcal{P}$。$\sum_{\mathcal{P}_i} P_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{v-1} c_{i\alpha} P_\alpha$, $\sum_{\mathcal{P}_i} P_\alpha^{-1} = \sum_{\alpha=0}^{v-1} d_{i\alpha} P_\alpha$ とおくと，(2.6)(i) と補題 2.2 から，$c_{i\alpha}=d_{i\alpha}$, $\alpha=0,1,\cdots,v-1$ が得られ (2.8)(i) が成立つ。

$p_{jk}(P_\alpha)$ を $P_\beta P_\gamma = P_\alpha$ の解 (P_β, P_γ) の個数とすると，$\mathcal{P}$ が群をなすから，$P_\beta P_\gamma \in \mathcal{P}$。故に

$$\sum_{P_\beta \in \mathcal{P}_j} P_\beta \cdot \sum_{P_\gamma \in \mathcal{P}_k} P_\gamma = \sum_{\alpha=0}^{v-1} p_{jk}(P_\alpha) P_\alpha$$

これと (2.6)(iii) から

$$\sum_{\alpha=0}^{v-1} p_{jk}(P_\alpha) P_\alpha = \sum_{i=0}^{m} p_{jk}^i \sum_{\mathcal{P}_i} P_\alpha$$

を得るが，補題 2.2 から，$P_\alpha \in \mathcal{P}_i$ なら $p_{jk}(P_\alpha) = p_{jk}^i$, $i=0,1,\cdots,m$。故に (2.8)(iii) が成立つ。 Q.E.D.

この定理を用いて association matrices (2.3) を構成するには，(2.8) の三つの条件を満すような $\mathcal{P}$ のグループ分け (2.2) を探さなければならないが，それは厄介である。

v 個の v 次置換行列 $\mathcal{P}$ が群をなすならば，$\mathcal{P}$ はある regular permutation group に同型であり，群の表現論から任意の有限群

は regular permutation group として表現されることがわかっているから，上の定理に基ずく association matrices の置換行列からの構成の問題は，有限群からの association matrices（又は scheme）の構成の問題と同じである。

§3. 群の元の Collection とその演算

G を任意に与えられた有限群とするとき，重複を許した G の元のある集合

(3.1) $$H=\{a,\cdots,a,\ b,\cdots,b,\ c,\cdots,c,\ \cdots\},\quad a,b,c,\cdots\in G$$

を G の元の collection とよぶことにし，H の中での $a,b,c,\cdots$ の重複度を $f_a(H)$, $f_b(H)$, $f_c(H)$, $\cdots$ と書くことにする。すると任意の H に対して，重複度の集合 $[f_a(H)\,|\,a\in G]$ が一意に対応する。$[f_a(H)=0\,|\,a\in G]$ には empty collection が対応する。$f_a(H)$ が 0 か 1 かの値しかとらなければ，H は G の部分集合となる。collection H のことを $H=H(G)[f_a(H)]$ と表わすと便利である。ただし，$H(G)$ は H の中の相異なる元の集合で G の部分集合。この collection に対して次のような演算を導入する。

(a) Inversion: $f_a(K)=f_{a^{-1}}(H)$ でかつ $K(G)=H(G)^{-1}$ のとき $K=H^{-1}$.

(b) Scalar multiplication: 任意の非負整数 λ について

$$\lambda\, H(G)[f_a(H)] = H(G)[\lambda f_a(H)]$$

(c) Multiplication by group element: $x\in G$ のとき

$$x(H(G)[f_a(H)]) = (xH(G))[f_{x^{-1}a}(H)],$$
$$(H(G)[f_a(H)])x = (H(G)x)[f_{ax^{-1}}(H)].$$

(d) 加法 : $H(G)[f_a(H)] + K(G)[f_a(K)] = (H(G) \cup K(G))[f_a(H) + f_a(K)]$

(e) 減法 $H = H(G)[f_a(H)] \geqq K = K(G)[f_a(K)]$ のとき $L = H - K$ を $f_a(L) = f_a(H) - f_a(K)$, $H(G) - K(G) \subseteq L(G) \subseteq H(G)$ として, $L = L(G)[f_a(L)]$ で定義する。

(f) Union : $H(G)[f_a(H)] \cup K(G)[f_a(K)] = (H(G) \cup K(G))[\max(f_a(H), f_a(K))]$

(g) Intersection : $H(G)[f_a(H)] \cap K(G)[f_a(K)] = (H(G) \cap K(G))[\min(f_a(H), f_a(K))]$

(h) 積 : $f_a(L) = \sum_{xy=a} f_x(H) f_y(K)$ のとき $L = HK$.

Collection H の cardinality は $|H| = \sum_{a \in G} f_a(H)$ で定義される。

以上の演算に対して次のような結果が成り立つ

[補題 3.1] H, K, L, M を G の元の collection, $\lambda, \mu, \varsigma, \eta$ を $\lambda H + \mu K$, $\varsigma L + \eta M$ が collection となるような整数とするとき

$$(3.2)\begin{cases} \text{(i)} \ (\lambda H + \mu K)(\varsigma L + \eta M) = \lambda\varsigma HL + \lambda\eta HM + \mu\varsigma KL + \mu\eta KM \\ \text{(ii)} \ (\lambda H + \mu K)^{-1} = \lambda H^{-1} + \mu K^{-1} \\ \text{(iii)} \ (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} \end{cases}$$

が成り立つ。

[補題 3.2] $|H \cap K| = f_1(HK^{-1})$, $|aH \cap bK| = f_{a^{-1}b}(HK^{-1})$

[補題 3.3] (i) H を G の部分群, K を H の部分集合とするとき

$$KH = HK = |K|H.$$

(ii) G の部分集合 H が G の部分群となるための必要十分条

件は $H^2=|H|\,H$ が成立つことである。

(iii) $S=G_0+T$ を G の部分集合とする。$G_0=\{1\}$。S が G の部分群をなすための必要十分条件は

$$T^2=|T|G_0+(|T|-1)T$$

が成立つことである。

§4. 群の元の "association relation" と Module Theorem の拡張

本節では有限群から association scheme を構成するのに基本的な定理を導く。

G を任意に与えられた有限群としその次数を v とする。G を $m+1$ 個の互に素な部分集合にわける。

$$(4.1)\qquad G=G_0+G_1+\cdots+G_m,\qquad G_0=\{1\}.$$

G の cardinal product, $G\times G=\{(x,y)\,|\,x,y\in G\}$ 上から, $m+1$ 個の整数の集合 $\{0,1,\cdots,m\}$ への写像 $\varphi(x,y)$ を次のように定義する.

$$(4.2)\qquad \varphi(x,y)=i\iff x^{-1}y\in G_i,\qquad i=0,1,\cdots,m.$$

$\varphi(x,y)$ は x,y に関して必ずしも対称ではない。$\varphi(x,y)=i$ のとき x は y に対して分割(4.1)に関して i-th relation にあるという。

$\varphi(x,y)$ は次の性質をもつ。

(a) $\varphi(x,y)=0\iff x=y$,

(b) 任意の $a\in G$ について, $\varphi(ax,ay)=\varphi(x,y)$,

(c) G が可換群なら, $\varphi(x,y)=\varphi(y^{-1},x^{-1})$,

(d) 任意に与えられた $a \in G$ に対して $|\{y \mid \varphi(a,y)=i\}| = |G_i|$。

$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ がすべての $(x,y) \in G \times G$ に対して成立つとき, $\varphi(x,y)$ は対稱 (symmetric) という。

[補題 4.1] $\varphi(x,y)$ が対稱であるための必要十分条件は

$$(4.2) \qquad G_i = G_i^{-1}, \quad i=0,1,\cdots,m,$$

が成立することである。

$\varphi(x,y)$ が G の v 個の元に m-class association を定義するというのは,

$$(4.3)\begin{cases}\text{(i)} & \varphi(x,y) \text{ が対稱であり,}\\ \text{(ii)} & \varphi(x,y)=i \text{ となる任意の } (x,y) \text{ に対して, } \varphi(x,z)=j \text{ かつ}\\ & \varphi(y,z)=k \text{ となる } z \text{ の個数 } p^i_{jk} \text{ が, } (x,y) \text{ に無関係に定まる}\end{cases}$$

ときである。この p^i_{jk} が (1.1) の関係式を満足することは明らかである。

次の定理を示すのが本節の目的である。

[定理 4.1] $\varphi(x,y)$ が G の元に m-class association を定義するために必要かつ十分な条件は (4.1) の分割が次の条件を満すことである。

$$(4.4) \qquad \begin{cases}\text{(i)} & G_i = G_i^{-1}, \quad i=0,1,\cdots,m,\\ \text{(ii)} & G_j G_k = \sum_{i=0}^{m} p^i_{jk} G_i, \quad j,k=0,1,\cdots,m,\end{cases}$$

がある非負整数の組 $\{p^i_{jk}\}$ $(i,j,k=0,1,\cdots,m)$ で成立する。

[証明]（必要性）. (4.4)(i) は補題4.1によって(4.3)(i)から従う。

(4.3)(ii) の p_{jk}^{i} は条件(1.1)を満す。ここで $n_i=|G_i|, i=0,1,\cdots,m$.
さて，c を G_i の任意の元とすると，$a^{-1}b=c$ となる $a,b\in G$ が少くとも存在するが，それに対しては勿論 $\varphi(a,b)=i$。(4.3)(ii) によって $\varphi(a,z)=j$ かつ $\varphi(b,z)=k$ となる z がちょうど p_{jk}^{i} 個存在する。つまり $a^{-1}z\in G_j$, $z^{-1}b\in G_k$。ところで，$(a^{-1}z)(z^{-1}b)=a^{-1}b=c\in G_i$ だから，$xy=c$ となる $(x,y), x\in G_j, y\in G_k$ が少くとも p_{jk}^{i} 個存在する。このことから

(4.5) $$G_jG_k \geqq \sum_{i=0}^{m} p_{jk}^{i} G_i, \quad (j,k=0,1,\cdots,m)$$

いま，この両辺の collection の cardinality を考えると

$$|G_jG_k|=|G_j||G_k|=n_jn_k,$$
$$\left|\sum_{i=0}^{m} p_{jk}^{i} G_i\right|=\sum_{i=0}^{m} p_{jk}^{i} n_i=\sum_{i=0}^{m} p_{ik}^{j} n_j=n_jn_k.$$

故に (4.5) の両辺は同じ collection を表わす。これが (4.4)(ii) である。

（十分性）(4.3)(i) は (4.4)(i) から従う。

(x,y) を $\varphi(x,y)=i$ となる元の組とすると，$z\in xG_j\cap yG_k$ なる z に限って $\varphi(x,z)=j$ かつ $\varphi(y,z)=k$ となるので，この二つの条件を満す z の個数は $|xG_j\cap yG_k|$ に等しい。補題3.2から

(4.6) $$|xG_j\cap yG_k| = f_{x^{-1}y}(G_jG_k).$$

(4.4)(ii) から，(x,y) に無関係に $\varphi(x,y)=i$，つまり $x^{-1}y\in G_i$ な

る限り，(4.6)の右辺は p^i_{jk} に等しい。 Q.E.D.

この定理の(4.4)(ii)の p^i_{jk} は条件(1.1)を満すことも容易に証明できる。

さて，この定理を用いて，有限群から実際に association scheme，あるいは association matrices を構成するには次のような手続きによればよい。Gの元を任意に順序ずけて

$$G=\{a_0=1,\ a_1,\ \cdots,\ a_{v-1}\}$$

これに left (right でもよい) regular representation

$$\sigma(x):\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_{v-1} \\ xa_0, & xa_1, & \cdots, & xa_{v-1}\end{pmatrix}$$

を行ない，対応する置換行列を $P(x)$ とする。そのとき

$$\mathcal{P}=\{P(x)\mid x\in G\}$$

は G に同型な群をなす。

(4.4)の条件を満す分割(4.1)に対して

$$A_i=\sum_{x\in G_i}P(x)\ ,\quad i=0,1,\cdots,m,$$

を作れば，これが $v, p^i_{jk}, i,j,k=0,1,\cdots,m$ をパラメータとする association の association matrices の set を与える。

定理4.1は加群に対するいわゆる Module Theorem ([5]) の非可換なものまで含めた乗法群への拡張になっていることを注意しておく。

の，Extended group divisible type の association を与える。特に $m=2$，$h_1=l_1=n$，$l_2=m$ とおくと，2-class Group divisible type (第1節) が得られる。

(2°) <u>Extended L_2-type</u>

H を order n の群，その m 重直積を G とする。

$$(5.7)\qquad G=\overbrace{H\times H\times\cdots\times H}^{m}$$

従って，$|G|=n^m$。このとき分割

$$(5.8)\qquad \begin{cases} G_0=\{(1,1,\cdots,1)\} \\ G_1=\{(a_1,1,\cdots,1),(1,a_2,1,\cdots,1),\cdots,(1,\cdots 1,a_m)\mid a_i\in H,\ a_i\neq 1\}_{i=1,\cdots,m} \\ \cdots\cdots \\ G_i=i\text{個の components}\neq 1,\ m-i\text{個が }1\text{ なる }G\text{ の元全体} \\ \cdots\cdots \\ G_m=\{(a_1,\cdots,a_m)\mid a_i\in H,\ a_i\neq 1,\ i=1,\cdots,m\} \end{cases}$$

をとれば

$$n_i=\binom{m}{i}(n-1)^i,\quad i=0,1,\cdots,m$$

$$(5.9)\qquad p^i_{jk}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{u=\alpha(i,j,k)}^{\beta(i,j,k)}\frac{i!}{(i+j-k-2u)!\,u!\,(k-j+u)!}\binom{m-i}{k-i+u}(n-2)^{i+j-k-2u}(n-1)^{k-i+u}, \\ \qquad\qquad (\alpha(i,j,k)\leq\beta(i,j,k)) \\ 0\ ,\ (\text{その他})\end{cases}$$

ただし，

$$\alpha(i,j,k)=\max(0,\ i-k),\ \beta(i,j,k)=\min\left(i,\ m-k,\ \frac{i+j-k}{2}\right).$$

をパラメータとする m-class association scheme が得られる。

§5. 有限群から構成される association scheme の二三の例

この節では，前節の定理を用いて構成される association scheme のいくつかを，詳細な説明は省略して，述べることにする。

(1°) Extended Group Divisible Type

order v の群 G に対してその部分群の chain

(5.1) $\quad G_0 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{m-1} \subset H_m = G$

があったとする。H_{i-1} は H_i の真部分群。

(5.2) $\quad |H_i| = h_i,\ i = 0, 1, \cdots, m$

とおくと，$h_0 = 1,\ h_m = v$ で，正整数 $\ell_1, \cdots, \ell_m$ が存在して

(5.3) $\quad h_i = h_{i-1}\,\ell_i,\ \ i = 1, 2, \cdots, m$

となる。従って

(5.4) $\quad h_1 = \ell_1,\ h_2 = \ell_1\ell_2,\ \cdots,\ h_i = \ell_1\ell_2\cdots\ell_i,\ \cdots,\ v = h_m = \ell_1\ell_2\cdots\ell_m.$

H_i に関する H_{i-1} の complementary subset を順次 G_i とする，つまり

(5.5) $\quad G_0 = H_0,\ G_1 = H_1 - H_0,\ G_2 = H_2 - H_1,\ \cdots,\ G_m = H_m - H_{m-1}$

とおくと，これは (4.4) の二条件を満足する分割を与え，パラメータ

(5.6)
$$\begin{cases} p^0_{00} = 1,\ p^i_{0k} = \delta_{ik},\ i, k = 1, \cdots, m, \\ p^i_{jk} = p^i_{kj} = \delta_{ik}(h_j - h_{j-1}) = \delta_{ik}\,\ell_0\ell_1\cdots\ell_{j-1}(\ell_j - 1),\ (j<k),\ j, k = 1, \cdots, m \\ p^i_{jj} = \ell_0\ell_1\cdots\ell_{j-1}(\ell_j - 1),\ (0 \leqq i < j),\ = \ell_0\ell_1\cdots\ell_{j-1}(\ell_j - 2),\ (i = j), \\ \quad = 0,\ (\text{その他}) \end{cases}$$

特に $m=2$ のときは、L_2-type が得られる。

(3°) <u>Extended T_2-type</u>

m 個の生成元 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ から、生成関係

(5.10) $$a_i^2 = 1, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad i, j = 1, \cdots, m$$

の下で生成される群を考える。それを G とし、分割

(5.11)
$$\begin{cases} G_0 = \{1\} \\ G_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \\ G_2 = \{a_i a_j \mid 1 \leqq i < j \leqq m\} \\ \cdots\cdots\cdots \\ G_m = \{a_1 a_2 \cdots a_m\} \end{cases}$$

をとれば、$|G_i| = \binom{m}{i}$, $|G| = 2^m$。この G は $GF(2)$ の上の m-vectors 全体の作る加群と isomorphic で、G_i は i 個の component が $1 \in GF(2)$, $m-i$ 個が $0 \in GF(2)$ となる vectors の集合に対応する。

(5.11) は

(5.12)
$$\begin{cases} n_i = \binom{m}{i}, \quad i = 0, 1, \cdots, m \\ p^i_{jk} = \begin{cases} \binom{i}{\frac{i+j-k}{2}}\binom{m-i}{\frac{j+k-i}{2}}, & \left(i+k-j \geqq 0, \ \frac{i+j-k}{2}, \ \frac{j+k-i}{2} : \text{integers}\right) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases} \end{cases}$$

をパラメータとする m-class association scheme を作る。

また、G の部分群

(5.13) $$\bar{G} = G_0 + G_2 + G_4 + \cdots + G_{2i} + \cdots + G_{2[m/2]}$$

は，$|\bar{G}| = 2^{m-1}$ で，この分割は，$s = [m/2]$ として

$$
(5.14)\qquad \begin{cases} G_{2j}^2 = \sum_{i=0}^{s} \binom{2i}{i}\binom{m-2i}{2j-i} G_{2i}, \quad j = 0, 1, \cdots, s, \\[2ex] G_{2j}\, G_{2k} = \sum_{i=\max(0,\, j-k)}^{j+k} \binom{2i}{i+j-k}\binom{m-2i}{j+k-i} G_{2i}, \quad j, k = 0, 1, \cdots, s \end{cases}
$$

なる関係を満す。これは $\bar{G}$ 上に定義される s-class association scheme のパラメータを与える。

更に（5.14）の第一式で，$m \to n$，$j = 1$，とすれば

$$
(5.15)\qquad G_2^{\,2} = \binom{n}{2} G_0 + 2(n-2) G_2 + 6\, G_4 .
$$

が得られるが，G_2 の元 x, y に対して，$x^{-1}y \in G_2$，$x^{-1}y \in G_4$ にしたがって，x, y は 1-st associates, 2-nd associates とよぶことにすると，G_2 の元の間に，2-class の association scheme が定義され，Triangular type になることが確かめられる。

以上（1°）〜（3°）以外にも，例えば，藤井［6］の定義になる Geometrical association scheme を導く群も考えられる。まだ完全に調べているわけではないが，他にも種々の新しいタイプの association scheme ができるようである。

association scheme，あるいは design の構造と代数系との関係を調べる場合，代数系 → association scheme の方向（この論文がそうであるが）よりも，その逆 association scheme → 代数系の方向の研究が意味がある。

この論文に関して言えば，また，実在する群から具体的に

association scheme を構成すること，それと他の代数系との関連を調べておくこと，などいろいろの問題が残されている。

文献

[1] I. M. Chakravarti & W. C. Blackwelder, "On some composition and extension methods in the construction of block designs from association matrices," 1967, (Read at Symp. on Combinatorial Math., Chapel Hill)

[2] H. B. Mann (1964), "Balanced incomplete block designs and Abelian difference sets", Illinois Jour. Math., 8, 252-261

[3] W. A. Thompson, Jr. (1958) "A note on PBIB design matrices", Ann. Math. Statist., 29, 919-922

[4] M. Masuyama, Calculus of Blocks, Lecture note, 1965-1966, Dept. Stat. U.N.C.

[5] H. J. Ryser (1963), Combinatorial Mathematics, The Carus Math. Monog. 14

[6] Y. Fujii (1967), "Geometrical association schemes and fractional factorial designs", Jour. Scie. Hiroshima Univ., Ser A-1, 31, 195-209.